Google

This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Google

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter http://books.google.com durchsuchen.

LEITFADEN FÜR DEN UNTERRICHT

IN DER

# HÖHEREN MATHEMATIK

VON

EMANUEL v. BUDISAVLJEVIĆ UND ALFRED MIKUTA

MAJOR DES ARMEESTANDES — HAUPTMANN DES DIV.-ART.-REGTS. NR. 18.

LEHRER AN DER K. UND K. TECHNISCHEN MILITÄR-AKADEMIE.

II. BAND.

## GRUNDZÜGE

DER

## DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG.

VON

HAUPTMANN ALFRED MIKUTA.

MIT 142 TEXTFIGUREN.

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

WIEN UND LEIPZIG.

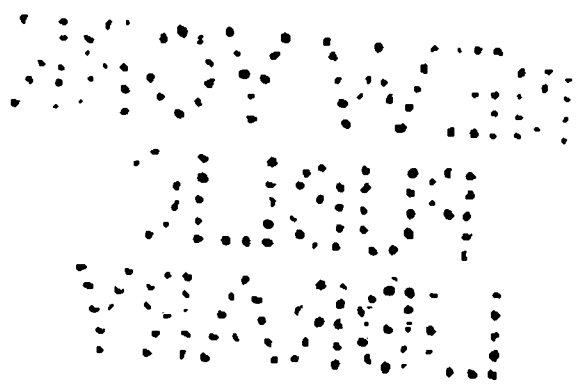
WILHELM BRAUMÜLLER

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTS-BUCHHÄNDLER

1898.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
106135
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
1899.

ALLE RECHTE VORBEHALTEN.



Druck von Friedrich Jasper in Wien.

# VORWORT.

Die Begrenzung des Lehrstoffes in dem vorliegenden Leitfaden entspricht den Bestimmungen des »Lehrplanes für die k. und k. technische Militär-Akademie«. Bezüglich der Behandlungsart waren die Verfasser bemüht, jene Richtung einzuhalten, welche von Professor Karl Schmitt begründet und während seiner vieljährigen ausgezeichneten Thätigkeit an dieser Anstalt gepflegt worden war.

Als Quellen wurden für den I. Band die Werke von Baltzer, Clebsch-Lindemann, Gordan, Günther, Hesse, Reye, Rudio, Salmon-Fiedler, Schmitt, Staudt, Steiner-Schrötter; für den II. Band die Werke von Herr, Kleyer, Matthiessen, Stegemann, Weber und die Vorlesungen der o. ö. Professoren Emanuel Czuber, Dr. Gustav R. v. Escherich, Dr. Leopold Gegenbauer benützt.

Wien, im April 1898.

# INHALT.


Seite

**Einleitung** . . . . . 1
Begriff der Constanten, der Variablen und der Functionen . . . . . 1
Begriff der Grenze . . . . . 6
Das unendlich Kleine und das unendlich Große . . . . . 17
Begriff der Stetigkeit . . . . . 24

**I. Theil.**

**Differential- und Integralrechnung.**

1. **Abschnitt. Differentialrechnung** . . . . . 27
§ 1. Begriff des Differentialquotienten und des Differentials . . . . . 27
§ 2. Differentialquotienten der einfachen Functionen . . . . . 31
§ 3. Differentiation von Summen, Producten und Quotienten . . . . . 36
§ 4. Differentiation der Functionen von Functionen . . . . . 42
§ 5. Differentiation entwickelter Functionen von zwei und mehreren unabhängigen Variablen . . . . . 46
§ 6. Differentiation einer Function mehrerer Functionen einer unabhängigen Variablen . . . . . 51
§ 7. Differentiation der unentwickelten Functionen . . . . . 53
§ 8. Höhere Differentialquotienten und Differentiale der entwickelten Function einer unabhängigen Variablen . . . . . 59
§ 9. Partielle Differentialquotienten und totale Differentiale höherer Ordnung der Functionen mehrerer unabhängigen Variablen . . . . . 62
§ 10. Höhere Differentialquotienten und höhere Differentiale der unentwickelten Functionen . . . . . 68
§ 11. Transformation der Variablen . . . . . 71
2. **Abschnitt. Integralrechnung** . . . . . 75
§ 12. Grundaufgabe der Integralrechnung, Begriff des unbestimmten Integrals 75
§ 13. Grundformeln der Integralrechnung . . . . . 76
§ 14. Die einfachen Integrationsmethoden . . . . . 79
§ 15. Integration der rationalen Functionen . . . . . 89
§ 16. Integration der irrationalen Functionen . . . . . 104
§ 17. Integration einiger transcendenter Functionen . . . . . 114
3. **Abschnitt. Das bestimmte Integral** . . . . . 137
§ 18. Begriff des bestimmten Integrals . . . . . 137
§ 19. Fundamentalsätze über bestimmte Integrale . . . . . 143
§ 20. Wertermittlung bestimmter Integrale . . . . . 1-
§ 21. Erweiterung des Begriffes eines bestimmten Integrals . . . . . .

## II. Theil.

## Anwendung der Differential- und Integralrechnung.

### I. Abtheilung. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Aufgaben der Algebra.

Seite

**1. Abschnitt. Die Reihen** . . . . . 178

§ 22. Begriff einer Reihe und ihrer Convergenz . . . . . 178
§ 23. Convergenz der Reihen . . . . . 179
§ 24. Reihe von Taylor . . . . . 189
§ 25. Reihe von Maclaurin . . . . . 193
§ 26. Reihe von Taylor für Functionen zweier unabhängigen Variablen . . 194
§ 27. Entwicklung der Functionen in Reihen . . . . . 195
§ 28. Summieren der Reihen mittelst Differentiation und Integration . . . 204
§ 29. Integration durch Reihen . . . . . 210

**2. Abschnitt. Bestimmung der Werte von Ausdrücken, welche für besondere Werte der Variablen eine der unbestimmten Formen $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 . \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ annehmen** . . . . . 214

§ 30. Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$ . . . . . 215
§ 31. Ausdrücke von der Form $\frac{\infty}{\infty}$ . . . . . 217
§ 32. Ausdrücke von der Form $0 . \infty$ . . . . . 218
§ 33. Ausdrücke von der Form $\infty - \infty$ . . . . . 220
§ 34. Die unbestimmten Formen $1^\infty$, $0^0$, $\infty^0$ . . . . . 221

**3. Abschnitt. Über complexe Größen** . . . . . 223

§ 35. Allgemeines über complexe Größen und das Rechnen mit denselben . . 223
§ 36. Eulers Formel . . . . . 227
§ 37. Satz von Moivre . . . . . 228
§ 38. Vielwertigkeit der natürlichen Logarithmen . . . . . 231

**4. Abschnitt. Algebraische Gleichungen** . . . . . 232

§ 39. Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten . . . . . 232
§ 40. Transformation der Gleichungen . . . . . 248
§ 41. Directe Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades . 255
§ 42. Auflösung numerischer Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade . . . . . 261
§ 43. Näherungsmethoden zur Berechnung der irrationalen Wurzeln . . . . 270

**5. Abschnitt. Maxima Minima** . . . . . 283

§ 44. Einleitung . . . . . 283
§ 45. Maxima und Minima der Functionen einer unabhängigen Variablen . . 284
§ 46. Maxima und Minima der entwickelten Functionen zweier unabhängigen Variablen . . . . . 296
§ 46a. Maxima und Minima der Functionen mehrerer Variablen . . . . 304
§ 47. Relative oder bedingte Maxima und Minima . . . . . 305

## II. Abtheilung. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Aufgaben der Geometrie.

Seite

1. **Abschnitt. Untersuchung des Laufes ebener Curven** . . . . . 311
   § 48. Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten und der Gleichung der Curve in der entwickelten Form . . . . . 311
   § 49. Voraussetzung von Polarcoordinaten . . . . . 326
   § 50. Gleichung der Tangente und der Normale ebener Curven . . . . . 334
   § 51. Asymptoten ebener Curven . . . . . 338
   § 52. Die Fußpunktscurven . . . . . 351
   § 53. Umhüllungslinien oder Enveloppen . . . . . 362
   § 54. Berührungen verschiedener Ordnung, Osculation . . . . . 371
   § 55. Krümmung ebener Curven . . . . . 378
   § 56. Evoluten und Evolventen ebener Curven . . . . . 391
   § 57. Besondere Punkte ebener Curven . . . . . 400
2. **Abschnitt. Unebene Curven oder Curven doppelter Krümmung** . . . . 408
   § 58. Allgemeines über unebene Curven . . . . . 408
   § 59. Tangente und Normalebene unebener Curven . . . . . 410
   § 60. Schmiegungsebene unebener Curven . . . . . 413
   § 61. Krümmung und Windung unebener Curven . . . . . 415
3. **Abschnitt. Krumme Flächen** . . . . . 427
   § 62. Tangenten, Tangentenebenen und Normalen der krummen Flächen . . 427
4. **Abschnitt. Quadratur und Rectification ebener Curven** . . . . . 437
   § 63. Quadratur ebener Curven . . . . . 437
   § 64. Näherungsweise Berechnung der Flächen und näherungsweise Berechnung des Wertes eines bestimmten Integrals . . . . . 448
   § 65. Rectification ebener Curven . . . . . 453
   § 66. Rectification unebener Curven . . . . . 464
5. **Abschnitt. Cubatur krummer Flächen** . . . . . 466
   § 67. Cubatur krummer Flächen durch einmalige Integration . . . . . 466
6. **Abschnitt. Complanation krummer Flächen** . . . . . 486
   § 68. Complanation krummer Flächen durch einmalige Integration . . . . . 486
7. **Abschnitt. Cubatur und Complanation krummer Flächen in ganz allgemeinen Fällen** . . . . . 499
   § 69. Unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten . . . . . 499
   § 70. Bei Voraussetzung gemischter Coordinaten . . . . . 506
   § 71. Bei Voraussetzung von Polarcoordinaten . . . . . 511

## III. Theil.

## Differentialgleichungen.

§ 72. Grundbegriffe . . . . . 518

1. **Abschnitt. Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung.**
   § 73. Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung und vollständiger Form . . . . . 532
   § 74. Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung durch Trennung der Variablen . . . . . 541
   § 75. Integration der homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung . . 548
   § 76. Integration der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung . . . 555

Seite

§ 77. Differentialgleichungen erster Ordnung höheren Grades . . . . . 561
§ 78. Singuläre Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung . . . 564
§ 79. Anwendung der Differentialgleichungen erster Ordnung auf das Problem der Trajectorien und Evolventen . . . . . 569

**2. Abschnitt. Integration der Differentialgleichungen zweiter Ordnung** . 572

§ 80. Integration der einfachen Formen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . . 572
§ 81. Integration linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . . 587

**3. Abschnitt.**

§ 82. Einige einfache Fälle der Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung . . . . . 600

---

## Berichtigungen.

Seite 20, Fig. 2. Statt auf DE soll $y_3$ auf der Strecke EB stehen.
» 50, Zeile 2 von unten und in der ersten Gleichung der letzten Zeile soll stehen $z^p$ statt z.
» 62, in Beispiel 6. Statt y'' soll stehen y''''.
» 135, in der Formel (105. Statt + soll stehen —.
» 136, Zeile 7. Statt $\sqrt{1-\sin^n u}$ soll stehen $\sqrt{1-\sin^2 u}$.
» 145, » 3. Statt arc tang soll stehen $\text{arc tang}\frac{x}{a}$.
» 160, » 11. Statt Höhe $\xi$ soll stehen Höhe $f(\xi)$.
» 169. Gleichung ($\beta$. Im dritten Integral statt der oberen Grenze x soll stehen $x_2$.
» 202, Zeile 12. Statt $\text{arc tang}\frac{1}{2}$ soll stehen $\text{arc tang}\frac{1}{7}$.
» 202, » 14. Statt $\frac{\text{tang}\,2u+\text{tang}\,v}{1-\text{tang}\,2u+\text{tang}\,v}$ soll stehen $\frac{\text{tang}\,2u+\text{tang}\,v}{1-\text{tang}\,2u\,.\,\text{tang}\,v}$.
» 215, » 2 von unten. Statt $\psi'(a)$ soll stehen $\psi''(a)$.
» 227, » 8 und 11 von unten. Statt $e^{(2k\pi+x)}$ soll stehen $e^{i(2k\pi+x)}$.
» 252, » 14. Statt x soll überall stehen y.
» 267, » 3. Statt $(x-3)$ soll stehen $(x+3)$.
» 292, » 8. Statt § 43 soll stehen § 44.
» 302, » 3 von unten. Statt $\sqrt{c^2+r^2\,2\,c\,r\cos\varphi}$ soll stehen $\sqrt{c^2+r^2-2\,c\,r\cos\varphi}$.
» 329, » 1. Statt $r_1$ soll stehen r'.
» 331, » 18 von unten ist nach $\frac{r^2}{r'}$ ein Gleichheitszeichen zu setzen.

# EINLEITUNG.

## Begriff der Constanten, der Variablen und der Function.

1. Eine Größe, welche im Verlaufe einer Untersuchung stets denselben Wert beibehält, heißt constante Größe, oder kurz Constante; eine Größe dagegen, welche befähigt ist, im Verlaufe derselben Untersuchung mehrere bestimmte Werte anzunehmen, wird variable (veränderliche) Größe, oder kurz Variable (Veränderliche) genannt.

Je nach dem Zwecke der analytischen Untersuchung kann dieselbe Größe einmal den Charakter einer Constanten, ein andermal jenen einer Variablen annehmen.

Wie allgemein üblich, werden die Constanten mit den ersten Buchstaben, die Variablen mit den letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet.

2. Ist eine Variable y von einer anderen Variablen x derart abhängig, dass zu jedem bestimmten Werte des x ein oder mehrere bestimmte Werte des y gehören, so nennt man y eine Function von x, und deutet dies, wenn die Abhängigkeit nicht näher ausgedrückt wird, symbolisch durch:

$$y = f(x),\ y = \varphi(x) \text{ oder } y = \psi(x) \text{ etc.}$$

an.

Das Gesetz der Abhängigkeit der Variablen von einander kann auf verschiedene Art gegeben sein, lässt sich aber zumeist durch eine Gleichung zwischen diesen Variablen ausdrücken.

So ist beispielsweise der Flächeninhalt eines Kreises eine Function seines Radius. Bezeichnet man den Flächeninhalt mit u, den Radius mit x, so kann die Abhängigkeit dieser zwei Größen durch eine Gleichung ausgedrückt werden, nämlich:

$$u = x^2 \pi.$$

Die Geschwindigkeit v eines fallenden Körpers ist eine Function der Fallzeit t. Die Abhängigkeit dieser beiden Größen wird durch die bekannte Gleichung:

$$v = g\,t$$

ausgedrückt etc.

3. Einer Gleichung zwischen zwei Variablen genügen im allgemeinen unendlich viele zusammengehörige Wertesysteme der letzteren. Man erhält diese Wertesysteme bekanntlich in der Weise, dass man einer dieser Variablen nach und nach alle Werte beilegt, derer sie fähig ist, und zu jedem dieser Werte die zugehörigen Werte der anderen Variablen aus der Gleichung ermittelt.

Dieser Vorgang charakterisiert deutlich das verschiedene Verhalten der beiden Variablen.

Während nämlich die eine, ganz unabhängig von einer anderen. alle Werte, derer sie fähig ist, nacheinander durchläuft, nimmt die andere Variable nur solche Werte an, welche zufolge der gegebenen Bedingung (Gleichung) den Werten der ersteren entsprechen.

Die Variable, welche ihre Werte unabhängig von einer anderen durchläuft (deren Werte man beliebig annimmt), nennt man die unabhängige oder absolute Variable, die andere dagegen abhängige oder relative Variable oder Function der ersteren.

Betrachtet man beispielsweise in der Gleichung

$$y - 2x + 1 = 0$$

x als die unabhängige Variable und lässt dieselbe nacheinander die Werte $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$ annehmen, so nimmt hiebei die abhängige Variable y die Werte $y = 1, 3, 5, 7, \ldots$ an.

Mit demselben Rechte, mit welchem x zur unabhängigen Variablen gewählt wurde, kann auch y als unabhängig variabel angesehen werden. in welchem Falle x zur abhängigen Variablen, d. h. zur Function von y wird.

Durch eine Gleichung zwischen zwei Variablen wird also jede derselben als Function der anderen dargestellt, d. h. ist y eine Function von x, so ist auch x eine Function von y.

4. Ist eine Gleichung zwischen den n Variablen u, x, y, z, ... gegeben, welche in der auf Null gebrachten Form symbolisch durch:

$$F(u, x, y, z, \ldots) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1$$

zeichnet werden soll, so kann jede dieser Variablen als Function

der übrigen dargestellt werden. Denn man erhält durch Auflösen nach u beispielsweise

$$u = f(x, y, z, \ldots), \quad \ldots \quad (2$$

also u als Function der Variablen x, y, z, ...

In ganz analoger Weise könnte man durch Auflösen der Gleichung 1 nach x, y oder z (natürlich wird von der Ausführbarkeit der Auflösung abgesehen) x, y oder z als Functionen der anderen Variablen darstellen.

Nachdem die Gleichung 2 eine Folge der Gleichung 1 ist, so drücken beide Gleichungen dieselbe Abhängigkeit der n Variablen u, x, y, z, ... aus, stellen also beide u als Function der n — 1 Variablen x, y, z, ... dar, nur in verschiedener Form.

Die zwei verschiedenen Formen 1 und 2 geben Veranlassung zur Unterscheidung der Functionen in entwickelte (explicite) und unentwickelte (implicite) Functionen.

Erscheint nämlich die Gleichung, welche die Abhängigkeit der Variablen ausdrückt, in Bezug auf die abhängige Variable aufgelöst wie 2), so sagt man, die abhängige Variable u ist als Function der Variablen x, y, z, ... entwickelt (explicit) gegeben, oder kurz, u sei eine entwickelte (explicite) Function der Variablen x, y, z, ...

Ist hingegen die, die Abhängigkeit der Variablen darstellende Gleichung nicht aufgelöst (wie 1), so stellt sie wohl auch u als Function der Variablen x, y, z, ... dar, aber in unentwickelter (impliciter) Form, und man nennt schlechtweg u eine unentwickelte (implicite) Function der Variablen x, y, z, ....

Sind speciell die Variablen x, y, z, ... von einander ganz unabhängig und n an der Zahl, so sagt man, u sei eine Function von n unabhängigen Variablen.

Häufig sind die n Variablen x, y, z, ... nicht von einander unabhängig, sondern Functionen einer Variablen t, so dass:

$$x = \varphi_1(t), \; y = \varphi_2(t), \; z = \varphi_3(t) \ldots$$

ist. In diesem Falle ist

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

eine Function der n Functionen

$$\varphi_i(t); \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n,$$

also schließlich eine Function der unabhängigen Variablen t.

Anmerkung: Bezüglich der Functionszeichen F, $f$, $\Phi$, $\varphi$, $\Psi$, $\psi$ etc. sei bemerk' Erhalten zwei Functionen, welche von denselben Variablen abhängen, verschied

Functionszeichen, oder bei gleichem Functionszeichen verschiedene Indices, so deutet das darauf hin, dass sie verschieden gebaut sind oder verschiedene Formen haben. Man pflegt gewöhnlich entwickelte Functionen mit kleinen, unentwickelte mit großen Buchstaben als Functionszeichen anzudeuten.

5. Mit Rücksicht darauf, dass es möglich ist, einzelne Gesetze und Beziehungen aufzustellen, welche für ganze Gruppen von Functionen Geltung haben, werden in der Analysis die Functionen von verschiedenen Gesichtspunkten in Gruppen eingetheilt.

Am wesentlichsten ist die Eintheilung nach der Art der Zusammensetzung der Functionen und nach der Zahl der Variablen, welche sie enthalten.

Nach der Art der Zusammensetzung theilt man die Functionen ein, in algebraische und transcendente Functionen.

Ist die Abhängigkeit der Variablen derart, dass die dieselbe ausdrückende Gleichung algebraisch ist, d. h. die in derselben enthaltenen Variablen nur den gewöhnlichen algebraischen Operationen unterworfen sind, zu welchen das Addieren, Multiplicieren, Subtrahieren, Dividieren und Potenzieren mit constanten (ganzen oder gebrochenen) Exponenten gehört, so nennt man die Function algebraisch.

Functionen welche nicht algebraisch sind, also Logarithmen, trigonometrische Functionen der Variablen oder Potenzen mit variablen Potenzexponenten enthalten, werden transcendent genannt.

So wird beispielsweise durch jede der Gleichungen:

$$z = 3x^2 - 5\sqrt[3]{x} + x^3\sqrt{x^5}$$

$$z = \frac{5x^3 + 7xy - 11y^2}{3x - 2y} + 12y^3 - 3$$

$$x^2y^3z^4 - 3xyz^2 + (x - 2y)y^2 - 16 = 0$$

z als algebraische Function, durch jede der Gleichungen:

$$z = \operatorname{tang} x + x^n - l.x$$

$$z - \operatorname{tang} x = c^x - \sin x + 3\sqrt{x}$$

$$z^x + z(\cos x - \sin y) + y^2x^3 - xl.y + a = 0,$$

dagegen als eine transcendente Function von x, beziehungsweise x und y definiert.

Die algebraischen Functionen theilt man wieder ein in rationale und irrationale und die rationalen wieder in rationale ganze und in rationale gebrochene Functionen.

Eine Function ist rational, wenn in der. die Abhängigkeit der Variablen ausdrückenden Gleichung die Variablen keine gebrochenen

Potenzexponenten aufweisen, d. h. keine der Variablen unter einem Wurzelzeichen steht und selbst dann unter kein Wurzelzeichen gelangt, wenn die Gleichung nach der abhängigen Variablen aufgelöst wird.

Treten hingegen in einer Function die Variablen in Potenzen mit gebrochenen Potenzexponenten auf, d. h. stehen einzelne Variable unter Wurzelzeichen, so nennt man die Function irrational.

Erhält eine rationale Function in den Nennern von Brüchen keine Variablen, so wird sie rational ganz, sonst rational gebrochen genannt.

So wird beispielsweise durch die Gleichungen:

$$y = 3x^5 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{7}$$

$$y = a x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \quad \text{(n positive ganze Zahl)}$$

$$y = \frac{a x^3 - b x + c}{m x^2 - n}$$

$$y = \frac{a}{x} + \frac{b x^2 - c x + d}{m x + n} - x^3$$

y als rationale Function von x, und zwar durch die zwei ersten als rationale ganze, durch die zwei letzten als rational gebrochene Function definiert; die Gleichungen hingegen:

$$y = \sqrt[3]{a x^3 + b x^2 + c x + d} = (a x^3 + b x^2 + c x + d)^{\frac{1}{3}}$$

$$y = \sqrt[3]{a^3 x^2} + \sqrt{b^2 x} = a x^{\frac{2}{3}} + b x^{\frac{1}{2}}$$

definieren y als irrationale Function von x.

Besonders ausgezeichnet sind die homogenen Functionen, nämlich solche, deren Glieder nur Ausdrücke derselben Dimension enthalten.

Die Dimension eines Ausdruckes wird durch die Summe der Potenzexponenten aller in demselben enthaltenen Variablen bestimmt. Das Glied von der höchsten Dimension bestimmt durch diese den Grad der Function.

So ist beispielsweise durch die Gleichung:

$$z = y^4 + A x^3 y + B x^2 y^2 + C x y^3 + D y^4$$

z als homogene Function des 4. Grades von x und y gegeben; die Gleichung:

$$z = y^4 + A x y^2 + B x^2 y + C x y + D$$

definiert wohl auch z als Function des 4. Grades von x und y, diese Function ist aber nicht homogen.

Die Bedeutung der charakteristischen Eigenschaft der homogenen Functionen werden die folgenden Untersuchungen zeigen, weshalb auf eine nähere Erörterung an dieser Stelle nicht eingegangen wird.

Beachtenswert erscheinen auch die symmetrischen und periodischen Functionen.

Eine Function einer Variablen ist symmetrisch, wenn sie so gebaut ist, dass sie ihren Functionswert nicht verändert, wenn man der Variablen den entgegengesetzt gleichen Wert ertheilt; eine symmetrische Function mehrerer Variablen ändert den Wert nicht, wenn man die Variablen derselben vertauscht.

Die Gleichungen:

$$y = c^{-x^2}$$

$$y = z^x + x^z$$

stellen y als symmetrische Function von x, beziehungsweise x und z vor.

Periodische Functionen nennt man solche, welche mit regelmäßiger Wiederholung denselben Wert annehmen, während die unabhängige Variable ihre Werte nacheinander durchläuft.

In diese Gruppe gehören alle trigonometrischen Functionen, denn es ist bekanntlich:

$$\sin x = \sin(2n\pi + x),\ \cos x = \cos(2n\pi + x) \text{ etc.}$$

Bezüglich der Eintheilung der Functionen nach der Zahl der Variablen ist kaum eine Bemerkung nothwendig. Man unterscheidet Functionen von ein, zwei, drei, ... n Variablen.

6. Die Analysis hat zum Gegenstande die Untersuchung der Beziehungen variabler Größen zu einander, also die Theorie der Functionen.

Man spricht von niederer oder höherer Analysis, je nachdem man nur die algebraischen und elementaren Functionen mit Zuhilfenahme der Algebra untersucht, oder aber alle Functionen bei Anwendung der Lehre von den Grenzen und der sogenannten Infinitesimalrechnung in den Kreis der Betrachtungen zieht.

## Begriff der Grenze.

7. Wenn eine Variable x alle Werte, derer sie fähig ist, nacheinander durchläuft, hiebei die Differenz zwischen derselben und einer bestimmten Constanten a — absolut genommen — kleiner wird als eine beliebig klein festgesetzte Zahl $\delta$

und auch fortan kleiner bleibt, ohne jemals Null zu werden, so bezeichnet man diese Constante a als den Grenzwert der Variablen x.

Diese Definition schreibt man symbolisch wie folgt:

$$\text{wird } |x-a|<\delta, \text{ so ist } \lim x = a;^{*})$$

sie drückt aus, dass sich die Variable x mit ihrem Werte der Constanten a immer mehr und mehr nähert, so dass schließlich der Unterschied zwischen x und a beliebig klein wird.

Eine Variable kann sich ihrer Grenze auf verschiedene Weise nähern, und zwar durch beständiges Wachsen, durch beständiges Abnehmen oder durch Osculieren. Im ersten Falle bleibt sie immer kleiner, im zweiten bleibt sie größer als ihr Grenzwert, und im dritten Falle wird sie bald größer bald kleiner als die Grenze, der sie sich nähert.

So z. B. nähert sich eine Variable x, welche der Werte:

$$1-\frac{1}{2},\quad 1-\frac{1}{3},\quad 1-\frac{1}{4},\quad 1-\frac{1}{5}\ldots$$

fähig ist, der Grenze 1 durch Wachsen; die Variable x, welche die Werte:

$$1+\frac{1}{2},\quad 1+\frac{1}{3},\quad 1+\frac{1}{4},\quad 1+\frac{1}{5}\ldots$$

annehmen kann, derselben Grenze durch Abnehmen und schließlich die der Werte:

$$1+\frac{1}{2},\quad 1-\frac{1}{3},\quad 1+\frac{1}{4},\quad 1-\frac{1}{5}\ldots$$

fähige Variable osculiert um ihren Grenzwert 1.

In allen drei Fällen ist $\lim x = 1$, nur wird dieser Grenzwert auf verschiedene Weise erreicht.

Diese Beispiele lassen deutlich erkennen, dass unter dem Grenzwerte einer Variablen eine bestimmte feste Größe verstanden wird, welcher sich der Wert der Variablen continuirlich nähert, ohne sie eigentlich jemals zu erreichen.

Häufig spricht man auch von einer Grenze dann, wenn die Variable beim Durchlaufen ihrer Werte größer wird und bleibt, als eine beliebig groß gedachte Zahl k. Man sagt dann schlechtweg, ihr Grenzwert sei unendlich und schreibt symbolisch:

$$|x|>k \quad \lim x = \infty.$$

*) Die Bezeichnung lim ist eine Abkürzung von limes = Grenze.

Dies ist keine Grenze im eigentlichen Sinne des Wortes, denn die Variable wächst eben ins Unbegrenzte.

Bleibt eine derartige, unbeschränkt wachsende Größe von einer Stelle an constant positiv, so sagt man ihr Grenzwert sei positiv unendlich ($\lim x = +\infty$), bleibt sie von einer Stelle an beständig negativ. dann bezeichnet man ihre Grenze als negativ unendlich ($\lim x = -\infty$), und wechselt sie beständig ihr Vorzeichen, so ist auch das Vorzeichen des Grenzwertes unentschieden, was durch $\lim x = \pm\infty$ angedeutet wird.

Selbstverständlich kann es vorkommen, dass sich eine Variable beim Durchlaufen aller ihrer Werte weder einer eigentlichen Grenze nähert, noch unendlich wird, dann hat sie einen unbestimmten Grenzwert.

8. Ist y eine Function der Variablen x, und nähert sich x beim Durchlaufen seiner Werte der festen Grenze a, so nimmt hiebei auch y alle Werte nacheinander an, welche der gegebenen Bedingung entsprechen und nähert sich hiebei im allgemeinen auch einem Grenzwerte b, was man symbolisch durch

$$\lim_{x=a} y = b$$

auszudrücken pflegt, statt richtiger zu schreiben $\lim_{\text{für } \lim x=a} y = b$.

Ist z. B.:

$$y = (x-a)\sin\frac{1}{x-a},$$

so ist

$$\lim_{x=a} y = 0,$$

weil für $x = a$ der erste Factor verschwindet, der zweite aber als Sinus unbedingt endlich bleibt.

Für

$$y = \frac{1}{(x-a)\sin\frac{1}{x-a}}$$

ist

$$\lim_{x=a} y = \pm\infty.$$

Das Vorzeichen ist unbestimmt, weil der Sinus periodisch das Vorzeichen wechselt.

$$y = \frac{\sin x}{x}; \quad \lim_{x=\pm\infty} y = \frac{\text{endliche Größe}}{\infty} = 0.$$

$$y = \sin\frac{1}{x}; \quad \lim_{x=0} y = ?$$

unbestimmt und liegt zwischen $-1$ und $+1$.

Die Flächen und Umfänge der einem Kreise eingeschriebenen und umschriebenen Polygone nähern sich mit dem Wachsen der Zahl der Polygonseiten, ihren Grenzwerten: der Kreisfläche, beziehungsweise dem Kreisumfange, und zwar bei den eingeschriebenen Polygonen durch Wachsen, bei den umschriebenen durch Abnehmen.

Der Näherungsbruch eines Kettenbruches osculiert um seine Grenze.

Einzelne Functionen zeigen die Eigenthümlichkeit, dass ihre Functionswerte sich verschiedenen Grenzen nähern, wenn die unabhängige Variable gegen eine und dieselbe Grenze einmal durch Wachsen, das anderemal durch Abnehmen convergiert. Bei solchen Functionen müssen natürlich die beiden Grenzwerte speciell unterschieden werden, was dadurch zu geschehen pflegt, dass man den durch Wachsen der unabhängigen Variablen erhaltenen als linksgenommenen Grenzwert der Function bezeichnet, und den durch Abnehmen der unabhängigen Variablen erreichten den rechtsgenommenen Grenzwert nennt. In der symbolischen Zeichensprache unterscheidet man diese beiden Grenzwerte durch Hinzufügen von $-0$, beziehungsweise $+0$ an die Grenzwerte der unabhängigen Variablen.

Demnach drückt das Symbol

$$\lim_{x=a-0} y = b$$

aus, dass b der linksgenommene Grenzwert der abhängigen Variablen y für $\lim x = a$ ist, oder, dass sich der Wert von y der Grösse b nähert, wenn x gegen seinen Grenzwert a wächst. Das Symbol

$$\lim_{x=a+0} y = b'$$

bezeichnet b' als rechtsgenommenen Grenzwert von y für $x = a$, oder als den Grenzwert von y, wenn x gegen seine Grenze a abnimmt.

Eine derartige Function ist z. B.:

$$y = c^{\frac{1}{x}} \qquad (c > 1).$$

Ihr Grenzwert wird, wenn x vom Positiven gegen 0 abnimmt, positiv unendlich, hingegen Null, wenn x vom Negativen gegen Null wächst.

Der früher angeführten Bezeichnung entsprechend, wird man also schreiben:

$$\lim_{x=0-0} c^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x=0+0} c^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist leicht einzusehen. Nähert sich nämlich x dem Grenzwerte Null durch Abnehmen, so ist es wesentlich positiv, also

$$\lim_{x=0+0} c^{\frac{1}{x}} = c^{\frac{1}{0}} = c^{+\infty} = +\infty;$$

nähert sich hingegen x der Grenze Null durch Wachsen, so muss es wesentlich negativ sein, setzt man also $x = -z$, so ist z eine wesentlich positive Größe, welche mit x gleichzeitig verschwindet, und man findet

$$\lim_{x=0-0} c^{\frac{1}{x}} = \lim_{z=0+0} c^{-\frac{1}{z}} = \lim_{z=0+0} \frac{1}{c^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Aus den beiden letzten Grenzwerten folgt unmittelbar

$$\lim_{x=0+0} \frac{1}{1 - c^{\frac{1}{x}}} = 0$$

$$\lim_{x=0-0} \frac{1}{1 - c^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

9. Zur Bestimmung der Grenzwerte von Functionen in complicierteren Fällen ist es häufig nothwendig, die Functionen so umzuformen, dass ihre Grenzwerte entweder direct erkannt, oder mittelst anderer bereits bekannter Grenzwerte bestimmt werden können.

So ist beispielsweise der Grenzwert

$$\lim_{x=\infty} \frac{a + b x}{c + d x}$$

scheinbar unbestimmt, nämlich $\frac{\infty}{\infty}$; die einfache Transformation durch Division des Zählers und Nenners mit x zeigt aber sofort, dass der gesuchte Grenzwert ganz bestimmt, und zwar $\frac{b}{d}$ ist.

$$\lim_{x=\infty} \frac{a + b x}{c + d x} = \lim_{x=\infty} \frac{\frac{a}{x} + b}{\frac{c}{x} + d} = \frac{\frac{a}{\infty} + b}{\frac{c}{\infty} + d} = \frac{b}{d}.$$

Die Function

$$\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$$

hat für $x = a$ scheinbar den Wert $\frac{0}{0}$, bringt man sie jedoch auf die Form

$$\frac{(x - a)(x^2 + a x + a^2)}{(x - a)(x + a)} = \frac{x^2 + a x + a^2}{x + a};$$

so findet man

$$\lim_{x=a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = \lim_{x=a} \frac{x^2 + a\,x + a^2}{x + a} = \frac{3\,a}{2}$$

u. s. w.

10. Häufig kann der Grenzwert einer Function durch Anwendung des folgenden einfachen Satzes gefunden werden:

Liegt der Wert der Function $f(x)$ für alle innerhalb eines bestimmten Bereiches gelegenen Werte des x, beständig zwischen den Werten zweier anderer Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, d. h. ist für alle, innerhalb eines Wertbereiches gelegenen Werte des x

$$\varphi(x) > f(x) > \psi(x), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha$$

und ist für einen Wert $x = a$ aus diesem Wertbereich

$$\lim_{x=a} \varphi(x) = \lim_{x=a} \psi(x) = b, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta$$

so ist auch

$$\lim_{x=a} f(x) = b.$$

Der Nachweis dieses Satzes bereitet keine Schwierigkeit. Wegen der Beziehung ($\alpha$ besteht die Gleichung

$$f(x) = \varphi(x) + \varepsilon\,[\psi(x) - \varphi(x)],$$

in welcher $\varepsilon$ einen echten Bruch bedeutet $(1 > \varepsilon > 0)$.

Aus dieser Gleichung folgt durch Übergang auf die Grenze, für $x = a$

$$\lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a} \{\varphi(x) + \varepsilon\,[\psi(x) - \varphi(x)]\} = \lim_{x=a} \varphi(x) + \varepsilon \left[\lim_{x=a} \psi(x) - \right.$$

$$\left. - \lim_{x=a} \varphi(x)\right],$$

also mit Rücksicht auf die Annahme ($\beta$

$$\lim_{x=a} f(x) = b.$$

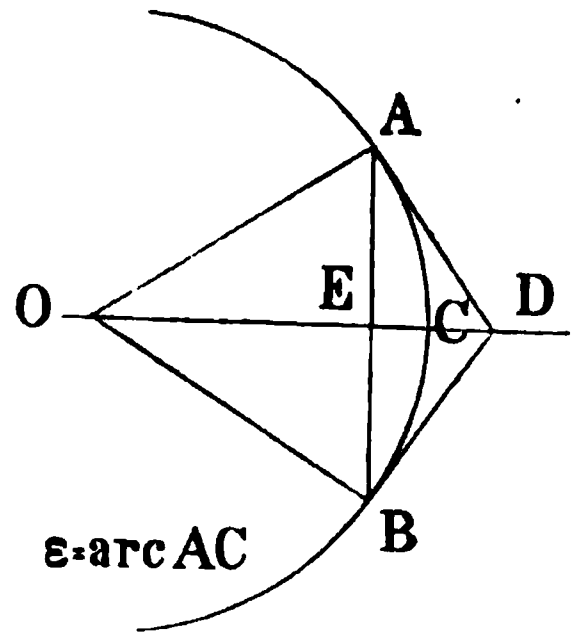
Anmerkung: Bei dieser Beweisführung wurde die häufig unter die Sätze über Grenzen eingereihte Thatsache benützt, dass der Grenzwert einer Summe von Functionen gleich ist der Summe ihrer Grenzwerte. Diesbezüglich sei also bemerkt, dass, nachdem die Grenzwerte nur specielle Functionswerte sind, es klar ist, dass die mit Functionen auszuführenden Operationen den Grenzwert einer einzelnen einerseits nicht alterieren können, anderseits aber an den Grenzwerten selbst auch auszuführen sind.

Als Beispiel für eine Anwendung des angeführten Satzes sei die Bestimmung der Grenze der Function

$$\frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon}$$

für $\lim \varepsilon = 0$, also für einen unendlich klein werdenden Bogen angeführt.

Fig. 1.




Aus Fig. 1 ist zu ersehen, dass

$$AD + DB > \text{arc } ACB > AB,$$

d. h.

$$2 \operatorname{tang} \varepsilon > 2\varepsilon > 2 \sin \varepsilon.$$

Aus dieser Ungleichheit folgt durch Division mit $2 \sin \varepsilon$

$$\frac{1}{\cos \varepsilon} > \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} > 1.$$

Nun ist aber $\lim_{\varepsilon = 0} \frac{1}{\cos \varepsilon} = 1$ und $\lim 1 = 1$, demnach ist auch zufolge des angeführten Satzes

$$\lim_{\varepsilon = 0} \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

11. Im nachfolgenden soll noch der Grenzwert der Function

$$f(m) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

für ein ins Unendliche wachsendes m ermittelt werden, welcher in der Analysis eine eminent wichtige Rolle spielt.

Zunächst sei m als positive ganze Zahl vorausgesetzt, welche Voraussetzung die Entwicklung der Function nach dem Binomialsatze zulässt:

$$f(m) = 1 + \binom{m}{1}\frac{1}{m} + \binom{m}{2}\frac{1}{m^2} + \binom{m}{3}\frac{1}{m^3} + \ldots + \binom{m}{k}\frac{1}{m^k} + \ldots$$

$$\ldots + \binom{m}{m}\frac{1}{m^m},$$

$$f(m) = 1 + m\,\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2!}\,\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\,\frac{1}{m^3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(k-1)]}{k!}\,\frac{1}{m^k} + \ldots,$$

$$f(m) = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{m}\right) + \ldots$$

Bezeichnet man die aufeinander folgenden Glieder der Reihe der Kürze wegen mit $u_0, u_1, u_2 \ldots u_k, u_{k+1} \ldots u_m$, so besteht die Gleichung:

$$f(m) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_k + u_{k+1} + \ldots + u_{m-1}, \quad . \quad (\alpha$$

in welcher die $u_i$ folgende Bedeutungen haben:

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = 1$$

$$u_2 = \frac{1}{1.2}\left(1 - \frac{1}{m}\right),$$

$$u_3 = \frac{1}{1.2.3}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right),$$

. . . . . .

$$u_k = \frac{1}{1.2.3\ldots k}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{m}\right),$$

$$u_{k+1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(k+1)}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{m}\right)\left(1 - \frac{k}{m}\right).$$

. . . . . .

Mit dem Wachsen von m werden alle Glieder der Reihe vom dritten angefangen für sich numerisch größer, überdies nimmt auch die Zahl der Glieder zu, mithin wächst auch die Function $f(m)$, jedoch nicht ins Unendliche, sondern sie nähert sich hiebei einer endlichen Grenze, was auf einfache Weise gezeigt werden kann.

Die Klammerausdrücke der u Werte sind positive, echte Brüche. Jeder der Werte u enthält um einen solchen eingeklammerten Factor mehr als der vorhergehende, mithin ist das Product der Factoren in den Klammern bei jedem der Glieder u kleiner, als beim vorangehenden; also unbedingt

$$u_{k+1} < \frac{u_k}{k+1},^{*)}$$

---

*) $\frac{u_k}{k+1} = \frac{1}{1.2.3\ldots k.(k+1)}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{m}\right)$, mithin unterscheiden sich die Größen $\frac{u_k}{k+1}$ und $u_{k+1}$ nur dadurch, dass die letztere den Factor $\left(1 - \frac{k}{m}\right)$, welcher ein echter Bruch ist, mehr besitzt, mithin ist die

$$u_{k+2} < \frac{u_{k+1}}{k+2} < \frac{u_k}{(k+1)(k+2)} < \frac{u_k}{(k+1)^2},$$

$$u_{k+3} < \frac{u_{k+2}}{k+3} < \frac{u_k}{(k+1)^2(k+3)} < \frac{u_k}{(k+1)^3},$$

analog . . . . . .

$$u_m < \frac{u_k}{(k+1)^{m-k}}.$$

Addiert man diese Ungleichheiten, so findet man, dass:

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{m-1} + u_m < u_k \left\{ 1 + \frac{1}{k+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(k+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(k+1)^{m-k+1}} + \frac{1}{(k+1)^{m-k}} \right\},$$

und wenn man berücksichtigt, dass in der geschlungenen Klammer rechts eine geometrische Progression von der Form $1 + x + x^2 + + x^3 + \ldots$ (wobei x ein echter Bruch) steht, welche die Summe:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1 - \frac{1}{k+1}} = \frac{1}{\frac{k+1-1}{k+1}} = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k},$$

hat, so findet man:

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{m-1} + u_m < \left(1 + \frac{1}{k}\right) u_k.$$

Demzufolge besteht die Gleichung

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{m-1} + u_m = \left(1 + \frac{\Theta}{k}\right) u_k,$$

worin $\Theta$ einen echten Bruch bedeutet; durch die Substitution $\frac{\Theta}{k} = \omega$ ($\omega$ bedeutet ebenfalls einen echten Bruch) kann derselben die Form

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{m-1} + u_m = (1 + \omega)\, u_k; \quad 0 < \omega < 1$$

gegeben werden.

---

erste angeschriebene Ungleichheit richtig. Analog ist $u_{k+2} < \frac{u_{k+1}}{k+2}$ und $\frac{u_{k+1}}{k+2} < \frac{u_k}{(k+1)\,k+2)}$, weil zufolge $u_{k+1} < \frac{u_k}{k+1}$, $\frac{u_k}{k+1} > u_{k+1}$; schließlich ist aber auch $\frac{u_k}{(k+1)(k+2)} < \frac{u_k}{(k+1)^2} = \frac{u_k}{(k+1)\,(k+1)}$, weil $(k+2) > (k+1)$, mithin auch der Nenner $(k+1)(k+2)$ größer als $(k+1)^2$.

Führt man nun in der Gleichung ($\alpha$ für $f(m)$ den soeben gefundenen Wert aller, auf das $k^{te}$ folgenden Glieder ein, so übergeht sie in:

$$f(m) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{k-1} + (1+\omega)\, u_k,$$

oder. wenn man für die u die entsprechenden Werte setzt, in:

$$f(m) = 1 + 1 + \frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{1.2\ldots(k-1)}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k-2}{m}\right) +$$

$$+ \frac{1}{1.2\ldots k}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)[1+\omega].$$

Geht man nun auf die Grenze für $m = \infty$ über, so verschwinden alle in den Klammerfactoren enthaltenen Brüche, weil ihre Nenner unendlich werden, während die Zähler endliche Größen bleiben. Mithin ist:

$$\lim_{m=\infty} f(m) = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots \frac{1}{1.2\ldots(k-1)} +$$

$$+ \frac{1}{1.2\ldots k}[1+\omega].$$

Je größer k genommen wird, desto kleiner wird $\omega$, und desto genauer wird der Grenzwert dieser Function $f(m)$ erhalten, welcher in der Mathematik eine bedeutende Rolle spielt, und allgemein mit e bezeichnet wird.

Für $k = 16$ erhält man, e auf zehn Decimalstellen, genau:

$$e = 2{\cdot}7182818284.$$

Dass e größer sein muss wie 2, ist direct einzusehen, es muss aber auch kleiner sein wie 3, denn es ist offenbar

$$\lim_{m=\infty} f(m) < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \ldots,^{*})$$

also, weil die Summe der Reihe rechts vom Ungleichheitszeichen $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ (geometrische Progression), $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ ist:

---

*) Die Glieder der Reihe rechts sind nämlich vom 4. angefangen, alle größ als jene in der Reihe für $f(m)$, weil sie kleinere Nenner haben.

$$\lim_{m=\infty} f(m) < 1 + 2,$$

demnach

$$\lim_{m=\infty} f(m) < 3.$$

Die ausgeführte Grenzuntersuchung hatte zur Voraussetzung. dass m eine positive ganze Zahl ist; und es soll nun gezeigt werden. dass $f(m)$ denselben Grenzwert hat, wenn m ein unechter Bruch, oder eine wesentlich negative oder irrationale Zahl ist.

Ist m ein unechter Bruch oder eine irrationale Größe, so muss der Wert von m zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden ganzen Zahlen, beispielsweise k und $k+1$ liegen.

Da nun in diesem Falle

$$k + 1 > m > k,$$

so ist:

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} > \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k}.$$

Nun ist aber:

$$\lim_{k=\infty} \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k} = \lim_{k=\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1}}{\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)} = \frac{\lim_{k=\infty} \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1}}{\lim_{k=\infty} \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)} =$$

$$= \frac{e}{1} = e,$$

und

$$\lim_{k=\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} = \lim_{k=\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k} \left(1 + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \lim_{k=\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k} \cdot \lim_{k=\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = e \cdot 1 = e,$$

demnach mit Rücksicht auf den unter Pkt. 10 angeführten Satz auch

$$\lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} = e.$$

Ist m wesentlich negativ, dann kann $m = -(p+1)$ gesetzt werden, wobei dann p eine wesentlich positive Größe bedeutet.

Durch diese Substitution erhält man:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\left(1-\frac{1}{p+1}\right)^{-(p+1)}=\left(\frac{p}{p+1}\right)^{-(p+1)}=\left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1},$$

also

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Weil p wesentlich positiv ist, so ist

$$\lim_{p=\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\left(1+\frac{1}{p}\right)=e\,.\,1,$$

mithin auch

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4$$

Dieser Grenzwert e wurde zur Basis der natürlichen Logarithmen gewählt, welche bei allen rein wissenschaftlichen Untersuchungen ausschließlich angewendet werden.

**Anmerkung:** Aus der Gleichung

$$Y=a^y=e^\eta$$

folgt, wenn man den Logarithmus auf die Basis e mit $l\,Y$, jenen auf die Basis a mit $_a\,Y$ bezeichnet,

$$l\,Y=y\,l\,a=\eta\,l\,e,$$

$$\log_a Y=y\log_a a=\eta\log_a e.$$

Dividiert man und berücksichtigt, dass $l\,e=1$, $\log_a a=1$ ist, so erhält man:

$$\frac{l\,Y}{\log_a Y}=l\,a=\frac{1}{\log_a e},$$

oder

$$l\,Y=l\,a\log_a Y=\frac{1}{\log_a e}\log_a Y.$$

Diese Gleichungen ermöglichen den Übergang von Logarithmen auf die Basis a, zu Logarithmen auf die Basis e und umgekehrt.

Die Constante $\frac{1}{\log_a e}$ wird Modul des Logarithmensystems genannt.

## Das unendlich Kleine und das unendlich Große.

Nähert sich eine variable Größe der Grenze Null, d. h. wird ihr Wert dem absoluten Betrage nach kleiner und bleibt

auch fortan kleiner als eine beliebig klein festgesetzte positive Zahl $\delta$

$$|x| < \delta, \lim x = 0,$$

so sagt man, sie wird unendlich klein.

Mit Rücksicht auf diese Definition wird eine Variable x, welche der Reihe nach die Werte 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc. annehmen kann (weil sie Null zur Grenze hat), unendlich klein, ungeachtet dessen, dass sie, wie das Beispiel deutlich zeigt, auch endlicher Werte fähig ist.

Ist A der Grenzwert der Variablen x, so ist mit Bezug auf die Definition der Grenze die Differenz (x — A) eine unendlich kleine Größe.

Wächst der Wert einer Variablen x derart, dass er dem absoluten Betrage nach größer wird und bleibt als eine beliebig groß festgesetzte positive Zahl k

$$|x| > k, \lim x = \pm \infty,$$

so nennt man sie eine unendlich große Größe.

Das über den Begriff einer unendlich kleinen, beziehungsweise unendlich großen Größe Gesagte zeigt deutlich, dass unter diesen zwei Bezeichnungen keinesfalls bestimmte Größen zu verstehen sind, sondern. dass durch dieselben Processe charakterisiert werden, welchen die betreffenden Variablen unterworfen sind. Die Bezeichnungen unbeschränkt klein, beziehungsweise unbeschränkt groß werdende Größen würden bedeutend klarer diesen Process charakterisieren.

Wenn man also von unendlich kleinen oder unendlich großen Größen spricht, muss man sich stets dessen bewusst bleiben, dass man es eigentlich mit Größen zu thun hat. welche an der Grenze unbeschränkt klein, beziehungsweise unbeschränkt groß werden.

13. Nachdem bei den meisten Problemen der Analysis mehrere unendlich kleine Größen gleichzeitig auftreten, so wird es nothwendig. dieselben miteinander zu vergleichen. Um sich eine Basis für den Vergleich zu schaffen, wählt man eine beliebige dieser Größen zur Fundamentalgröße, bezeichnet diese als unendlich klein der 1. Ordnung, und kann dann ihr gegenüber die Ordnung der übrigen zumeist in Zahlenwerten angeben.

Zwei unendlich kleine Größen sind von derselben Ordnung, wenn ihr Quotient einen von 0 verschiedenen endlichen renzwert hat.

Ist beispielsweise $\varepsilon$ eine unendlich kleine Größe also $\lim \varepsilon = 0$, dann ist auch $\sqrt{1+\varepsilon} - \sqrt{1-\varepsilon}$ eine unendlich kleine Größe, weil jede der Wurzeln gegen 1, mithin ihre Differenz gegen 0 convergiert.

$\varepsilon$ sei unendlich klein von der 1. Ordnung; von welcher Ordnung ist $\sqrt{1+\varepsilon} - \sqrt{1-\varepsilon}$?

Der Quotient dieser unendlich kleinen Größen ist:

$$\frac{\sqrt{1+\varepsilon} - \sqrt{1-\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon\left[\sqrt{1+\varepsilon} + \sqrt{1-\varepsilon}\right]} = \frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon} + \sqrt{1-\varepsilon}},$$

also der Grenzwert dieses Quotienten:

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\sqrt{1+\varepsilon} - \sqrt{1-\varepsilon}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon} + \sqrt{1-\varepsilon}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Der Grenzwert des Quotienten ist eine endliche von Null verschiedene Größe, mithin sind beide angeführten Größen unendlich klein derselben Ordnung, d. h. $\sqrt{1+\varepsilon} - \sqrt{1-\varepsilon}$ ist unendlich klein von der 1. Ordnung.

Ebenso sind $\varepsilon$ und $\sin\varepsilon$ unendlich kleine Größen derselben Ordnung, wenn unter $\varepsilon$ ein unbeschränkt abnehmender Bogen verstanden wird, denn es ist zufolge der Gleichung (3

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon} = 1.$$

Convergiert der Quotient zweier unendlich kleinen Größen gegen die Grenze 0, so ist die Größe im Zähler von höherer Ordnung als jene im Nenner; convergiert er gegen die Grenze $\infty$, so ist die Größe im Nenner von höherer Ordnung als jene im Zähler.

Dies kann auch in folgender Weise ausgesprochen werden: Eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung ist verschwindend klein gegenüber einer niederer Ordnung.

Sind x und y zwei unendlich kleine Größen und wird x als unendlich klein von der 1. Ordnung angesehen, so ist y unendlich klein von der Ordnung n, wenn der Grenzwert des Quotienten $\frac{y}{x^n}$ gegen eine von 0 verschiedene endliche Größe k convergiert.

Ist

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x^n} = k,$$

so ist

$$\frac{y}{x^n} = k + \varepsilon,$$

wobei $\varepsilon$ mit x gleichzeitig verschwindet.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$y = x^n (k + \varepsilon) = k x^n + x^n \varepsilon,$$

und man nennt $k x^n$ den Hauptwert von y, und $x^n \varepsilon$ den secundären Theil. Der secundäre Theil ist dem Hauptwerte gegenüber verschwindend klein, obwohl der Hauptwert selbst unendlich klein ist, denn es ist:

$$\frac{y}{k x^n} = 1 + \frac{\varepsilon}{k},$$

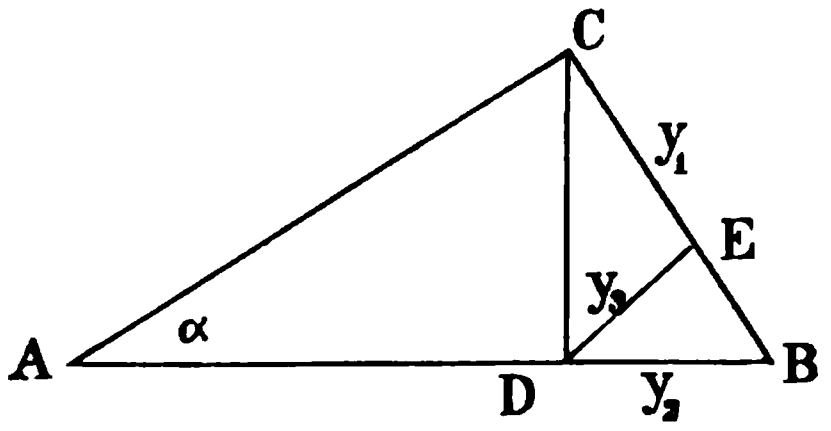
also, weil $\varepsilon$ mit x gleichzeitig verschwindet,

$$\lim_{x=0} \frac{y}{k x^n} = 1,$$

d. h. an der Grenze $y = k x^n$.

Demzufolge sagt man von zwei unendlich kleinen Größen (auch endlichen Größen), dass sie sich unendlich wenig voneinander unterscheiden, wenn ihr Quotient gegen 1 convergiert oder umgekehrt.

Fig. 2.




In einem bei C (Fig. 2) rechtwinkeligen Dreiecke sei der Winkel $\alpha$ eine unendlich kleine Größe. Ist dies der Fall, so sind auch die Größen $\sin\alpha$, $y_1$, $y_2$, $y_3$ unendlich klein.

Betrachtet man $\alpha$ als unendlich klein von der 1. Ordnung, so ist auch $\sin\alpha = x$ unendlich klein von der 1. Ordnung, was bereits nachgewiesen wurde.

Es sei:

$$CD \perp AB,\ DE \perp BC,$$

$$AB = k,\ CB = y_1,\ DB = y_2,\ DE = y_3$$

u. s. w.

$$y_1 = k \sin\alpha = k x$$

als Kathete, also

$$\frac{y_1}{x} = k,$$

demnach ist y ebenso eine unendlich kleine Größe der 1. Ordnung wie x.

Aus dem Dreiecke DBC folgt:

$$y_2 = y_1 \sin\alpha = y_1 x = k x^2,$$

also

$$\frac{y_2}{x^2} = k,$$

mithin ist $y_2$ unendlich klein von der 2. Ordnung; aus dem Dreiecke D B E erhält man:

$$\overline{E\,B} = y_3 = y_2 \sin\alpha = y_2\, x = k\, x^3,$$

oder

$$\frac{y_3}{x^3} = k,$$

woraus zu erkennen ist, dass $y_3$ unendlich klein der 3. Ordnung etc. ist.

Das Reciproke einer unendlich kleinen Größe ist eine unendlich große Größe, man kann also auch bei den unendlich großen Größen eine Unterscheidung nach Ordnungen vornehmen.

Ist x unendlich klein von der 1. Ordnung, so ist $\frac{1}{x}$ unendlich groß der 1. Ordnung und $\left(\frac{1}{x}\right)^n$ unendlich groß von der Ordnung n, was auch durch $x^{-n}$ ausgedrückt wird.

Man kann also die unendlich großen Größen als unendlich kleine Größen von negativen Ordnungszahlen bezeichnen. Die endlichen Größen wären dann unendlich klein, von der Ordnung Null.

Die Ordnungszahl kann auch eine gebrochene Zahl sein. Ist nämlich beispielsweise x unendlich klein der 1. Ordnung, dann ist $\sqrt{x}$ von der Ordnung $\frac{1}{2}$ und $\sqrt{\frac{1}{x}}$ unendlich groß von der Ordnung $\frac{1}{2}$ etc.

14. Der Grenzwert des Quotienten zweier unendlich kleinen Größen (auch endlichen Größen) ändert sich nicht, wenn man an ihre Stelle andere Größen setzt, welche mit ihnen Quotienten vom Grenzwerte 1 bilden.

Sind x, y, $\xi$ und $\eta$ vier unendlich kleine Größen, welche die Bedingungen

$$\lim \frac{x}{\xi} = 1,\ \lim \frac{y}{\eta} = 1,$$

oder was dasselbe ist, die Bedingungen

$$\frac{x}{\xi} = 1 + \varepsilon,\ \frac{y}{\eta} = 1 + \Theta$$

erfüllen, in welchen $\varepsilon$ und $\Theta$ gegen Null convergierende Größen bedeuten, so bestehen die Gleichungen:

$$x = \xi(1 + \varepsilon),$$

$$y = \eta(1 + \Theta).$$

Durch Division erhält man:

$$\frac{x}{y} = \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{1+\varepsilon}{1+\Theta},$$

und nach Übergang auf die Grenzen

$$\lim \frac{x}{y} = \lim \frac{\xi}{\eta} \frac{1+\varepsilon}{1+\Theta} = \lim \frac{\xi}{\eta} . \lim \frac{1+\varepsilon}{1+\Theta},$$

also weil hiebei $\varepsilon$ und $\Theta$ verschwinden,

$$\lim \frac{x}{y} = \lim \frac{\xi}{\eta},$$

wodurch der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Der Grenzwert einer Summe unendlich kleiner Größen (auch endlicher Größen) ändert sich nicht, wenn man statt dieser, solche Größen setzt, welche mit ihnen gegen 1 convergierende Quotienten bilden.

Es seien $x_1, x_2, x_3, \ldots x_i, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots y_i, \ldots$ unendlich kleine Größen, welche wie früher den Bedingungen

$$\frac{x_1}{y_1} = 1 + \varepsilon_1, \quad \frac{x_2}{y_2} = 1 + \varepsilon_2 \ldots, \quad \frac{x_i}{y_i} = 1 + \varepsilon_i \ldots$$

unterworfen sind, wobei die $\varepsilon_i$ gegen Null convergierende Größen bedeuten, so bestehen zwischen den Größen $x_i$, $y_i$ die Gleichungen:

$$x_1 = y_1 + y_1 \varepsilon_1, \quad x_2 = y_2 + y_2 \varepsilon_2, \ldots x_i = y_i + y_i \varepsilon_i \ldots$$

Durch Summierung erhält man:

$$x_1 + x_2 + x_3 + . + x_i + \ldots = y_1 + y_2 + y_3 \ldots + y_i + \ldots + \\ + y_1 \varepsilon_1 + y_2 \varepsilon_2 + \ldots + y_i \varepsilon_i +$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$\Sigma x_i = \Sigma y_i + \Sigma y_i \varepsilon_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha$$

Setzt man nun zunächst voraus, dass alle $x_i$ und $y_i$ dasselbe Vorzeichen haben, so kann man den ausgesprochenen Satz auf folgende Art einfach beweisen.

Unter den verschiedenen Größen $\varepsilon_i$ muss es eine algebraisch kleinste $\varepsilon_m$ und eine algebraisch größte $\varepsilon_M$ geben, so dass jeder der Werte $\varepsilon_i$ zwischen diesen zwei ausgezeichneten Werten liegt, also die Ungleichheiten bestehen:

$$\varepsilon_m < \varepsilon_1 < \varepsilon_M$$

$$\varepsilon_m < \varepsilon_2 < \varepsilon_M$$

. . . . .

$$\varepsilon_m < \varepsilon_i < \varepsilon_M$$

. . . . .

Multipliciert man die 1. dieser Ungleichheiten mit $y_1$, die 2. mit $y_2$ etc., die $i^{te}$ mit $y_i$ etc., und addiert sodann, so erhält man:

$$\varepsilon_m \Sigma y_i < \Sigma y_i \varepsilon_i < \varepsilon_M \Sigma y_i,$$

weshalb es nothwendig einen zwischen $\varepsilon_m$ und $\varepsilon_M$ liegenden Wert $\varepsilon$ geben muss, für welchen die Gleichung besteht:

$$\Sigma y_i \varepsilon_i = \varepsilon \Sigma y_i.$$

Durch Berücksichtigung dieser Gleichung übergeht ($\alpha$ in

$$\Sigma x_i = \Sigma y_i + \varepsilon \Sigma y_i,$$

woraus

$$\frac{\Sigma x_i}{\Sigma y_i} = 1 + \varepsilon$$

folgt.

Geht man zur Grenze über, so erhält man, weil hiebei $\varepsilon$ verschwindet,

$$\lim \frac{\Sigma x_i}{\Sigma y_i} = 1,$$

d. h.

$$\lim \Sigma x_i = \lim \Sigma y_i,$$

was behauptet wurde.

Der ausgesprochene Satz ist aber auch dann richtig, wenn die $x_i$ verschiedene Vorzeichen haben, denn trennt man sie in zwei Gruppen Gleichbezeichneter, so gilt der Satz für die Summe jeder der Gruppen, mithin auch für die Gesammtsumme.

Die beiden angeführten Sätze geben mit dem in Pkt. 13 ausgesprochenen Begriff des Hauptwertes und des secundären Theiles folgenden richtigen Grundsatz für das Rechnen mit unendlich kleinen Größen:

Der Grenzwert eines Quotienten oder einer Summe unendlich kleiner Größen ändert seinen Wert nicht, wenn diese Größen durch ihre Hauptwerte ersetzt werden.

## Begriff der Stetigkeit.

15. Eine Variable x ist in der Umgebung des Wertes a, den sie unter anderen annimmt, oder, wie man kurz zu sagen pflegt, an der Stelle a stetig oder continuierlich, wenn der absolute Betrag der Differenz $x - a$ kleiner gemacht werden kann als eine beliebig klein festgesetzte positive Zahl $\delta$.

$$|x - a| < \delta,$$

oder die Variable x ist an der Stelle a stetig, wenn sie nebst dem Werte a auch Werte annehmen kann, welche unendlich wenig kleiner und größer sind wie a.

Sind die dem Werte a zunächst gelegenen Werte der Variablen, welche sie annehmen kann, um eine endliche Größe von a verschieden. so ist die Variable an dieser Stelle a unstetig.

So ist beispielsweise x als Abstand der Punkte einer Geraden von einem angenommenen fixen Punkt in derselben eine durchaus stetige Variable; eine Variable dagegen, welche nur die Werte 1. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ annehmen kann, ist an keiner Stelle stetig.

Das Intervall, in welchem die Werte $a - \delta$ bis $a + \delta$ der Variablen liegen, pflegt man die Umgebung $\delta$ der Stelle a zu nennen; diese hat die Ausdehnung $2\delta$.

Eine auf dem Gebiete $x = \alpha$ bis $x = \beta$ gegebene, durchaus einwertige Function der Variablen x

$$y = f(x)$$

ist an der Stelle $x = a$ dieses Gebietes $(\alpha < a < \beta)$ stetig, wenn die Differenz

$$f(x) - f(a)$$

gleichzeitig mit der Differenz $x - a$ gegen 0 convergiert; d. h. wenn eine unendlich kleine Änderung des Wertes der unabhängigen Variablen nur eine unendlich kleine Änderung des Functionswertes hervorruft.

Diese Definition wird auch durch die Gleichung

$$\lim_{h=0} [f(a \pm h) - f(a)] = 0$$

deutlich und vortheilhaft ausgedrückt, welche sagt, dass der Functionswert den Grenzwert $f(a)$ erreicht, wenn sich die unabhängige Variable gleichgiltig auf welche Art, dem Werte a continuierlich nähert.

Verhält sich eine Function $f(x)$ an der Stelle a derart, dass eine unendlich kleine Änderung des Wertes von x eine endliche oder gar unendliche Änderung des Functionswertes hervorruft, so ist die Function an dieser Stelle unstetig.

Die am häufigsten vorkommenden Arten der Unstetigkeit sind die, dass die Function bei der Annäherung der unabhängigen Variablen an eine bestimmte Stelle unendlich groß wird und bleibt, oder den Sinn ganz verliert, weil sie für diese Stelle gar nicht definiert erscheint.

Wird eine Function an einer Stelle unendlich groß, so nennt man diese Stelle einen Unendlichkeitspunkt der Function. Wird die Function nur bei der Annäherung an diese Stelle von einer Seite unendlich, und erlangt bei der Annäherung an dieselbe Stelle von der anderen Seite einen endlichen Wert, so nennt man diese Stelle einen einseitigen Unendlichkeitspunkt.

So ist beispielsweise die Function:

$$y = \frac{1}{x - a}$$

stetig und negativ, so lange x kleiner ist wie a, sie wird aber, wenn sich x der Stelle a nähert $-\infty$ und überspringt von $-\infty$ auf $+\infty$, wenn x die Stelle a passiert. Die Function ist also an der Stelle a unstetig und hat hier einen Unendlichkeitspunkt.

Genau dasselbe Verhalten zeigt die Function $y = \operatorname{tg} x$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$.

Die Function $y = \sin \frac{1}{x}$ ist als Sinus im allgemeinen stetig, ist aber an der Stelle $x = 0$ gar nicht definiert, sie verliert an dieser Stelle ihren Sinn.

Die Function $y = a^{\frac{1}{x-c}}$, wobei $a > 1$, ist an der Stelle $x = c$ unstetig, denn setzt man $x_1 = c - h$ und $x_2 = c + h$, so ist $y_1 = a^{-\frac{1}{h}}$, $y_2 = a^{\frac{1}{h}}$, also $\lim_{x=c} y_1 = 0$ und $\lim_{x=c} y_2 = +\infty$.

Es ist also c ein einseitiger Unendlichkeitspunkt, die Function wird $+\infty$ bei der Annäherung an die Stelle c von rechts, convergiert aber bei der Annäherung von links an dieselbe Stelle gegen 0.

Ist die Function $y = f(x)$ an jeder Stelle des Intervalles $x = \alpha$ bis $x = \beta$, für welches sie definiert ist, stetig, so sagt man, sie sei im ganzen Intervall $\alpha\beta$ stetig.

Ist eine Function $f(x)$ im ganzen Intervall $\alpha\beta$ stetig und ist

$$f(\alpha) < 0; \quad f(\beta) > 0 \text{ oder } f(\alpha) > 0; \quad f(\beta) < 0,$$

so gibt es im Intervall $\alpha\beta$ mindestens einen Wert von x, für welchen $f(x)=0$ wird.

Dieser Satz folgt aus dem Begriff der Stetigkeit, denn jede stetige Function kann aus dem Negativen ins Positive nur durch die Null übergehen.

Ist eine Function $f(x)$ im ganzen Intervall $\alpha\beta$ stetig, so muss sie jeden Wert zwischen $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ mindestens einmal annehmen, wenn x alle Werte des Intervalls $\alpha\beta$ annimmt.

Dieser Satz bedarf als unmittelbare Folge des Begriffes der Stetigkeit keines Beweises.

# ERSTER THEIL.

# Differential- und Integralrechnung.

## 1. Abschnitt.

## Differentialrechnung.

**§ 1. Begriff des Differentialquotienten und des Differentials.** Die Differential- und die Integralrechnung verdanken ihre Entstehung einzelnen Problemen der Geometrie, und zwar insbesonders dem Tangentenproblem und der Quadratur.

In welcher Weise das Tangentenproblem zum Begriffe des Differentialquotienten führt, soll folgende Betrachtung zeigen, durch welche dieser Begriff deutlich zum Ausdrucke kommt.

Jede stetige Function $f(x)$ einer unabhängigen Variablen lässt sich geometrisch durch eine ebene Curve darstellen, und man nennt die Gleichung

$$y = f(x)$$

Gleichung dieser Curve. Umgekehrt kann jede gesetzmäßig verlaufende Curve analytisch durch eine Gleichung zwischen zwei Variablen $F(x, y) = 0$ dargestellt werden, aus welcher wieder $y = f(x)$ abgeleitet werden kann. (Siehe I. Band, 3. Theil.)

Es sei

$$y = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1$$

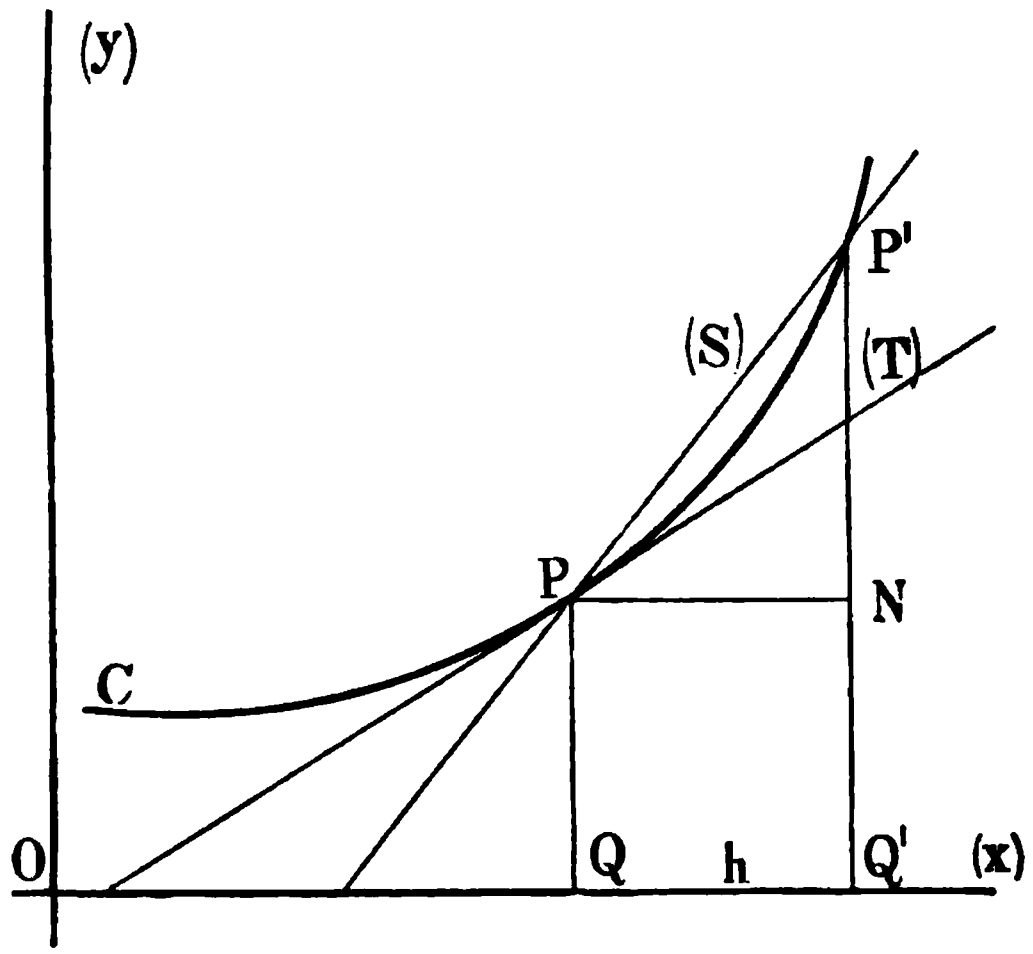
die Gleichung der in Fig. 3 gezeichneten Curve. Ein Punkt P dieser Curve habe die Abscisse $x = OQ$, also die Ordinate $QP = f(x)$; ein anderer Punkt P' die Abscisse $OQ' = OQ + QQ' = x + h$, mithin die Ordinate $Q'P' = f(x + h)$.

Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte P und P' ist eine Secante (S) der Curve, deren Richtung durch den Winkel $(xs)$ den sie mit der x-Axe einschließt, bestimmt wird.

Wie aus der Figur entnommen werden kann, ist

$$\text{tang}\,(x\,s) = \frac{N\,P'}{P\,N} = \frac{Q'\,P' - Q\,P}{Q\,Q'} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Fig. 3.




Rückt der Punkt P' immer näher und näher an P, d. h. wird h immer kleiner, so nähert sich die Lage der Secante (S) immer mehr der Lage der Tangente (T) im Punkte P der Curve, und es wird schließlich die Secante zur Tangente, wenn P' mit P zusammenfällt, d. h. $h = 0$ wird. Hiebei geht der Winkel $(x\,s)$ in $(x\,t)$; tang $(x\,s)$ in tang $(x\,t)$ über. Mithin ist tang $(x\,t)$ der Grenzwert von tang $(x\,s)$, also des Quotienten $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ für ein gegen 0 convergierendes h:

$$\text{tang}\,(x\,t) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Je größer die Änderung ist, welche der Functionswert durch einen bestimmten Zuwachs der unabhängigen Variablen erleidet, desto steiler ist die Curve, desto größer also der Winkel $(x\,t)$ den die Tangente an die Curve mit der Abscissenaxe einschließt.

Da nun die trigonometrische Tangente gleichzeitig mit dem Winkel zunimmt, so repräsentiert tang $(x\,t)$, somit

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

das natürliche Maß des Wachsthums der Function.

Mit Ausnahme des Falles, in welchem die Änderung des Functionswertes proportional ist der Änderung des Wertes der unabhängigen Variablen (Gerade), ändert sich auch das Maß des Wachsthums von Stelle zu Stelle, so dass also im allgemeinen

$$\text{tang}\,(x\,t) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

auch eine Function der Variablen x ist, welche man die abgeleitete oder derivierte Function oder kurz Ableitung von $f(x)$ nennt und mit $f'(x)$, $Df(x)$ oder y' bezeichnet.

$$\text{tang}\,(x\,t) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = y' \quad . \quad . \quad . \quad (2$$

Eine andere Bezeichnung, welche große Vortheile bietet, und allgemein angewendet wird, ergibt sich, wenn die Tangente an die Curve als Verbindungslinie zweier unmittelbar benachbarter Curvenpunkte definiert wird, deren Abstand unendlich klein ist..

Man gelangt vom Punkte P, zu seinem Nachbarpunkte P', wenn man x um eine unendlich kleine Größe zunehmen lässt.

Eine unendlich kleine Änderung einer Variablen nennt man ein Differential derselben, und bezeichnet es durch Voransetzen des Buchstabens d vor das Zeichen dieser Variablen.

Im vorliegenden Falle ändert man also x um d x (Differentiale x).

Dieser Bezeichnung entsprechend ist nun

$$\text{tang}\,(x\,t) = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx},$$

mithin ist der Bruch

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$$

gleichbedeutend mit dem Grenzwerte, welcher abgeleitete Function genannt wurde.

Die Änderung, welche in

$$y = f(x)$$

y erleidet, wenn x eine Änderung um d x erfährt, ist auch unendlich klein, weil $f(x)$ stetig vorausgesetzt wurde. Bezeichnet man dieselbe mit d y (Differentiale y), so erhält man

$$y + dy = f(x + dx),$$

oder

$$dy = f(x + dx) - y = f(x + dx) - f(x);$$

demnach

$$\text{tang}\,(x\,t) = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Das Verhältnis $\frac{dy}{dx}$ der unendlich kleinen Änderung des Functionswertes zu der dieselbe hervorrufenden unendlich kleinen Änderung der unabhängigen Variablen wird Differentialquotient (Differentialverhältnis) genannt.

Der Differentialquotient kann in der Rechnung wie ein gewöhnlicher Bruch behandelt werden, doch ist stets im Gedächtnis zu behalten, dass Zähler und Nenner Größen sind, die unbeschränkt nahe der Null gedacht werden.

Nach dem Vorigen hat der Differentialquotient denselben Wert wie die abgeleitete Function:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

und daraus folgt

$$dy = f'(x)\,dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4$$

eine Gleichung, die jedoch nur als annähernd richtig bezeichnet werden kann.

Aus der streng richtigen Gleichung (2 folgt nämlich

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

wobei $\varepsilon$ gleichzeitig mit h gegen 0 convergiert; demnach ist

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + h\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5$$

Bezeichnet man nun den unendlich kleinen Zuwachs h des x, wie bereits durchgeführt mit dx, so erhält man die correcte Gleichung

$$f(x+dx) - f(x) = f'(x)\,dx + \varepsilon\,dx,$$

oder

$$dy = f'(x)\,dx + \varepsilon\,dx,$$

und erst durch Vernachlässigung des secundären Theiles $\varepsilon\,dx$, welcher als Product zweier unendlich kleiner Größen gegenüber dem Hauptwerte verschwindend klein ist, gelangt man zur Gleichung (4, welche in der Anwendung vollkommen genaue Resultate liefert.

Diese Gleichung lehrt, dass man das Differential der Function (abhängigen Variablen) erhält, wenn man ihren Differentialquotienten mit dem Differential der unabhängigen Variablen multipliciert.

Setzt man voraus, dass $f'(x)$ einen endlichen Wert hat, so folgt aus der Gleichung (5, weil in derselben mit h beide Theile auf der rechten Seite gegen 0 convergieren,

$$\lim_{h=0} [f(x+h) - f(x)] = 0,$$

eine Beziehung, welche das Kriterium für die Stetigkeit der Function an der Stelle x ist. Mithin ist die Function an jeder Stelle, an welcher sie einen endlichen Differentialquotienten hat, stetig. Die Umkehrung des Satzes gilt nicht.

Das Differential der unabhängigen Veränderlichen dx ist unendlich klein, sonst ganz willkürlich zu denken, aber als constant anzusehen. Das Differential der abhängigen Variablen y hingegen ist wohl auch unendlich klein, aber nicht mehr willkürlich, sondern von der unabhängigen Variablen x abhängig, es ist eine Function von x.

Nachdem viele andere Aufgaben auf die durch Betrachtung des Tangentenproblems entwickelten Begriffe führen, wird man darauf gelenkt, die Differentialquotienten verschiedener Functionen an sich, ohne Zusammenhang mit speciellen Problemen, zu studieren, um sich auf diese Art ein mächtiges Werkzeug für die Analysis zu schaffen.

## § 2. Differentialquotienten der einfachen Functionen.

*1. Die Constante.*

Ist $y = c$, so ist $f(x) = c$ zu denken für jeden Wert von x. Demzufolge ist auch $f(x+h) = c$, also $f(x+h) - f(x) = 0$ und $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$, welche Gleichung bestehen bleibt, wenn man dem h noch so kleine Werte beilegt.

Demnach ist auch $\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$, also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} = 0.$$

Der Differentialquotient einer Constanten ist Null.

*2. Die Potenz.*

Ist

$$y = x^m,$$

wo m jede beliebige, ganze, gebrochene, positive oder negative Zahl sein kann, so findet man:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h=0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \lim_{h=0} x^m \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^m - 1}{h}.$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{m-1} \lim_{h=0} \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^m - 1}{\frac{h}{x}}.$$

Setzt man jetzt $\frac{h}{x} = \delta$, wo $\delta$ eine unendlich kleine Größe bedeutet, welche mit h gleichzeitig gegen 0 convergiert, ferner $(1+\delta)^m = 1+\varepsilon$, wobei $\varepsilon$ eine Größe ist, die mit $\delta$ gleichzeitig verschwindet, so geht die Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ über in:

$$\frac{dy}{dx} = x^{m-1} \lim_{\delta=0} \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Der Grenzwert von $\frac{\varepsilon}{\delta}$ für $\delta = 0$ kann in folgender Weise bestimmt werden:

Aus der Beziehung $(1+\delta)^m = 1+\varepsilon$ folgt:

$$m \,.\, l(1+\delta) = l(1+\varepsilon),$$

also

$$\frac{1}{m} = \frac{l(1+\delta)}{l(1+\varepsilon)},$$

mithin

$$1 = m \,.\, \frac{l(1+\delta)}{l(1+\varepsilon)}.$$

Multipliciert man auf beiden Seiten mit $\frac{\varepsilon}{\delta}$, so erhält man:

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = m \frac{\frac{1}{\delta} l(1+\delta)}{\frac{1}{\varepsilon} l(1+\varepsilon)} = m \frac{l(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}}{l(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}}$$

und

$$\lim_{\delta=0} \frac{\varepsilon}{\delta} = m \,.\, \lim_{\delta=0} \frac{l(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}}{l(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}} = m \frac{l\left[\lim_{\delta=0}(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]}{l\left[\lim_{\varepsilon=0}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right]}.$$

Nach Pkt. 11, Gleichung (4 ist

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e,$$

demnach wegen der Reciprocität des unendlich Kleinen zum unendlich Großen (Pkt. 13) auch

$$\lim_{\beta=0}(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = e.$$

Demzufolge geht die letzte Gleichung für $\lim_{\delta=0}\frac{\varepsilon}{\delta}$ über in:

$$\lim_{\delta=0}\frac{\varepsilon}{\delta} = m\frac{le}{le} = m.$$

Nach Berücksichtigung dieses Grenzwertes erhält man also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^m}{dx} = m\,x^{m-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6$$

Specielle Fälle:

$$y = \frac{1}{x^m} = x^{-m}; \quad \frac{dy}{dx} = -m\,x^{-m-1} = -\frac{m}{x^{m+1}}.$$

$$y = \frac{1}{x}; \qquad \frac{dy}{dx} = -1\,.\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

$$y = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}.$$

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

*3. Der Logarithmus.*

$$y = \log_a x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h=0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim_{h=0}\frac{\log_a\frac{x+h}{x}}{h},$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h=0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}.$$

Setzt man wieder $\frac{h}{x} = \delta$, wobei $\delta$ eine Größe bedeutet, welche mit h gleichzeitig gegen 0 convergiert, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta=0} \frac{\log_a (1+\delta)}{\delta} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \lim_{\delta=0} \left[ \log_a (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} \right],$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a \left[ \lim_{\delta=0} (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} \right],$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Ist speciell $y = l\,x$, dann hat man, weil $l\,e = 1$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(l\,x)}{dx} = \frac{1}{x} \quad \ldots\ldots\ldots (7$$

*4. Die Exponentialgröße.*

$$y = a^x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h=0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h=0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h=0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Setzt man hier $a^h - 1 = \delta$, d. h. $a^h = 1 + \delta$, wobei $\delta$ mit $h$ gleichzeitig unendlich klein wird, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \lim_{h=0} \frac{\delta}{h}.$$

Da mit Rücksicht auf die Substitution die Gleichung besteht $h \cdot l\,a = l\,(1+\delta)$, aus welcher $h = \frac{l\,(1+\delta)}{l\,a}$ folgt, so ist auch

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot l\,a \cdot \lim_{\delta=0} \frac{\delta}{l\,(1+\delta)} = a^x\,l\,a \cdot \lim_{\delta=0} \frac{1}{\frac{1}{\delta}\,l\,(1+\delta)},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot l\,a \cdot \lim_{\delta=0} \frac{1}{l\,(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}} = a^x\,l\,a\,\frac{1}{l\,e},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,a^x}{dx} = a^x \cdot l\,a \quad \ldots\ldots\ldots (8$$

Ist speciell $y = e^x$, dann ist, weil $l\,e = 1$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,e^x}{dx} = e^x \quad \ldots\ldots\ldots (9$$

Die Exponentialfunction $e^x$ ist die einzige Function, welche mit ihrer abgeleiteten Function übereinstimmt.

*5. Der Sinus.*

$$y = \sin x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h=0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h},$$

oder, weil $\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$, auch:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h=0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h=0} \frac{\sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}.$$

Setzt man nun $\frac{h}{2} = \delta$, wobei $\delta$ eine Größe bedeutet, welche mit h gleichzeitig gegen 0 convergiert, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta=0} \frac{\sin \delta \cos(x+\delta)}{\delta} = \lim_{\delta=0} \frac{\sin \delta}{\delta} \cdot \lim_{\delta=0} \cos(x+\delta).$$

Zufolge Pkt. 10, Gleichung (5 ist aber

$$\lim_{\delta=0} \frac{\delta}{\sin \delta} = 1, \text{ also auch } \lim_{\delta=0} \frac{\sin \delta}{\delta} = 1,$$

überdies ist $\lim_{\delta=0} \cos(x+\delta) = \cos x$, weil $x + \delta$ gegen $x$ convergiert, wenn $\delta$ gegen 0 abnimmt, demnach folgt schließlich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10$$

*6. Der Cosinus.*

$$y = \cos x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h=0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h},$$

und weil $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{A+B}{2}$, so ist auch:

$$\frac{dy}{dx} = -\lim_{h=0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = -\lim_{h=0} \frac{\sin \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}.$$

Setzt man analog wie früher $\frac{h}{2} = \delta$, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = -\lim_{\delta=0} \frac{\sin \delta}{\delta} \cdot \lim_{\delta=0} \sin (x + \delta),$$

und wegen $\lim_{\delta=0} \frac{\sin \delta}{\delta} = 1$ und $\lim_{\delta=0} \sin (x + \delta) = \sin x$, schließlich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x \quad \ldots\ldots (11$$

*7. Der Arcussinus.*

$$y = \text{arc sin } x.$$

Durch Umkehren dieser Gleichung erhält man:

$$x = \sin y$$

und durch Differentiation der letzteren:

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

demnach ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\text{arc sin } x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \ldots\ldots (12$$

*8. Der Arcuscosinus.*

$$y = \text{arc cos } x,$$

demzufolge ist

$$x = \cos y,$$

also

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1 - \cos^2 y} = -\sqrt{1 - x^2},$$

mithin:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\text{arc cos } x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \ldots\ldots (13$$

**§ 3. Differentiation von Summen, Producten und Quotienten.** Sind u und v stetige Functionen von x, so ändern sich ihre Functionswerte um d u, beziehungsweise d v, wenn sich x um d x ändert:

$$u = \varphi(x); \qquad v = \psi(x),$$

$$u + du = \varphi(x + dx); \qquad v + dv = \psi(x + dx).$$

Die Differentialquotienten der Functionen u und v werden, der eingeführten Symbolik entsprechend, mit $\frac{du}{dx} = u'$ und $\frac{dv}{dx} = v'$ bezeichnet.

*1. Die Summe.*

Es sei

$$y = u + v,$$

wobei u und v Function von x bedeuten.

Setzt man für x seinen Nachbarwert $x + dx$, so geht diese Gleichung zufolge des im Eingang dieses Paragraphen Angeführten über in:

$$y + dy = u + du + v + dv.$$

Subtrahiert man $y = u + v$, so erhält man:

$$dy = du + dv,$$

woraus durch Division mit dx

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14$$

oder

$$y' = u' + v'$$

folgt. Z. B.:

$$y = x^m + a^x,$$

$$\frac{dy}{dx} = m\,x^{m-1} + a^x \,l\,a.$$

Ist insbesondere $y = c + u$ (c constant), dann ist $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} = u'$, weil der Differentialquotient einer Constanten Null ist. Eine additionelle Constante verschwindet also bei der Differentiation.

Die Gleichung (14 enthält den Satz:

Der Differentialquotient einer Summe von Functionen ist gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Summanden; was auch für eine Summe von mehr als zwei Gliedern gilt.

**Beispiele:**

1. $$y = l\,x + \sin x + \arccos x - a^x,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \cos x - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - a^x \,l\,a.$$

2. $$y = e^x + x^m - a + \arcsin x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + m x^{m-1} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. $$y = \cos x + a b - \sqrt{x} + c$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

*2. Das Product.*

Es sei:

$$y = u \,.\, v,$$

wobei u und v stetige Functionen von x bedeuten.

Wird in dieser Gleichung $x + dx$ statt x gesetzt, so geht sie über in:

$$y + dy = (u + du)(v + dv),$$

woraus nach Subtraction von $y = u \,.\, v$,

$$dy = (u + du)(v + dv) - uv,$$

und nach Division mit dx:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(u + du)(v + dv) - uv}{dx}$$

folgt. Nach Entwicklung und Reduction des Zählers erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(v\,du + u\,dv + du\,dv)}{dx}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}dv = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx.$$

Der letzte Summand ist als Product zweier endlicher Größen $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dv}{dx}$ und einer unendlich kleinen dx unendlich klein und kann. mit Rücksicht auf Pkt. 14 der Einleitung, gegenüber den zwei ersten endlichen Summanden vernachlässigt werden.

Mithin ist schließlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= v\,u' + u\,v' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15$$

Der Differentialquotient eines Productes zweier Functionen ist gleich der Summe der beiden Producte, welche entstehen, indem jede Function mit dem Differentialquotienten der anderen multipliciert wird. Z. B.:

$$y = a^x \cos x.$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \,.\, l\,a \,.\, \cos x + a^x (-\sin x) = a^x (l\,a \,.\, \cos x - \sin x).$$

Wird speciell eine der Functionen, z. B. v, durch eine Constante a ersetzt, so dass $y = a\,u$, so ist, weil der Differentialquotient einer Constanten 0 ist, $\frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx} = a\,u'$.

Jede als Factor auftretende Constante erscheint auch als Factor im Differentialquotienten, ohne denselben im übrigen zu beeinflussen.

**Beispiele:**

1. $$y = \frac{a\,b\,x^m}{c}; \quad y' = \frac{a\,b}{c}\,m\,x^{m-1}.$$

2. $$y = a\,x^m \cos x + l\,x \,.\, \sin x;$$

$$y' = a\,m\,x^{m-1}\cos x - a\,x^m \sin x + \frac{\sin x}{x} + l\,x \,.\, \cos x.$$

3. $$y = a^x \sqrt[m]{x} \,.\, \text{arc sin}\, x + c;$$

$$y' = \frac{a^x \sqrt[m]{x}}{\sqrt{1-x^2}} + \left(a^x\, l\,a \sqrt[m]{x} + \frac{a^x\, x^{\frac{1-m}{m}}}{m}\right) \text{arc sin}\, x.$$

4. $$y = e^x \,\text{arc cos}\, x + x \sin x + a;$$

$$y' = e^x \,\text{arc cos}\, x - \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin x + x \cos x.$$

5. $y = \sin x \,.\, l\,x + a \cos x$; $y' = l\,x \,.\, \cos x + \frac{\sin x}{x} - a \sin x.$

*3. Der Quotient.*

$$y = \frac{u}{v}.$$

Setzt man in der Gleichung $x + dx$ statt $x$, so geht sie über in:

$$y + dy = \frac{u + du}{v + dv}.$$

Es ist somit

$$dy = \frac{u + du}{v + dv} - \frac{u}{v},$$

woraus durch Division mit $dx$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{u + du}{v + dv} - \frac{u}{v}\right] : dx$$

folgt. Nach Ausführung der angezeigten Operationen erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2 + v\,dv},$$

und nach Vernachlässigung des secundären Theiles des Nenners $v\,dv$ als unendlich kleine Größe gegentüber der endlichen $v^2$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{v\,u' - u\,v'}{v^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16$$

Der Differentialquotient eines Bruches ist ein Bruch. dessen Zähler das Product des Nenners und des Differentialquotienten des Zählers vermindert um das Product des Zählers und des Differentialquotienten des Nenners und dessen Nenner das Quadrat des ursprünglichen Nenners ist.

Als Beispiele sollen hier die Differentialquotienten für tang x und cotang x bestimmt werden:

$$y = \text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \,.\, \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\text{tg}\, x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17$$

$$y = \text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x\,(-\sin x) - \cos x \,.\, \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 + \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(\text{cotg}\, x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18$$

Auf Grund der beiden letzten Grundformeln der Differentialrechnung kann man auch die Differentialquotienten von arc tang x und arc cotg x ermitteln. Ist

$$y = \text{arc tang } x,$$

dann ist

$$x = \text{tang } y;$$

demnach

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y.$$

Nun ist aber

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

demnach für

$$y = \text{arc tang } x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\text{arc tang } x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \quad \ldots\ldots \quad (19$$

Analog folgt aus

$$y = \text{arc cotg } x, \qquad x = \text{cotg } y;$$

demnach

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin^2 y},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = -\sin^2 y;$$

$$-\sin^2 y = -\frac{1}{\text{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1 + \text{cotg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Somit ist für

$$y = \text{arc cotg } x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\text{arc cotg } x)}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2} \quad \ldots\ldots \quad (20$$

Ist speciell der Nenner eines Quotienten constant, hat also die Function die Form $y = \frac{u}{a}$, dann kann das complicierte Verfahren bei Bildung des Differentialquotienten entfallen, da $\frac{1}{a}$ als constanter Factor

angesehen und die Differentiation wie beim Product mit constantem Factor ausgeführt werden kann: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} u'$. Für den Fall eines constanten Zählers des Bruches reduciert sich der Differentialquotient desselben auf einen Bruch, dessen Zähler das negative Product des constanten Zählers und des Differentialquotienten des Nenners und dessen Nenner das Quadrat des ursprünglichen Nenners ist:

$$y = \frac{a}{v}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{a\,v'}{v^2}.$$

**Beispiele:**

1. $$y = \frac{a^x}{b}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a^x \,l\, a}{b}.$$

2. $$y = \frac{b}{\sin x}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b \cos x}{\sin^2 x}.$$

3. $$y = \frac{a^x \cos x}{x^m}; \; y' = \frac{x^m\,[a^x \,l\, a \cos x - a^x \sin x] - m\, x^{m-1} a^x \cos x}{x^{2m}}.$$

4. $$y = \frac{\operatorname{tang} x}{e^x \sqrt{x}}; \quad y' = \frac{e^x \sqrt{x}\,\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tang} x \,.\left[e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}}\right]}{x\, e^{2x}}.$$

5. $$y = \frac{x^3 + \operatorname{arc\,sin} x}{\sqrt[3]{x}};$$

$$y' = \frac{\sqrt[3]{x}\left[3x^2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right] - [x^3 + \operatorname{arc\,sin} x]\,\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

## § 4. Differentiation der Functionen von Functionen.

Es sei durch die Gleichung

$$y = f(u),$$

y als Function von u gegeben, wobei aber durch

$$u = \varphi(x)$$

u als Function der unabhängigen Variablen x gegeben erscheint.

In diesem Falle ist offenbar y auch eine Function der unabhängigen Variablen x und es entsteht die Frage: Wie ist der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ zu bilden?

Betrachtet man in der Gleichung $y = f(u)$ u als unabhängige Veränderliche, dann bereitet die Bildung der Differentialquotienten $\frac{dy}{du}$ und $\frac{du}{dx}$, weil es sich hiebei um einfache Functionen handelt, keinerlei Schwierigkeiten.

Die hier gestellte Frage findet aber bereits ihre Beantwortung in der Identität

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21$$

welche, wenn man rechts vom Gleichheitszeichen für die Differentialquotienten die Bezeichnungen für die abgeleiteten Functionen einführt, in

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21a$$

übergeht.

Der Differentialquotient der Function von einer Function ist gleich dem Producte der Differentialquotienten beider Functionen.

Dieser Satz wird noch leichter verständlich, wenn man durch Multiplication mit dx auf das Differential übergeht. Man erhält nämlich:

$$dy = f'(u)\,\varphi'(x)\,dx,$$

was mit Rücksicht auf die Gleichungen $u = \varphi(x)$ und (4 in der Form:

$$dy = f'(u)\,du \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22$$

geschrieben werden kann, d. h.:

Man bildet das Differential von y wie bei einer einfachen Function, nur ist hiebei u als die unabhängige Variable anzusehen.

**Beispiel:**

$$y = a^{\sin x}.$$

y ist eine Exponentialgröße, deren Exponent aber eine trigonometrische Function der unabhängigen Variablen x, nämlich sin x ist, es liegt hier also eine Function von einer Function vor:

$$y = a^u,$$

hiebei

$$u = \sin x.$$

Durch Differentiation erhält man:

$$\frac{dy}{du} = a^u \, la,$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x,$$

demnach mit Rücksicht auf die ausgesprochene Regel (21:

$$\frac{dy}{dx} = la \, . \, a^{\sin x} \cos x.$$

Durch Anwendung der Gleichung (22 erhält man:

$$dy = la \, . \, a^{\sin x} \, . \, d \sin x = la \, . \, a^{\sin x} \cos x \, dx.$$

$$\frac{dy}{dx} = la \, . \, a^{\sin x} \cos x.$$

Analog ist das Verfahren in dem complicierteren Falle, in welchem y eine Function von u, u eine Function von v und v eine Function von x ist:

$$y = f(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x).$$

Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ ergibt sich durch die Identität

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23$$

welche mit Rücksicht auf die eingeführten Bezeichnungen auch in der Form:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \, . \, \varphi'(v) \, . \, \psi'(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23a$$

geschrieben werden kann.

Die Anwendung von (22 gibt:

$$dy = f'(u)\,du, \quad du = \varphi'(v)\,dv, \quad dv = \psi'(x)\,dx$$

mithin:

$$dy = f'(u) \, . \, \varphi'(v) \, . \, \psi'(x)\,dx, \quad \ldots \quad (24$$

aus welcher Gleichung nach Division mit dx die Beziehung (23a erhalten wird.

In dieser Weise kann das Differential, also auch der Differentialquotient auch dann gefunden werden, wenn die Reihe der Variablen, von denen jede eine Function der folgenden ist, noch länger wird.

**Beispiele:**

1. $$y = l \sin (x^m + e^x),$$

d. h.

$$y = l\,u, \quad u = \sin v, \quad v = x^m + e^x,$$

also

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}, \quad \frac{du}{dv} = \cos v. \quad \frac{dv}{dx} = m\,x^{m-1} + e^x,$$

mithin zufolge (23:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(m\,x^{m-1} + e^x)\cos (x^m + e^x)}{\sin (x^m + e^x)};$$

oder mit Anwendung von (24:

$$dy = \frac{1}{\sin (x^m + e^x)}\, d\,.\sin (x^m + e^x) =$$

$$= \frac{1}{\sin (x^m + e^x)} \cos (x^m + e^x)\, d(x^m + e^x) = \frac{\cos (x^m + e^x)}{\sin (x^m + e^x)} (m\,x^{m-1} + e^x)\, dx.$$

2. $$y = \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$y' = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \frac{[-(1+x)-(1-x)]}{(1+x)^2} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $$y = \operatorname{tang}^3 (6\,m\,x^2);$$

$$y' = 3 \operatorname{tang}^2 (6\,m\,x^2) \frac{1}{\cos^2 (6\,m\,x^2)}\, 12\,m\,x = \frac{36\,m\,x \sin^2 (6\,m\,x^2)}{\cos^4 (6\,m\,x^2)}.$$

4. $$y = (a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d)^{\frac{5}{4}};$$

$$y' = \frac{5}{4} (a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d)^{\frac{1}{4}} (3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c).$$

5. $$y = \sqrt{1 + \cos (a\,x^m)};$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \cos (a\,x^m)}} \cdot (-\sin a\,x^m)\, a\,m\,x^{m-1}.$$

Als weitere Beispiele sollen die Differentialquotienten zweier Functionen ermittelt werden, welche durch entsprechende Umformung als Functionen einer Function dargestellt werden können.

6. $$y = x^x.$$

Durch Substitution der Identität $x = e^{lx}$ erhält man:

$$y = e^{x \cdot lx}.$$

d. h.

$$y = e^u,$$

wobei

$$u = x \,.\, l\,x,$$

demnach

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^u\left(x\frac{1}{x} + 1 \,.\, l\,x\right),$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^x}{dx} = x^x(1 + l\,x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25$$

7. $$y = \log_x a,$$

d. h. y ist der Logarithmus der Zahl a auf die Basis x.

Nimmt man in der gleichbedeutenden Gleichung $x^y = a$ beiderseits des Gleichheitszeichens die natürlichen Logarithmen, so erhält man:

$$y \,.\, l\,x = l\,a,$$

also

$$y = \frac{l\,a}{l\,x},$$

d. h.

$$y = \frac{l\,a}{u}; \quad u = l\,x,$$

nun ist

$$\frac{dy}{du} = -\,l\,a\,\frac{1}{u^2}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x},$$

mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\log_x a}{dx} = -\,\frac{l\,a}{x\,(l\,x)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26$$

## § 5. Differentiation entwickelter Functionen von zwei und mehreren unabhängigen Variablen.

*1. Function zweier unabhängigen Variablen.*

Ist durch die Gleichung

$$z = f(x, y),$$

z als Function der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y gegeben, so kann eine Änderung des Functionswertes z auf drei Arten hervorgerufen werden, und zwar:

1. durch Änderung von x allein,

2. durch Änderung von y allein,

3. durch gleichzeitige Änderung von x und von y.

Nachdem die Function als stetig vorausgesetzt wird, so rufen in allen drei Fällen unendlich kleine Änderungen der Werte der unabhängigen Variablen auch nur unendlich kleine Änderungen des Functionswertes (der abhängigen Variablen) z hervor.

Eine unendlich kleine Änderung einer Variablen wird als Differential derselben bezeichnet. es sind also hier, entsprechend der Entstehungsart, drei verschiedene Differentiale der abhängigen Variablen z zu unterscheiden, und zwar:

1. das partielle Differential von z nach x (in Bezug auf x), man bezeichnet es mit $d_x z$,

2. das partielle Differential von z nach y (in Bezug auf y), man bezeichnet es mit $d_y z$,

3. das totale Differential von z, welches d z bezeichnet wird.

Der Differentialquotient (Differentialverhältnis) ist das Verhältnis der unendlich kleinen Änderung des Functionswertes zu der dieselbe hervorrufenden unendlich kleinen Änderung der unabhängigen Variablen; es kann also hier nur von zwei partiellen Differentialquotienten die Rede sein, welche durch die Verhältnisse $\frac{d_x z}{d x}$ und $\frac{d_y z}{d y}$ gegeben sind und mit $\left(\frac{d z}{d x}\right)$ und $\left(\frac{d z}{d y}\right)$ oder $f'_x(x, y)$ und $f'_y(x, y)$, am häufigsten aber mit $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ oder $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ bezeichnet werden.

Die Bezeichnungen $\left(\frac{d z}{d x}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial x}$, etc. sind nur als Symbole und nicht etwa als Brüche aufzufassen, deren Nenner durch Aufmultiplicieren weggeschafft werden können, weil dadurch die Zähler jeden Sinn verlieren. In der Aussprache sind diese Quotienten $\frac{d_x z}{d x}$ und $\frac{d_y z}{d y}$ und die ihnen gleichbedeutenden Symbole partieller Differentialquotient von z nach (in Bezug auf) x und partieller Differentialquotient von z nach (in Bezug auf) y zu benennen.

Aus der Definition eines Differentialquotienten, Gleichung und (2a, und dem Begriffe eines partiellen Differentialquotienten fo

$$\left.\begin{aligned} \frac{d_x z}{dx} = \left(\frac{dz}{dx}\right) = f'_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \\ = \lim_{h=0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \frac{f(x+dx,y)-f(x,y)}{dx}, \\ \frac{d_y z}{dy} = \left(\frac{dz}{dy}\right) = f'_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \\ = \lim_{k=0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k} = \frac{f(x,y+dy)-f(x,y)}{dy}. \end{aligned}\right\} \quad (27$$

Man erhält also den partiellen Differentialquotienten der Function in Bezug auf eine der unabhängigen Variablen, wenn man die andere Variable als Constante betrachtet und den Differentialquotienten wie bei einer Function einer unabhängigen Variablen bildet, z. B.

$$z = x^y.$$

Bei der Bildung von $\frac{\partial z}{\partial x}$ ist y eine Constante, mithin ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\, x^{y-1}.$$

Bei der Bildung von $\frac{\partial z}{\partial y}$ ist x constant und y variabel, demnach zufolge der Gleichung (8

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot l\, x.$$

Aus (27 folgen für die partiellen Differentiale die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = \frac{\partial f}{\partial x} dx = f'_x(x,y)\, dx = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx, \\ d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial y} dy = f'_y(x,y)\, dy = \left(\frac{dz}{dy}\right) dy, \end{aligned}\right\} \quad (27a$$

für welche die Bemerkung zu Gleichung (4 auch volle Geltung hat.

Das totale Differential $dz$ steht zu den beiden partiellen Differentialen $d_x z$ und $d\ z$ in einer sehr einfachen Beziehung, welche leicht gefunden werden kann. Die Definitionsgleichung für das totale Differential lautet:

$$dz = f(x+dx, y+dy) - f(x,y),$$

subtrahiert und addiert man rechts vom Gleichheitszeichen $f(x+dx, y)$. so erhält man:

$$dz = f(x + dx, y + dy) - f(x + dx, y) + f(x + dx, y) - f(x, y),$$

oder, was dasselbe ist,

$$dz = \frac{f(x+dx, y+dy) - f(x+dx, y)}{dy} dy +$$

$$+ \frac{f(x+dx, y) - f(x, y)}{dx} dx.$$

Setzt man nun im ersten Quotienten $x + dx = x_1$, so geht die Gleichung über in

$$dz = \frac{f(x_1, y+dy) - f(x_1, y)}{dy} dy + \frac{f(x+dx, y) - f(x, y)}{dx} dx,$$

und zufolge der Gleichungen (27 in

$$dz = \frac{\partial f(x_1, y)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx.$$

Mit Rücksicht auf das im Punkte (14 Gesagte, kann statt $x_1$ wieder x, welches sich von $x_1$ nur unendlich wenig unterscheidet, geschrieben werden, so dass man schließlich erhält:

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28$$

oder

$$dz = d_x z + d_y z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28a$$

d. h. das totale Differential ist gleich der Summe der partiellen Differentiale.

In dem angeführten Beispiele:

$$z = x^y$$

ist demzufolge

$$dz = y x^{y-1} dx + x^y l x \, dy.$$

Ist

$$z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

so erhält man:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

also

$$dz = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

**Beispiele:**

1. $z = x^3 \sin y; \quad dz = 3x^2 \sin y\,dx + x^3 \cos y\,dy.$

2. $z = \cos x - x \cos y; \quad dz = -(\sin x + \cos y)\,dx + x \sin y\,dy.$

3. $$z = x \sin(x - y) - (x + y);$$
$$dz = [\sin(x - y) + x\cos(x - y) - 1]\,dx - [x\cos(x - y) + 1]\,dy.$$

4. $z = a^{x-y} - x^y; \; dz = [a^{x-y} l a - y x^{y-1}]\,dx - [a^{x-y} l a + x^y l x]\,dy$

5. $$z = l \sin \frac{x}{y}; \; dz = \frac{1}{y^2}[y\,dx - x\,dy] \operatorname{cotg} \frac{x}{y}.$$

*2. Function mehrerer unabhängigen Variablen.*

Wie bei einer Function zweier unabhängigen Variablen findet man bei einer Function von n unabhängigen Variablen:

$$u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n),$$

durch ganz analogen Vorgang aus der Definitionsgleichung für das totale Differential die Beziehung:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad . \quad . \quad . \quad (29$$

oder

$$du = d_{x_1} u + d_{x_2} u + d_{x_3} u + \ldots + d_{xn} u, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ die n hier auftretenden partiellen Differentialquotienten nach den n Variablen, und $d_{x_1} u$, $d_{x_2} u, \ldots d_{xn} u$ die n partiellen Differentiale der Function u bedeuten.

Bei der Bildung eines partiellen Differentialquotienten nach einer der Variablen sind alle übrigen Variablen als Constante anzusehen.

Das totale Differential ist gleich der Summe aller partiellen Differentiale. Z. B.:

$$u = x^m y^n z^p,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = m x^{m-1} y^n z^p, \; \frac{\partial u}{\partial y} = n x^m y^{n-1} z^p, \; \frac{\partial u}{\partial z} = p x^m y^n z^{p-1},$$

mithin

$$d\,u = x^{m-1}\,y^{n-1}\,z^{p-1}\,(m\,y\,x\,d\,x + n\,x\,z\,d\,y + p\,y\,x\,d\,z),$$

oder

$$d\,u = x^m\,y^n\,z^p\left(m\,\frac{d\,x}{x} + n\,\frac{d\,y}{y} + p\,\frac{d\,z}{z}\right).$$

Dasselbe Resultat hätte man erhalten, wenn man in der Gleichung:

$$l\,u = m\,l\,x + n\,l\,y + p\,l\,z$$

auf beiden Seiten des Gleichheitszeichen die Differentiale genommen hätte:

$$\frac{d\,u}{u} = m\,\frac{d\,x}{x} + n\,\frac{d\,y}{y} + p\,\frac{d\,z}{z},$$

$$d\,u = u\left(m\,\frac{d\,x}{x} + n\,\frac{d\,y}{y} + p\,\frac{d\,z}{z}\right) = x^m\,y^n\,z^p\left(m\,\frac{d\,x}{x} + n\,\frac{d\,y}{y} + p\,\frac{d\,z}{z}\right).$$

## § 6. Differentiation einer Function mehrerer Functionen einer unabhängigen Variablen.

Es sei durch

$$y = f(u,\ v,\ w, \ldots)$$

y als Function der Variablen u, v, w etc. gegeben, welche aber Functionen einer unabhängigen Variablen x sind. [$u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \chi(x)$ etc.]

Werden u, v, w, ... als unabhängige Variable angesehen, so ist zufolge (29

$$d\,y = \frac{\partial f}{\partial u}\,d\,u + \frac{\partial f}{\partial v}\,d\,v + \frac{\partial f}{\partial w}\,d\,w + \ldots$$

Nun sind aber u, v, w ... nicht unabhängige Variable, sondern Functionen von x, mithin bestehen die Gleichungen:

$$d\,u = \frac{d\,u}{d\,x}\,d\,x, \qquad d\,v = \frac{d\,v}{d\,x}\,d\,x, \qquad d\,w = \frac{d\,w}{d\,x}\,d\,x \ldots$$

oder

$$d\,u = u'\,dx, \qquad d\,v = v'\,d\,x, \qquad d\,w = w'\,d\,x$$

und erhält man nach Berücksichtiguug derselben:

$$d\,y = \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{d\,u}{d\,x}\,d\,x + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{d\,v}{d\,x}\,d\,x + \frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{d\,w}{d\,x}\,d\,x + \ldots$$

Da nun y ebenfalls eine Function von x ist, so existiert auch ein Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, welcher durch Division mit dx aus der letzten Gleichung erhalten wird.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \ldots \quad \ldots \quad (30$$

Der Differentialquotient einer Function mehrerer Functionen u, v, w ... von x wird gebildet, indem die partiellen Differentialquotienten der Function nach u, v, w ... mit den Differentialquotienten dieser Functionen u, v, w ... nach x multipliciert und alle solchen Producte addiert werden.

Als Beispiele hiezu sollen die bereits aufgestellten Formeln für die Differentiation von Summen, Producten und Quotienten auf andere Art wie früher abgeleitet werden.

*a)* $y = u + v + w$, hiebei u, v und w Functionen von x, dann ist zufolge (30

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx},$$

nun ist aber

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = 1,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} = u' + v' + w'.$$

*b)* $y = u \,.\, v$, wobei u und v Functionen von x sind.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

nun ist aber

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v \text{ und } \frac{\partial y}{\partial v} = u,$$

mithin

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} = vu' + uv'.$$

*c)* $y = \frac{u}{v}$, hiebei sind u und v Functionen von x, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx};$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{v}; \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{u}{v^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Bei manchen Anlässen ist der Unterschied zwischen dem gewöhnlichen Differentialquotienten und dem partiellen Differentialquotienten besonders zu beachten, damit nicht durch Verwechslung ganz sinnlose Resultate erhalten werden.

Ist z. B. in der Function $y = f(u, v, w)$, wobei u, v, w Functionen von x sind, $u = x$, so dass also

$$y = f(x, v, w),$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

Während der linksstehende Quotient $\frac{dy}{dx}$, der Differentialquotient von y nach x, das Verhältnis der Änderung von y zur Änderung von x um dx bedeutet, wobei gleichzeitig v in $v + dv$ und w in $w + dw$ übergeht, wird $\frac{\partial y}{\partial x}$ dadurch erhalten, dass man v und w als Constante betrachtet, also ungeändert lässt und y partiell nach x differenziert.

Wäre speciell

$$y = v x^w,$$

so hätte man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = v w x^{w-1}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = x^w, \qquad \frac{\partial y}{\partial w} = v x^w \, l\, x,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = v w x^{w-1} + x^w \frac{dv}{dx} + v x^w \, l\, x \frac{dw}{dx}.$$

## § 7. Differentiation der unentwickelten Functionen.

*1. Die unentwickelte Function einer unabhängigen Variablen.*

Nimmt man in der Gleichung:

$$F(x, y) = 0$$

x als die unabhängige Variable an, so ist durch dieselbe y als Function von x in unentwickelter Form gegeben. Löst man die Gleichung nach y auf, so dass man dadurch etwa $y = f(x)$ erhält, dann ist die Berechnung des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ auf das schon Bekannte zurückgeführt.

Nun ist aber die Auflösung einer Gleichung in vielen Fällen recht compliciert, oft sogar ganz unmöglich, welcher Umstand dazu führte, einen Modus zur Bildung des Differentialquotienten ganz unabhängig von der Auflösung der Gleichung zu schaffen.

Die Gleichung $F(x, y) = 0$ kann nämlich von

$$z = F(u, v)$$

hergeleitet gedacht werden, indem man $z = 0$, $u = x$ und $v = y$ setzt.

Zufolge (30 ist aber, da u und v Functionen von x sind,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Entsprechend den gemachten Voraussetzungen ist ferner:

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31$$

und hieraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31a$$

Ist y als Function von x in unentwickelter Form gegeben, so ist der Differentialquotient von y nach x gleich dem negativen Quotienten aus dem partiellen Differentialquotienten der Function nach x durch den partiellen Differentialquotienten derselben nach y.

Durch Multiplication mit dx erhält man aus (31 die Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31b$$

welche den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ bestimmt und leicht in Worten gegeben werden kann.

Ist durch $F(x,y)=0$ y als Function von x unentwickelt gegeben, so ist die Summe der partiellen Differentiale von $F(x,y)$ gleich Null.

Bei dieser Art der Bestimmung des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ der Function $F(x,y)=0$, muss der Fall ausgeschlossen werden, in welchem $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ Null werden, denn es ergibt sich dann $\frac{dy}{dx}$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Z. B.:

*a)* $$x^3-3axy+y^3=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3(x^2-ay); \quad \frac{\partial F}{\partial y}=3(y^2-ax).$$

somit

$$3(x^2-ay)+3(y^2-ax)\frac{dy}{dx}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}.$$

Für $x=0$ ist auch $y=0$, mithin $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, also $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ (unbestimmt).

In diesem Falle sind eigentlich zwei oder mehrere Werte von $\frac{dy}{dx}$ vorhanden, die aber aus rationalen Functionen nicht bestimmt werden können, was durch das Auftreten der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ angezeigt wird.

**Beispiele:**

1. $4y^3-3y+\sin x=0; \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{12y^2-3}.$

2. $l(xy)-x^y+ayc^x=0; \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{1}{x}-yx^{y-1}+aye^x}{\frac{1}{y}-x^y lx+ae^x}.$

3. $x\,\mathrm{tang}\frac{x^m}{y}+l\cos(xy)=0;$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{tang}\frac{x^m}{y} + \frac{m\,x^m}{y\cos^2\frac{x^m}{y}} - \frac{y\sin x\,y}{\cos x\,y}}{-\frac{x^{m+1}}{y^2\cos^2\frac{x^m}{y}} - \frac{x\sin x\,y}{\cos x\,y}}$$

*2. Die unentwickelte Function zweier unabhängigen Variablen.*

Ist z als Function der unabhängigen Variablen x und y unentwickelt durch die Gleichung:

$$F(x, y, z) = 0$$

gegeben, so müssen, um nach (28 das totale Differential der Function d z anzugeben, die beiden partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ bestimmt werden. Diese Bestimmung muss auch in solchen Fällen möglich gemacht werden, wo die Auflösung der Gleichung nach z, um sie auf die schon besprochene Form $z = f(x, y)$ zu bringen, mit großen Schwierigkeiten verbunden oder ganz unmöglich ist.

Die Lösung dieser Aufgabe ist aber eigentlich schon in (31a vollständig gegeben, denn betrachtet man in der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ y zunächst als constant, dann liegt nur eine implicite Function einer unabhängigen Variablen x vor, und es ist die Bildung des Differentialquotienten, der allerdings hier nur ein partieller ist, weil eben die zweite Variable y als constant angesehen wurde, nach Gleichung (31a zulässig. Es ist also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \\ \text{und analog} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32$$

wenn man x als constant betrachtet.

Das totale Differentiale ist, wie bereits angeführt, durch (28 in Verbindung mit (32 bestimmt.

$$d z = \frac{\partial z}{\partial x} d x + \frac{\partial z}{\partial y} d y.$$

Setzt man die Werte für $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ (Glchgn. 32) ein, so erhält man eine mit (31b conforme Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32a$$

**Beispiele:**

1. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{c^2},$$

demnach

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z};$$

$$dz = -\frac{c^2}{z}\left[\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2}\right].$$

2. $$\frac{(x - pz)^2}{a^2} + \frac{(y - qz)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2(x - pz)}{a^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2(y - qz)}{b^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2\left[\frac{(x - pz)p}{a^2} + \frac{(y - qz)q}{b^2}\right];$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{b^2(x - pz)}{b^2 p(x - pz) + a^2 q(y - qz)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{a^2(y - qz)}{b^2 p(x - pz) + a^2 q(y - pz)}.$$

3. $$\frac{y}{x} - \operatorname{tang}\frac{z}{c} = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{1}{c\cos^2\frac{z}{c}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c\,y\cos^2\frac{z}{c}}{x^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\cos^2\frac{z}{c}}{x}.$$

*3. Unentwickelte Functionen einer unabhängigen Variablen, gegeben durch simultane Gleichungen.*

Es kommt häufig vor, dass y und z als Function einer unabhängigen Variablen x unentwickelt durch zwei gleichzeitig bestehende (simultane) Gleichungen

$$\Phi(x, y, z) = 0; \quad \Psi(x, y, z) = 0$$

gegeben sind. (Theorie der Raumcurven.)

Dass durch solche Gleichungen zwei der Variablen als Functionen der dritten dargestellt werden können, ist leicht einzusehen. Eliminiert man nämlich aus denselben z, so erhält man eine Gleichung $F_1(x, y) = 0$, aus welcher durch Auflösung $y = \varphi_1(x)$ folgt; durch Elimination von y würde man $F_2(x, z) = 0$ erhalten, woraus durch Auflösen $z = \varphi_2(x)$ erhalten werden könnte.

Demzufolge existieren die beiden Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$, deren directe Bestimmung auch keine Schwierigkeiten bereitet.

Betrachtet man in den Gleichungen die Variablen als von einander unabhängig und bildet unter dieser Voraussetzung die Differentiale, so erhält man:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz = 0,$$

zwei nach dx, dy und dz lineare und homogene Gleichungen, es besteht also die Beziehung (siehe I. Band, 1. Theil):

$$dx : dy : dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} & \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} & \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} \end{vmatrix},$$

woraus:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} & \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} & \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{vmatrix}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} & \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{vmatrix}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (33$$

folgt. Z. B.:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 = 0.$$

Man findet:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

$$a\,x\,dx + b\,y\,dy + c\,z\,dz = 0.$$

und daraus

$$dx : dy : dz = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} yz : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & a \end{vmatrix} zx : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} xy.$$

Mithin ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a-c)x}{(c-b)y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{(b-a)x}{(c-b)y}.$$

## § 8. Höhere Differentialquotienten und Differentiale der entwickelten Function einer unabhängigen Variablen.

Durch Differentiation der Function y einer unabhängigen Variablen x

$$y = f(x)$$

erhält man die abgeleitete Function $y' = f'(x)$, welche dasselbe wie der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ und im allgemeinen wieder eine Function von x ist. Differenziert man nun diese abgeleitete Function

$$y' = f'(x).$$

so erhält man die Ableitung der abgeleiteten Function, oder, was dasselbe ist, den Differentialquotienten vom ersten Differentialquotienten und nennt dieses Resultat die zweite abgeleitete Function, oder »den zweiten Differentialquotienten« von y.

Durch Fortsetzen dieses Verfahrens gelangt man zur dritten, vierten, ... $n^{ten}$ abgeleiteten Function oder zum dritten, vierten, ... $n^{ten}$ Differentialquotienten von y.

Ist man von $y = f(x)$ ausgegangen, so bezeichnet man die 1., 2., 3., 4., ... $n^{te}$ Ableitung (abgeleitete Function) mit $y'$, $y''$, $y'''$, $y^{(4)}$ ... $y^{(n)}$ oder $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$ ... $f^{(n)}(x)$.

Das Differential der abhängigen Variablen ist gegeben durch

$$dy = f'(x)\,dx. \quad \ldots \quad (4)$$

wobei dx willkürlich, aber constant, hingegen dy von x abhängig, also eine Function von x ist.

Bildet man nun das Differential auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens in (4, so erhält man

$$d[dy] = d[df(x)],$$

oder, wenn man bedenkt dass:

$$\mathrm{d}\,y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}\,x$$

auch

$$\mathrm{d}\,[\mathrm{d}\,y] = \mathrm{d}\,[f'(x)\,\mathrm{d}\,x]$$

und weil $\mathrm{d}\,x$ als Constante zu behandeln ist,

$$\mathrm{d}\,[\mathrm{d}\,y] = \mathrm{d}\,x\,.\,\mathrm{d}f'(x)$$

Durch Differentiation der Gleichung

$$y' = f'(x)$$

erhält man

$$\frac{\mathrm{d}\,y'}{\mathrm{d}\,x} = f''(x),$$

also

$$\mathrm{d}\,y' = \mathrm{d}f'(x) = f''(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

demnach ist

$$\mathrm{d}\,[\mathrm{d}\,y] = f''(x)\,\mathrm{d}\,x^2.$$

Man bezeichnet das Differential $\mathrm{d}\,[\mathrm{d}\,y]$ des Differentials $\mathrm{d}\,y$ mit $\mathrm{d}^2\,y$ und nennt es das zweite Differential von y.

Für dasselbe besteht also die Gleichung

$$\mathrm{d}^2\,y = f''(x)\,\mathrm{d}\,x^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34$$

die auch in der Form gegeben werden kann:

$$\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} = f''(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35$$

welche den zweiten Differentialquotienten von y charakterisiert.

Analog bildet man das 3., 4., ... $n^{te}$ Differential, beziehungsweise den 3., 4., ... $n^{ten}$ Differentialquotienten, und erhält:

$$\frac{\mathrm{d}^3\,y}{\mathrm{d}\,x^3} = f'''(x),$$

$$\frac{\mathrm{d}^4\,y}{\mathrm{d}\,y^4} = f^{(4)}(x),$$

. . . . . .

$$\frac{\mathrm{d}^n\,y}{\mathrm{d}\,x^n} = f^{(n)}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35a$$

Nachdem $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots f^{(n)}\,x$ im allgemeinen endliche, von Null verschiedene Werte haben, sind zufolge Pkt. 13 der Einleitung $\mathrm{d}^n\,y$ und $\mathrm{d}\,x^n$ unendlich kleine Größen derselben Ordnung. Betrachtet

man $dx$ als unendlich klein von der 1. Ordnung, so ist $dx^n$ unendlich klein der $n^{ten}$ Ordnung, also auch $d^n y$ unendlich klein von der Ordnung n.

**Beispiele:**

1. $y = x^m$ (m eine positive ganze Zahl)

$$\frac{dy}{dx} = y' = m\,x^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = m(m-1)\,x^{m-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = m(m-1)(m-2)\,x^{m-3}$$

. . . . . .

$$\frac{d^k y}{dx^k} = y^{(k)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)\,x^{m-k}$$

. . . . . .

$$\frac{d^m y}{dx^m} = m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1. = m!$$ constant, deshalb

$$\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} = 0.$$

2. $y = lx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = +\frac{1.2}{x^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{1.2.3}{x^4}$$

. . . . . .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

3. $y = \sin x$

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

$$y''' = -\cos x$$

$$y^{IV} = \sin x$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

4. $y = \cos x$

$$y' = -\sin x$$

$$y'' = -\cos x$$

$$y''' = \sin x$$

$$y^{IV} = \cos x$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

5. Gegeben sei $y = u \cdot v$, wobei u und v Functionen von x sind, dann ist

$$\frac{dy}{dx} = y' = u\,v' + v\,u',$$

hiebei wieder $v'$ und $u'$ Functionen von x, demzufolge ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = u\,v'' + u'v' + v'u' + v\,u'' = u\,v'' + 2\,u'v' + v\,u'',$$

analog

$$y''' = u\,v''' + u'\,v'' + 2\,(u'\,v'' + u''\,v') + v'\,u'' + v\,u'''$$

$$y''' = u\,v''' + 3\,u'\,v'' + 3\,u''\,v' + v\,u''',$$

ferner

$$y^{(4)} = u\,v^{(4)} + u'\,v''' + 3\,(u'\,v''' + u''\,v'') + 3\,(u''\,v'' + u'''\,v') + v'\,u''' + v\,u^{(4)},$$

$$y^{(4)} = u\,v^{(4)} + 4\,u'\,v''' + 6\,u''\,v'' + 4\,u'''\,v' + u^{(4)}\,v,$$

demnach im allgemeinen

$$y^{(n)} = u\,v^{(n)} + \binom{n}{1} u'\,v^{(n-1)} + \binom{n}{2} u''\,v^{(n-2)} + \ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{n-1} u^{(n-1)}\,v + u^{(n)}\,v.$$

6. $y = \operatorname{arc\,tang} x;\; y'' = -2\dfrac{(1+x^2)^2 - 4x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = -\dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}.$

7. $$y = a^x;\;\; y^{(n)} = a^x\,(l\,a)^n.$$

## § 9. Partielle Differentialquotienten und totale Differentiale höherer Ordnung der Functionen mehrerer unabhängigen Variablen.

*1. Function zweier unabhängigen Variablen.*

Ist z als Function der beiden unabhängigen Variablen x und y durch die Gleichung

$$z = f(x, y)$$

gegeben, und betrachtet man in derselben zunächst nur x als Variable, indem man dem y einen constanten Wert beilegt, so kann man wie bei einer Function einer unabhängigen Variablen die höheren Differentialquotienten derselben bilden, welche aber hier nur partielle Differentialquotienten höherer Ordnung nach x sind, weil bei ihrer Bildung die 2. Variable y als constant angesehen wird.

Auf diese Art erhält man:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x, y),$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y),$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f'''_{x^3}(x, y)$$

u. s. w.

und analog, wenn bei der Differentiation stets x als constant und nur y als variabel betrachtet wird:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x, y),$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y),$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = f'''_{y^3}(x, y)$$

u. s. w.,

welche Symbole in der Aussprache:

partieller Differentialquotient
zweiter partieller Differentialquotient
dritter partieller Differentialquotient

} von z oder von $f$ nach x, beziehungsweise nach y

etc. zu benennen sind.

Nun sind aber die partiellen Differentialquotienten von z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, beide Functionen von x und y, es kann also auch der partielle Differentialquotient des ersten nach y und des zweiten nach x gebildet werden, welche bezüglich z natürlich auch partielle Differentialquotienten zweiter Ordnung sind.

Dieselben werden durch folgende Symbole bezeichnet:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}; \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

und weil sie, wie leicht gezeigt werden kann, gleichbedeutend sind, zweiter partieller Differentialquotient von z genommen einmal nach x und einmal nach y benannt.

Geht man nämlich von den Definitionsgleichungen der partiellen Differentialquotienten (27 aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + dx, y) - f(x, y)}{dx},$$

$$\frac{\partial f}{dy} = \frac{f(x, y + dy) - f(x, y)}{dy}$$

und wendet dieselben bei der Bildung der beiden in Betracht gezogenen zweiten partiellen Differentialquotienten an, so erhält man:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{f(x+dx, y+dy) - f(x, y+dy)}{dx} - \frac{f(x+dx, y) - f(x, y)}{dx}$$

$$dy$$

und

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{f(x+dx, y+dy) - f(x+dx, y)}{dy} - \frac{f(x, y+dy) - f(x, y)}{dy}$$

$$dx$$

demnach

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} =$$

$$= \frac{f(x+dx, y+dy) - f(x, y+dy) - f(x+dx, y) + f(x, y)}{dx \cdot dy}$$

also

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

d. h. differenziert man eine Function zweier unabhängigen Variablen x und y zuerst partiell nach x und dann partiell nach y, so erhält man dasselbe Resultat, welches man erhalten würde, wenn man zuerst nach y und dann nach x partiell differenziert hätte.

Dieser Satz lässt sich natürlich verallgemeinern, nicht nur auf die zweiten partiellen Differentialquotienten der Functionen beliebig vieler unabhängigen Variablen, sondern auch auf höhere partielle Differentialquotienten, so dass er allgemein wie folgt ausgesprochen werden kann:

Die Reihenfolge, in welcher die partiellen Differentiationen ausgeführt werden, ist ohne Einfluss auf das Resultat.

So ist z. B. das Resultat immer dasselbe, wenn eine Function zweimal nach x und dann einmal nach y, oder einmal nach y und dann zweimal nach x, oder einmal nach x, dann einmal nach y und wieder einmal nach x partiell differenziert wird. Man erhält immer den dritten partiellen Differentialquotienten der Function, genommen zweimal nach x und einmal nach y:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}.$$

Das totale Differential von z ist gegeben durch die Gleichung

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y; \quad \ldots\ldots \quad (28$$

es ist eine Function von x und y, weil die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ Functionen von x und y sind, demnach ist sein Differential $\mathrm{d}[\mathrm{d}z] = \mathrm{d}^2 z$ (zweites Differential von z) ganz analog wie $\mathrm{d}z$ (§ 5) unter Anwendung der Gleichung (28 zu bilden, so dass man erhält:

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial(\mathrm{d}z)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial(\mathrm{d}z)}{\partial y}\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Bedenkt man nun bei der Ausführung der angezeigten Differentiationen, dass die Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ der unabhängigen Variablen als constant anzusehen sind, so erhält man:

$$\mathrm{d}^2 z = \left\{\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x + \left\{\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}y,$$

oder nach Ausführung der angezeigten Multiplicationen und Einführung der üblichen Symbole:

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 \quad \ldots \quad (36$$

In derselben Weise erhält man aus $\mathrm{d}^2 z$

$$\mathrm{d}^3 z = \mathrm{d}[\mathrm{d}^2 z] = \frac{\partial(\mathrm{d}^2 z)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial(\mathrm{d}^2 z)}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\mathrm{d}y^3$$

und findet durch Fortsetzung dieses Verfahrens, bei welchem die Binomialcoefficienten auftreten:

$$d^n z = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy +$$

$$+ \binom{n}{2} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}} dx dy^{n-1} +$$

$$+ \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n.$$

Der Bau dieses Ausdruckes führt zu der folgenden, sehr vortheilhaften symbolischen Bezeichnung:

$$d^n z = \left[\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right]^n f \quad \ldots\ldots \quad (37$$

welche selbsverständlich nur den Sinn hat, dass nach ausgeführter Potenzierung das $f$ zu den Potenzen des $\partial$ in den Zählern hinzuzufügen ist, wodurch dann der richtige Ausdruck erhalten wird.

Anmerkung: Die Größe $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k$ kann $n^{tes}$ partielles Differential von z, genommen $(n-k)$ mal nach x und k mal nach y genannt und durch $dz_{x^{n-k}, y^k}$ bezeichnet werden.

**Beispiele:**

1. $$z = x^m y^n,$$

es ist $d^2z$ und $d^3z$ anzugeben.

Die Formel (37 gibt für $n = 2$ und $n = 3$:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3.$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = m x^{m-1} y^n; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = m(m-1) x^{m-2} y^n; \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = m(m-1)(m-2) x^{m-3} y^n;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = n x^m y^{n-1}; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1) x^m y^{n-2}; \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = n(n-1)(n-2) x^m y^{n-3};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = m n x^{m-1} y^{n-1}; \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = m(m-1) n x^{m-2} y^{n-1};$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = m n (n-1) x^{m-1} y^{n-2};$$

mithin:

$$d^2z = m(m-1)x^{m-2}y^n dx^2 + 2mnx^{m-1}y^{n-1} dx dy + \\ + n(n-1)x^m y^{n-2} dy^2,$$

$$d^3z = m(m-1)(m-2)x^{m-3}y^n dx^3 + 3m(m-1)nx^{m-2}y^{n-1} dx^2 dy + \\ + 3mn(n-1)x^{m-1}y^{n-2} dx dy^2 + n(n-1)(n-2)x^m y^{n-3} dy^3.$$

Ohne Anwendung der Formel (37 kann die gestellte Aufgabe wie folgt gelöst werden:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

mithin:

$$dz = mx^{m-1}y^n dx + nx^m y^{n-1} dy.$$

$$d^2z = d[dz] = \frac{\partial(dz)}{\partial x} dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y} dy$$

und weil:

$$\frac{\partial(dz)}{\partial x} = m(m-1)x^{m-2}y^n dx + n \cdot mx^{m-1}y^{n-1} dy,$$

$$\frac{\partial(dz)}{\partial y} = mnx^{m-1}y^{n-1} dx + n(n-1)x^m y^{n-2} dy,$$

ist

$$d^2z = m(m-1)x^{m-2}y^n dx^2 + 2mnx^{m-1}y^{n-1} dx dy + \\ + n(n-1)x^m y^{n-2} dy^2.$$

$$d^3z = d[d^2z] = \frac{\partial(d^2z)}{\partial x} dx + \frac{\partial(d^2z)}{\partial y} dy$$

u. s. w.

2. $$z = a^x + ae^y,$$

es ist das 3. Differential von z zu bilden:

$$dz = a^x la\, dx + ae^y dy$$

$$d^2z = d[dz] = a^x (la)^2 dx^2 + ae^y dy^2$$

$$d^3z = d[d^2z] = a^x (la)^3 dx^3 + ae^y dy^3.$$

Dasselbe Resultat gibt die Anwendung der Formel (37.

Anmerkung: Es sei insbesondere darauf aufmerksam gemacht, dass der Satz: das totale Differential ist gleich der Summe der partiellen Differentiale nicht in gleicher Weise auf die höheren Differentiale übertragen werden kann. Das $n^{te}$ totale Differential ist nicht die Summe der $n^{ten}$ partiellen Differentiale.

## 2. *Function mehrerer unabhängigen Variablen.*

Ist u als Function der n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ gegeben durch

$$u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n),$$

so besteht für d u die Gleichung:

$$d u = \frac{\partial f}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} d x_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} d x_n \quad \ldots (29$$

Die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $[i = 1, 2, 3, \ldots n]$ sind wieder Functionen der n Variablen $x_i$, mithin ist es auch d u und man hat das Differential von d u ganz analog unter Anwendung von (29 zu bilden. Es ist also:

$$d[d u] = d^2 u = \frac{\partial (d u)}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial (d u)}{\partial x_2} d x_2 + \ldots + \frac{\partial (d u)}{\partial x_n} d x_n.$$

Führt man die angezeigten Differentiationen aus, wobei die Differentiale $d x_i$ als Constante anzusehen sind, so erhält man einen Ausdruck, welcher symbolisch wie folgt geschrieben werden kann:

$$d^2 u = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} d x_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} d x_n\right]^2 f. \quad \ldots (36a$$

Durch Fortsetzen des Differenzierens in gleicher Weise erhält man allgemein:

$$d^n u = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} d x_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} d x_3 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} d x_n\right]^n f \ldots (37a$$

## § 10. Höhere Differentialquotienten und höhere Differentiale der unentwickelten Functionen.

*1. Die unentwickelte Function einer unabhängigen Variablen.*

Ist y als Function von x in unentwickelter Form durch die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

gegeben, so besteht zur Bestimmung des Differentialquotienten $\frac{d y}{d x}$ die Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d y}{d x} = 0. \quad \ldots \ldots \ldots (31$$

Dieselbe stellt wieder y als eine unentwickelte Function von x vor, kann also auf sich selbst angewendet werden und gibt dann:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d y}{d x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d y}{d x}\right)}{\partial y} \frac{d y}{d x} = 0.$$

Führt man die angezeigten partiellen Differentiationen aus mit Berücksichtigung, dass $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ Ausdrücke sind, die x und y enthalten, $\frac{dy}{dx}$ aber eine Function von x allein ist, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

oder

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad . \quad . \quad (38$$

eine Gleichung, aus welcher der zweite Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ bestimmt werden kann, wenn der erste aus (31a gerechnet und substituiert wird, und $\frac{\partial F}{\partial y}$ nicht verschwindet.

Durch weitere Anwendung von (31 auf (38 erhält man:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 F}{\partial y\,\partial x^2}\frac{dy}{dx} + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} +$$

$$+ 3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

eine Gleichung, aus welcher bei bekannten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ der dritte Differentialquotient $\frac{d^3y}{dx^3}$ ermittelt werden kann. Dieser Vorgang kann fortgesetzt werden und liefert Gleichungen zur Berechnung noch höherer Differentialquotienten:

**Beispiele:**

1. $$x^3 + y^3 - a^3 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

$$6x + 3y^2\frac{d^2y}{dx^2} + 6y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -2\frac{xy^3 + x^4}{y^5}$$

$$6 + 3y^2\frac{d^3y}{dx^3} + 12y\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dy^2} + \left[6y\frac{d^2y}{dx^2} + 6\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx} = 0$$

u. s. w.

Man kann auch $\frac{d^2y}{dx^2}$ direct durch Differentiation von $\frac{dy}{dx}$ als Bruch, bei Berücksichtigung, dass y eine Function von x ist, ermitteln

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2xy^2 - 2x^2yy'}{y^4} = -2\frac{xy^2 + \frac{x^4y}{y^2}}{y^4} =$$

$$= -2\frac{xy^3 + x^4}{y^5},$$

und durch weitere Differentiation dieses Bruches können auch die höheren Differentialquotienten gefunden werden, welcher Vorgang bei Lösung von Aufgaben besonders zu empfehlen ist.

2. $ae^y + xe^y - a = 0; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{a+x}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(a+x)^2}.$

3. $y\sin^2 x - a = 0; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2y\cos x}{\sin x};$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{\sin^2 x} - 2\cot g\, x\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

4. $x^3 - 3axy + y^3 = 0; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^3xy}{(ax - y^2)^3}.$

5. $\frac{1}{x} - y^{\frac{1}{x}} = 0; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^x\left[-\frac{1}{x} + (1 + lx)^2\right].$

6. $\operatorname{tang}\frac{y}{x} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 0; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$

*2. Die unentwickelte Function zweier unabhängigen Variablen.*

Es sei z als Function der unabhängigen Variablen x und y gegeben durch die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0,$$

und es sind die 3 zweiten partiellen Differentialquotienten von z. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ zu bestimmen.

Geht man von den beiden Gleichungen zur Bestimmung von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ aus

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32$$

worin $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ Ausdrücke, welche x, y und z enthalten, ferner z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ Functionen von x und y sind, und differenziert die erste partiell nach x, dann dieselbe und die zweite partiell nach y, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\underline{\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}}=0\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\underline{\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}}=0\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\underline{\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}}=0
\end{aligned}\right\}\ (39$$

Aus diesen drei Gleichungen können nun die zweiten partiellen Differentialquotienten gerechnet werden, wenn man aus (32 die ersten bestimmt hat und $\frac{\partial F}{\partial z}\gtrless 0$ ist.

**Beispiel:**

$$x^2+y^2+z^2=1$$

$$x+z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$$

$$y+z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x^2+z^2}{z^3}=\frac{y^2-1}{z^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{xy}{z^3}$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y^2+z^2}{z^3}=\frac{x^2-1}{z^3}.$$

## § 11. Transformation der Variablen.

Die Einführung neuer Variablen an Stelle der ursprünglich in der Untersuchung auftretenden ist eines der wichtigsten Hilfsmittel der Analysis, welches bei Lösung von Aufgaben sehr häufig zur Anwendung gelangt.

Die neu einzuführenden Variablen müssen mit den ursprünglichen in einem gegebenen Zusammenhang stehen, welcher auch die Bestimmung der Differentialquotienten der ursprünglichen Variablen nach den neu eingeführten ermöglicht. Die zwei wichtigsten Fälle der Transformation sind:

*1.* Es sei y eine durch die Gleichung:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha)$$

gegebene Function von x, und es soll an die Stelle von x eine neue Variable t eingeführt werden, wenn ihr Zusammenhang mit x durch

$$x = \varphi(t)$$

gegeben ist.

Führt man an die Stelle von x die Variable t ein, so wird y zu einer Function von t, und es müssen auch die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. durch die Ableitungen von x und y nach t ausgedrückt werden.

Bezeichnet man die Ableitungen von x und y nach t mit x', x'', x''' etc., y', y'', y''' etc., so erhält man durch Differentiation der Gleichung $y = f(x)$ nach t, welche dieselbe Beziehung der Variablen x und y zu einander ausdrücken soll wie $\alpha$), weil x eine Function von t ist,

$$y' = f'(x) \cdot x' = \frac{dy}{dx} x',$$

daraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40$$

Differenziert man nochmals nach t, bei Berücksichtigung dessen, dass $\frac{dy}{dx}$ eine Function von x, und x eine Function von t ist, so erhält man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} x' = \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^2},$$

also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41$$

Durch nochmalige Differentiation nach t folgt:

$$\frac{d^3y}{dx^3} x' = \frac{(x')^3(x'y''' - x'''y') - 3(x')^2x''(x'y'' - x''y')}{(x')^6}$$

mithin:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'(x'y''' - x'''y') - 3x''(x'y'' - x''y')}{(x')^5}$$

u. s. w.

**Beispiel:**

In der Gleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=0$$

ist die Substitution $x = e^t$ durchzuführen.

$$x = e^t, \quad x' = e^t, \quad x'' = e^t$$

$$\frac{y}{x}=\frac{y}{e^t}=y\,e^{-t}; \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{y'}{e^t}=\frac{dy}{dt}e^{-t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x'y''-x''y'}{(x')^3}=\frac{e^ty''-e^ty'}{e^{3t}}=e^{-2t}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right\}.$$

Setzt man diese Werte in die gegebene Gleichung, so erhält man:

$$e^{-t}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right\}+e^{-t}\frac{dy}{dt}+e^{-t}y=0,$$

also nach Reduction die wesentlich einfachere:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0.$$

2. Es sei wieder y eine durch die Gleichung

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dy^2}{dx^2},\ldots\right)=0$$

gegebene Function von x. An die Stelle der Variablen x und y sind zwei neue Variable u und t mittelst der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(t,u)\\ y&=\psi(t,u)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha$$

einzuführen, aber so, dass u als Function der unabhängigen Variablen t angesehen wird.

Bei dieser Substitution müssen wieder die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ etc. durch $\frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}$ etc. ausgedrückt werden.

Bezeichnet man analog wie früher $\frac{dx}{dt}=\varphi'(t,u)$ mit $x'$, $\frac{dy}{dt}=\psi'(t,u)$ mit $y'$ und die weiteren Ableitungen dieser Functionen mit $x''$, $x'''$, $y''$, $y'''$ etc., so gelten, weil ja schließlich x und y Functionen von t sind, die Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x'y''-x''y'}{(x')^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41$$

In denselben sind nur für x', x'', y', y'', die durch Differentiation der Gleichungen (α resultierenden Werte

$$x' = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{du}{dt},$$

$$y' = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{du}{dt},$$

$$x'' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\,\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{d^2u}{dt^2},$$

$$y'' = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial t\,\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{d^2u}{dt^2}$$

zu setzen.

**Beispiel:**

In der Gleichung $\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ sind an die Stelle der Variablen x und y die Variablen r und φ durch die Substitutionsgleichungen

$$x = r\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi$$

einzuführen, r sei hiebei als Function der unabhängigen Variablen φ zu betrachten.

Durch Differentiation der Substitutionsgleichungen erhält man:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -r\sin\varphi + \frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi \\ y' &= r\cos\varphi + \frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi \\ x'' &= -r\cos\varphi - 2\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + \frac{d^2r}{d\varphi^2}\cos\varphi \\ y'' &= -r\sin\varphi + 2\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{d^2r}{d\varphi^2}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3$$

Bei Berücksichtigung von (40 und (41 folgt:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{x'y'' - x''y'}{(x')^3}} = \frac{\left[(x')^2 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'},$$

zufolge (β ist aber:

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$$

$$x'y'' - x''y' = r^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2} + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2,$$

demnach schließlich:

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

## 2. Abschnitt.

## Integralrechnung.

### § 12. Grundaufgabe der Integralrechnung, Begriff des unbestimmten Integrals.

Die Grundaufgabe der Integralrechnung besteht darin, dass eine Function $F(x)$ gesucht wird, deren abgeleitete Function (Differentialquotient) $f(x)$ gegeben ist.

Weil, zufolge der Annahme $F'(x) = f(x)$, und $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$ ist, kann die gestellte Aufgabe auch wie folgt ausgesprochen werden:

Es ist jene Function aufzusuchen, deren Differential $f(x)dx$ gegeben ist.

Die Operation, welche zur Lösung dieser Aufgabe führt, nennt man die Integration des vorliegenden Differentials, und den Theil der Mathematik, welcher die Integration der verschiedenen Differentiale behandelt, die Integralrechnung.

Ist $dF(x) = f(x)dx$, so nennt man die Function $F(x)$ das Integral des Differentials $f(x)dx$ und bezeichnet dies in der Zeichensprache der Mathematik durch die Gleichung:

$$F(x) = \int f(x)dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42$$

Das Operationszeichen $\int$ der Integration ist ein langgezogenes S, weil, wie dies bei Behandlung des bestimmten Integrals gezeigt werden wird, das Integral eine Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen ist.

Aus dem Begriffe des Integrals folgt, dass die Integration und Differentiation entgegengesetzte Operationen sind, die sich gegenseitig aufheben.

Dies ist directe einzusehen, folgt aber auch aus (42, wenn man hierin statt $f(x)\,dx$, das gleichbedeutende Differential $dF(x)$ setzt:

$$F(x) = \int dF(x).$$

Weil $f(x)\,dx$ nicht nur das Differential von $F(x)$ ist, sondern auch von $F(x) + C$, wobei C eine beliebige Constante bedeutet, so muss der Allgemeinheit wegen beim unbestimmten Integral zur gefundenen Function $F(x)$ eine willkürliche additionelle Constante hinzugefügt werden, welche man die Integrationsconstante nennt und bei speciellen Aufgaben aus deren Bedingungen bestimmt.

Ist also

$$\left.\begin{aligned} F'(x) &= f(x), \\ \int f(x)\,dx &= F(x) + C \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (43$$

so ist

Während die Aufgabe der Differentialrechnung, nämlich die abgeleitete Function einer gegebenen Function zu finden, immer lösbar ist, ist dies bei der Grundaufgabe der Integralrechnung nicht mehr der Fall. Es lassen sich unzählige Functionen finden, die nicht als Ableitungen bekannter Functionen angesehen werden können, und ihre unbestimmten Integrale müssen als neue Functionen angesehen werden, welche nur durch ihre abgeleiteten Functionen definiert erscheinen. Dementsprechend gibt es auch kein allgemeines, zum Ziele führendes Verfahren zur Berechnung eines unbestimmten Integrals. vielmehr setzt sich die Integralrechnung aus einzelnen Methoden zusammen, deren passende Anwendung in den einzelnen Fällen die Lösung der Aufgabe ermöglicht, wenn diese überhaupt lösbar ist.

Die Integrationsmethoden bezwecken die Zurückführung der vorgelegten Integrale auf die Grundformeln oder auf schon bekannte Integrale.

## § 13. Grundformeln der Integralrechnung.

Aus dem Begriffe des unbestimmten Integrals folgt unmittelbar:

$$\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx, \quad \ldots\ldots \quad (44$$

wenn a eine Constante bedeutet, d. h.:

Der Wert eines Integrals wird nicht geändert, wenn ein unter dem Integralzeichen befindlicher constanter Factor selbe gesetzt wird, oder umgekehrt.

Denn, setzt man voraus, dass

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

so ist

$$f(x)\,dx = d\,F(x),$$

also

$$a \,.\, f(x)\,dx = a \,.\, d\,F(x) = d\,[a\,F(x)],$$

demnach

$$\int a f(x)\,dx = \int d\,[a\,F(x)] = a \,.\, F(x) + C = a \int f(x)\,dx.$$

Ferner ist

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x)]\,dx =$$
$$= \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx, \quad . \quad . \quad (45$$

d. h. das Integral einer Summe von Differentialen ist gleich der Summe der Integrale dieser Differentiale.

Wird nämlich wieder angenommen:

$$\int f_i(x)\,dx = F_i(x) + c_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n),$$

so ist

$$[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]\,dx =$$
$$= d\,[F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x)],$$

also

$$\int f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]\,dx = F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x) + C.$$

Mit Rücksicht auf die Annahme ist aber

$$\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx =$$
$$= F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x) + c_1 + c_2 + \ldots + c_n,$$

oder, wenn man

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n = C$$

setzt:

$$\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx =$$
$$= F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x) + C,$$

demnach thatsächlich:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots +$$
$$+ \int f_n(x)\,dx$$

oder kurz geschrieben

$$\int \Sigma f_i(x)\,dx = \Sigma \int f_i(x)\,dx.$$

Nachdem die Integralrechnung und die Differentialrechnung entgegengesetzte Operationen sind, so entsteht durch Umkehrung jeder Formel der Differentialrechnung eine Formel der Integralrechnung.

welches Verfahren schon als eine der Methoden der Integration angesehen werden könnte.

In dieser Weise gelangt man zu folgenden Fundamentalformeln:

Aus:

$$d\,x^{m+1} = (m+1)\,x^m\,d\,x$$

folgt die Formel

$$\int x^m\,d\,x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46$$

welche für jeden Wert von m mit Ausnahme von $m = -1$ gilt.

Aus:

$$d\,a^x = a^x\,l\,a\,.\,d\,x$$

folgt

$$\int a^x\,d\,x = \frac{a^x}{l\,a} + C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47$$

$$\int e^x\,d\,x = e^x + C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48$$

Aus:

$$d \sin x = \cos x\,d\,x$$

$$\int \cos x\,d\,x = \sin x + C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49$$

Aus:

$$d \cos x = -\sin x\,d\,x$$

$$\int \sin x\,d\,x = -\cos x + C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50$$

Aus:

$$d \operatorname{arc} \sin x = -d \operatorname{arc} \cos x = \frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C = -\operatorname{arc} \cos x + C \quad \ldots \quad (51$$

Aus:

$$d \operatorname{tang} x = \frac{d\,x}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{d\,x}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52$$

Aus:

$$d \operatorname{cotg} x = -\frac{d\,x}{\sin^2 x}$$

$$\int \frac{d\,x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53$$

Aus:

$$d \operatorname{arc tang} x = -d \operatorname{arc cotg} x = \frac{d\,x}{1+x^2}$$

$$\int \frac{d\,x}{1+x^2} = \operatorname{arc tang} x + C = -\operatorname{arc cotg} x + C \quad \ldots \quad (54$$

Aus:

$$\mathrm{d}\,\mathrm{l}\,\mathrm{x} = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{x}}{\mathrm{x}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{x}}{\mathrm{x}} = \mathrm{l}\,\mathrm{x} + \mathrm{C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55$$

Jede dieser Grundformeln lässt eine Verallgemeinerung zu, welche darin besteht, dass statt x (mit Rücksicht auf 22) eine Function u von x, z. B. $\mathrm{u} = \varphi(\mathrm{x})$ gedacht werden kann.

Auf diese Weise erhält man aus (46 die allgemeine Formel:

$$\int \overline{\varphi(\mathrm{x})}^{\mathrm{m}} \varphi'(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\,\mathrm{x} = \frac{\overline{\varphi(\mathrm{x})}^{\mathrm{m}+1}}{\mathrm{m}+1} + \mathrm{C} \ldots\ldots \quad (46\mathrm{a}$$

wenn man bedenkt, dass wegen $\mathrm{u} = \varphi(\mathrm{x})$ und $\mathrm{d}\,\mathrm{u} = \varphi'(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\,\mathrm{x}$ das Integral (46a in

$$\int \mathrm{u}^{\mathrm{m}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{u} = \frac{\mathrm{u}^{\mathrm{m}+1}}{\mathrm{m}+1} + \mathrm{C}$$

übergeht.

Analog erhält man aus den mit gleicher Nummer bezeichneten Grundformeln:

$$\int \mathrm{a}^{\varphi(\mathrm{x})} \varphi'(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\,\mathrm{x} = \frac{\mathrm{a}^{\varphi(\mathrm{x})}}{\mathrm{l}\,\mathrm{a}} + \mathrm{C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47\mathrm{a}$$

$$\int \mathrm{e}^{\varphi(\mathrm{x})} \varphi'(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\,\mathrm{x} = \mathrm{e}^{\varphi(\mathrm{x})} + \mathrm{C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48\mathrm{a}$$

$$\int \cos\varphi(\mathrm{x}) \cdot \varphi'(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\,\mathrm{x} = \sin\varphi(\mathrm{x}) + \mathrm{C} \ldots\ldots \quad (49\mathrm{a}$$

u. s. w.

## § 14. Die einfachen Integrationsmethoden.

*1. Substitution neuer Variablen.*

Bei Integralen von der Form:

$$\int f[\mathrm{x}, \varphi(\mathrm{x})]\,\mathrm{d}\,\mathrm{x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56$$

kann sehr oft die Integration ermöglicht werden durch die Substitution:

$$\mathrm{u} = \varphi(\mathrm{x}). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha$$

Durch Auflösen der Gleichung ($\alpha$ nach x findet man z. B.

$$\mathrm{x} = \psi(\mathrm{u})$$

und daraus

$$\mathrm{d}\,\mathrm{x} = \psi'(\mathrm{u})\,\mathrm{d}\,\mathrm{u},$$

es geht also das gegebene Integral über in:

$$\int f[\psi(\mathrm{u}), \mathrm{u}]\,\psi'(\mathrm{u})\,\mathrm{d}\,\mathrm{u}.$$

Bei zweckmäßiger Wahl der Substitution gelangt man auf diese Art häufig zu einer Grundformel der Integralrechnung oder zu einem einfacheren, schon bekannten Integral.

**Beispiele:**

1. $$J = \int (a + b\,x)^m \,d\,x.$$

Setzt man $a + b\,x = u$, also $b\,d\,x = d\,u$, $d\,x = \frac{1}{b}\,d\,u$, so erhält man:

$$J = \int u^m \frac{1}{b}\,d\,u = \frac{1}{b}\int u^m\,d\,u$$

und zufolge (46:

$$J = \frac{1}{b}\,\frac{u^{m+1}}{m+1} + C,$$

demnach nach Rückeinführung des x für u:

$$\int (a + b\,x)^m\,d\,x = \frac{(a + b\,x)^{m+1}}{b\,(m+1)} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57$$

2. $$J = \int \frac{3\,x\,d\,x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Setzt man $1 - x^2 = u$, also $-2\,x\,d\,x = d\,u$, $x\,d\,x = -\frac{d\,u}{2}$.

so erhält man:

$$J = \int -\frac{3}{2}\,\frac{d\,u}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,d\,u$$

und mit Rücksicht auf (46:

$$J = -\frac{3}{2}\,\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -3\sqrt{u} + C,$$

demnach:

$$\int \frac{3\,x\,d\,x}{\sqrt{1 - x^2}} = -3\sqrt{1 - x^2} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58$$

3. $$J = \int e^{-x^2}\,x\,d\,x.$$

Setzt man $-x^2 = u$, also $-2\,x\,d\,x = d\,u$, $x\,d\,x = -\frac{d\,u}{2}$, so erhält man:

$$J = \int e^u \cdot \left(-\frac{d\,u}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int e^u\,d\,u$$

und mit Rücksicht auf (48

$$J = -\frac{1}{2} e^{u} + C,$$

demnach

$$\int e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C. \quad \ldots \ldots \quad (59$$

4. $$J = \int \frac{dx}{ax + b}.$$

Setzt man $ax + b = u$, also $a\,dx = du$, $dx = \frac{du}{a}$, so erhält man:

$$J = \int \frac{1}{a} \frac{du}{u} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u}$$

und mit Rücksicht auf (55

$$J = \frac{1}{a} l\,u + C,$$

demnach

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} l\,(ax + b) + C. \quad \ldots \ldots \quad (60$$

5. $$J = \int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{b}{a} x\right)^2}.$$

Setzt man $\frac{b}{a} x = u$, also $\frac{b}{a} dx = du$, $dx = \frac{a}{b} du$, so erhält man:

$$J = \frac{1}{a^2} \int \frac{\frac{a}{b} du}{1 + u^2} = \frac{1}{a\,b} \int \frac{du}{1 + u^2}$$

und mit Rücksicht auf (54

$$J = \frac{1}{a\,b} \text{arc tang } u + C,$$

demnach

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{a\,b} \text{arc tang } \frac{b}{a} x + C. \quad \ldots \ldots \quad (61$$

6. $$J = \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \frac{1}{k} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{k}\right)^2}}$$

Setzt man $\frac{x}{k} = u$, also $\frac{1}{k} dx = du$, $dx = k\,du$, so erhält man:

$$J = \frac{1}{k} \int \frac{k\,du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

und mit Rücksicht auf (51

$$J = \arcsin u + C,$$

demnach

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{k} + C \quad \ldots \ldots \quad (62$$

In derart einfachen Fällen, wie die hier angeführten, kann bei einiger Übung die Integration ohne Substitution neuer Variablen, bei Berücksichtigung der verallgemeinerten Grundformeln, ausgeführt werden.

Zur richtigen Wahl der Substitution ist es nothwendig zu erkennen, auf welche der Grundformeln das vorgelegte Integral wahrscheinlich zurückgeführt werden kann. Hat man diese aber einmal erkannt, so kann die Substitution oft durch einfache Überlegung erspart werden.

Der Gedankengang bei dieser Art der Integration soll an einigen einfachen Integralen gezeigt werden, und die eventuelle Substitution hiebei stets angegeben werden.

Als Übergang auf neue Beispiele mögen zwei schon durch die Substitutionsmethode gelöste Aufgaben, nämlich (1 und (5, in der angedeuteten Weise nochmals gelöst werden.

Beim Beispiele 1

$$J = \int (a + bx)^m dx$$

hätte man folgendermaßen schließen können. Das gegebene Integral würde direct auf die Grundformeln (46a und (46 führen, wenn statt $dx$, $d(a + bx)$ stünde. Nun unterscheidet sich aber $dx$ vom $d(a + bx) = b\,dx$ nur durch den constanten Factor b; setzt man somit $d(a + bx)$ statt $dx$, so multipliciert man dadurch die Function unter dem Integralzeichen mit b, welche Operation durch Division mit b vor dem Integralzeichen aufgehoben wird. Man kann somit schreiben:

$$J = \frac{1}{b}\int (a + b\,x)^m \,d(a + b\,x)$$

und erhält zufolge der Formel (46a

$$J = \frac{1}{b}\cdot\frac{(a + b\,x)^{m+1}}{m+1} + C.$$

Beim Beispiele 5

$$J = \int \frac{d\,x}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{d\,x}{1 + \left(\frac{b}{a}\,x\right)^2}$$

kann man sofort schließen, dass dieses Integral sich auf die Grundformel (54 zurückführen lässt, wenn $d\left(\frac{b}{a}\,x\right)$ statt $d\,x$, gesetzt wird, wodurch nur die Function unter dem Integralzeichen mit $\frac{b}{a}$ multipliciert wird, was durch Division mit derselben Größe vor dem Integralzeichen aufgehoben wird. Man erhält somit:

$$J = \frac{1}{a\,b}\int \frac{d\left(\frac{b}{a}\,x\right)}{1 + \left(\frac{b}{a}\,x\right)^2},$$

also zufolge (54

$$J = \frac{1}{a\,b}\,\text{arc tang}\,\frac{b}{a}\,x + C.$$

7. $$J = \int \text{tang}\,x\,d\,x = \int \frac{\sin x\,d\,x}{\cos x}.$$

Hätte man im Zähler $-\sin x\,d\,x = d\cos x$, so wäre das gegebene Integral direct auf die verallgemeinerte Grundformel (55 zurückgeführt.

Schreibt man also in J statt $\sin x\,d\,x$, $d\cos x$, so multipliciert man die Function unter dem Integralzeichen mit $-1$, welche Operation durch Division mit $-1$ vor dem Integralzeichen aufgehoben wird. Es ist also:

$$J = -\int \frac{d\cos x}{\cos x},$$

somit zufolge (55

$$J = \int \text{tang}\,x\,d\,x = -\,l\cos x + C \quad \ldots\ldots \quad (63$$

eventuelle Substitution $\cos x = u$).

Durch analoges Schließen erhält man:

$$8.\quad \int \operatorname{cotg} x\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = l \sin x + C \quad . \quad . \quad (64$$

(eventuelle Substitution $\sin x = u$).

$$9.\quad \int \cos(a x)\, dx = \frac{1}{a} \int \cos(a x)\, d(a x) = \frac{1}{a} \sin(a x) + C \quad . \quad . \quad (65$$

(eventuelle Substitution $a x = u$).

$$10.\quad \int \frac{x^{n-1}\, dx}{a + b x^n} = \frac{1}{n b} \int \frac{d(a + b x^n)}{a + b x^n} = \frac{1}{n b} l(a + b x^n) + C$$

(eventuelle Substitution $a + b x^n = u$).

$$11.\quad \int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = \frac{1}{2 b^2} \int (a^2 + b^2 x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(a^2 + b^2 x^2) =$$

$$= \frac{1}{b^2} \sqrt{a^2 + b^2 x^2} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66$$

(eventuelle Substitution $a^2 + b^2 x^2 = u$).

u. s. w.

**Bemerkung:** Die Ergänzung eines Theiles der Function zum Differentialquotienten eines anderen Theiles derselben ist mit Rücksicht auf (44 nur durch Constante gestattet, d. h. es darf keinesfalls unter dem Integralzeichen mit der Integrationsvariablen multipliciert werden im Glauben, durch Division vor dem Integralzeichen diese Operation aufheben zu können.

### 2. *Umformung der Function unter dem Integralzeichen.*

Bei einzelnen Integralen ist die Zurückführung derselben auf eine der Grundformeln durch zweckmäßige Umformung der Function unter dem Integralzeichen möglich.

Das Wesen dieser Methode ist am deutlichsten an einigen Beispielen zu ersehen:

1. $$J = \int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\, dx.$$

Multipliciert man Zähler und Nenner des Bruches unter dem Wurzelzeichen mit $1 + x$. so erhält man:

$$J = \int \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

und mit Rücksicht auf (45

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

also

$$J = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C \quad \ldots\ldots \quad (67$$

2. $$J = \int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx.$$

Addiert und subtrahiert man die Einheit im Zähler des Bruches, so hat man

$$J = \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{dx}{1+x^2},$$

oder

$$J = \int (x^2-1)\,dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \int x^2\,dx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2},$$

demnach

$$J = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C. \quad \ldots\ldots \quad (68$$

3. $$J = \int \frac{dx}{1-x^2}.$$

Hier kann man setzen:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

und erhält

$$J = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x},$$

also

$$J = \frac{1}{2}\,l(1+x) - \frac{1}{2}\,l(1-x) + C,$$

d. h.

$$J = l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C \quad \ldots\ldots \quad (69$$

4. $$J = \int \frac{x\,dx}{2+2x^2+x^4}.$$

Weil

$$2 + 2x^2 + x^4 = 1 + (1 + x^2)^2,$$

so ist

$$J = \int \frac{x\,dx}{1 + (1 + x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1 + x^2)}{1 + (1 + x^2)^2},$$

mithin

$$J = \frac{1}{2}\,\text{arc tang}\,(1 + x^2)$$

u. s. w.

*3. Partielle (theilweise) Integration.*

Bildet man das Differential eines Productes u . v, dessen Factoren u und v Functionen von x sind, so erhält man:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Durch Integration dieser Gleichung folgt

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du,$$

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du,$$

oder

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \quad \ldots\ldots\ldots \quad (70$$

Die Gleichung (70 als Grundformel der partiellen Integration charakterisiert eine der wichtigsten Methoden der Integration.

Angenommen, dass bei dem vorgelegten Integral die Function unter dem Integralzeichen als Product zweier Functionen $f(x)$ und $\varphi'(x)$ darstellbar ist, von welchen die eine, nämlich $\varphi'(x)$, als Differentialquotient einer Function $\varphi(x)$ zu erkennen ist, d. h., dass $\int \varphi'(x)\,dx$ bekannt ist, so kann man setzen

$$f(x) = u, \text{ also } f'(x)\,dx = du$$

und

$$\varphi'(x)\,dx = dv, \text{ also } \varphi(x) = v$$

und erhält zufolge (70

$$\int f(x)\varphi'(x)\,dx = f(x)\varphi(x) - \int \varphi(x) f'(x)\,dx,$$

wo das neugebildete Integral auf der rechten Seite möglicherweise leicht zu integrieren ist, indem vielleicht durch die Differentiation von $f(x)$ eine unbequeme Function entfernt wurde u. s. w.

Durch einige Beispiele soll dies anschaulich gemacht werden:

1. $$J = \int x^n \, l\,x \, dx.$$

Setzt man hier:

$$x^n \, dx = dv. \text{ also } v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

und

$$l\,x = u. \text{ also } du = \frac{dx}{x},$$

so findet man:

$$J = \int \underbrace{l\,x}_{u} \underbrace{x^n \, dx}_{dv} = \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{v} \cdot \underbrace{l\,x}_{u} - \int \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{v} \underbrace{\frac{dx}{x}}_{du}$$

oder

$$J = \frac{x^{n+1}}{n+1} l\,x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} l\,x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C,$$

demnach

$$J = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left( l\,x - \frac{1}{n+1} \right) + C \quad \ldots \ldots \quad (72$$

2. $$J = \int l\,x \, dx$$

So einfach dieses Integral aussieht, erscheint es nicht unter den Grundformeln, weil $l\,x$ nicht durch Differentiation einer einfachen Function entstanden sein kann.

Wendet man auf dasselbe die Methode der partiellen Integration an. und setzt hiebei:

$$u = l\,x, \text{ also } du = \frac{dx}{x}$$

$$dx = dv. \text{ also } v = x.$$

so findet man:

$$J = \int \underbrace{l\,x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{l\,x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{dx}{x}}_{du} = x\,l\,x - \int dx = x \cdot l\,x - x + C,$$

demnach

$$\int l\,x \, dx = x(l\,x - 1) + C \quad \ldots \ldots \quad (71$$

Wie zu ersehen ist, wurde durch Anwendung dieser Methode $l\,x$ durch Differentiation weggeschafft.

3. $$J = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Setzt man:

$$u = x. \text{ also } du = dx$$

und

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = dv, \text{ also } v = -\sqrt{1-x^2},$$

so findet man:

$$J = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{dv} = -\underbrace{x}_{u}\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{v} - \int \underbrace{-\sqrt{1-x^2}}_{v}\underbrace{dx}_{du},$$

mithin

$$J = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\,dx,$$

transformiert man das Integral rechts, indem man unter dem Integralzeichen mit $\sqrt{1-x^2}$ multipliciert und dividiert. so erhält man:

$$J = -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

oder

$$J = -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - J,$$

d. h.

$$2J = -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$$

demnach

$$J = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C \quad \ldots \quad 73$$

Dieses verhältnismäßig einfache Beispiel zeigt schon, dass man nicht immer mit einer Methode das Auslangen findet, sondern häufig mehrere Methoden nacheinander anwenden muss, um zum Resultate zu gelangen. Wie dies geschieht, ist aus den folgenden Paragraphen zu ersehen, in welchen allgemeine Anhaltspunkte gegeben werden, wie die Integrale je nach der Gattung der Functionen unter dem Integral-

zeichen zu behandeln sind.

## § 15. Integration der rationalen Functionen.

### *1. Die rationale ganze Function.*

Ist die unter dem Integralzeichen befindliche Function eine rationale ganze Function, so bietet, wegen des einfachen Baues derselben, die Integration keine Schwierigkeiten.

Die allgemeine Form einer rationalen ganzen Function ist:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

(n eine ganze Zahl) demnach

$$J = \int f(x)\,dx = \int \{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_{n-1} x + a_n\}\,dx,$$

oder zufolge (45 und (44

$$\int f(x)\,dx = a_0 \int x^n\,dx + a_1 \int x^{n-1}\,dx + a_2 \int x^{n-2}\,dx + \ldots +$$

$$+ a_{n-1} \int x\,dx + a_n \int dx$$

wodurch die Aufgabe auf die Grundformel (46 zurückgeführt, also immer lösbar ist.

Durch Ausführung der angezeigten Integrationen rechts vom Gleichheitszeichen erhält man:

$$\int f(x)\,dx = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \frac{a_2}{n-1} x^{n-1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2} x^2 +$$

$$+ a_n x + C,$$

d. i. eine Gleichung, welche deutlich zeigt, dass das Integral einer rationalen ganzen Function wieder eine rationale ganze Function und nur um einen Grad höher ist.

### *2. Die rational gebrochene Function.*

Jede gebrochene rationale Function kann als Quotient von zwei rationalen ganzen Functionen dargestellt, also auf die Form gebracht werden.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

in welcher $f(x)$ und $\varphi(x)$ rationale ganze Functionen bedeuten.

Man bringt sie auf diese Form, indem man alle angezeigten Operationen ausführt.

So ist beispielsweise durch

$$y = \frac{\frac{2x-3}{x-2} + 2x}{\frac{x+2}{x-1}} + 5x$$

y als rationale gebrochene Function von x gegeben, denn man findet:

$$v = \frac{2x^2-2x-3}{\frac{x-2}{x+2}} + 5x = \frac{2x^3-4x^2-x+3}{x^2-4} + 5x,$$

$$v = \frac{7x^3-4x^2-21x+3}{x^2-4},$$

und hat damit die eingangs angegebene Form hergestellt.

Jede rational gebrochene Differentialfunction kann durch Anwendung der Substitutionsmethode und der Umformung in geschlossener Form integriert werden.

Bevor die allgemeineren Fälle behandelt werden, soll die Integration einiger Grundformen gezeigt werden:

1. $$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n}\,dx = \int (x-a)^{-n}\,d(x-a) =$$

$$= \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \quad \ldots \quad (60$$

2. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} l(ax+b) + C \quad \ldots \quad (60a$$

analog

$$\int \frac{dx}{x-a} = l(x-a) + C \quad \ldots \quad 60b$$

3. $$\int \frac{dx}{a \pm bx} = \pm \frac{1}{b} l(a \pm bx) + C \quad \ldots \quad (60c$$

[Substitution $u = (a \pm bx)$].

4. $$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab} \text{arc tang} \frac{b}{a} x + C \quad \ldots \quad 61$$

[Substitution $u = \frac{b}{a} x$.]

5. $$J = \int \frac{dx}{a^2-b^2x^2}$$

Bei diesem Integral gelangt man durch Umformung (zur entsprechenden Substitution) zum Ziel.

Es ist nämlich:

$$J = \int \frac{dx}{(a+bx)(a-bx)} = \int \frac{dx}{\frac{a+bx}{a-bx}(a-bx)^2} = \int \frac{1}{\frac{a+bx}{a-bx}} \cdot \frac{dx}{(a-bx)^2}$$

Da man durch Differentiation des Bruches $\frac{a+bx}{a-bx}$ einen Bruch mit constantem Zähler und dem Nenner $(a-bx)^2$ erhalten wird, so kann man daraus schließen, dass die Function unter dem Integralzeichen — abgesehen von constanten Factoren — durch Differentiation von

$$l\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)$$

entstanden ist:

$$d\left(l\frac{a+bx}{a-bx}\right) = \frac{1}{\frac{a+bx}{a-bx}} \cdot \frac{2ab}{(a-bx)^2} dx.$$

Man hat somit:

$$J = \frac{1}{2ab}\int \frac{1}{\frac{a+bx}{a-bx}} \cdot \frac{2ab}{(a-bx^2)} dx = \frac{1}{2ab}\int d\left(l\frac{a+bx}{a-bx}\right),$$

d. h.

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab} l\frac{a+bx}{a-bx} + C$$

oder

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{ab} l\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}} + C \quad \ldots\ldots (74$$

Auf dieselbe Art erhält man:

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} l\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C \quad \ldots\ldots (74a$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a} l\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} + C \quad \ldots\ldots (74b$$

6. Das Integral

$$J = \int \frac{A+Bx}{a+bx+cx^2} dx$$

lässt sich auf (61 oder (71 zurückführen.

So ist beispielsweise durch

$$y = \frac{\dfrac{2x-3}{x-2} + 2x}{\dfrac{x+2}{x-1}} + 5x$$

y als rationale gebrochene Function von x gegeben, denn man findet:

$$y = \frac{\dfrac{2x^2-2x-3}{x-2}}{\dfrac{x+2}{x-1}} + 5x = \frac{2x^3-4x^2-x+3}{x^2-4} + 5x,$$

$$y = \frac{7x^3-4x^2-21x+3}{x^2-4},$$

und hat damit die eingangs angegebene Form hergestellt.

Jede rational gebrochene Differentialfunction kann durch Anwendung der Substitutionsmethode und der Umformung in geschlossener Form integriert werden.

Bevor die allgemeineren Fälle behandelt werden, soll die Integration einiger Grundformen gezeigt werden:

1. $$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n}\,dx = \int (x-a)^{-n}\,d(x-a) =$$

$$= \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \quad \ldots \quad (60$$

2. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} l(ax+b) + C \quad \ldots \quad (60a$$

analog

$$\int \frac{dx}{x-a} = l(x-a) + C \quad \ldots \quad (60b$$

3. $$\int \frac{dx}{a \pm bx} = \pm \frac{1}{b} l(a \pm bx) + C \quad \ldots \quad (60c$$

[Substitution $u = (a \pm bx)$].

4. $$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} x + C \quad \ldots \quad (61$$

[Substitution $u = \frac{b}{a} x$.]

5. $$J = \int \frac{dx}{a^2-b^2x^2}$$

Bei diesem Integral gelangt man durch Umformung (zur entsprechenden Substitution) zum Ziel.

Es ist nämlich:

$$J = \int \frac{dx}{(a+bx)(a-bx)} = \int \frac{dx}{\frac{a+bx}{a-bx}(a-bx)^2} = \int \frac{1}{\frac{a+bx}{a-bx}} \cdot \frac{dx}{(a-bx)^2}.$$

Da man durch Differentiation des Bruches $\frac{a+bx}{a-bx}$ einen Bruch mit constantem Zähler und dem Nenner $(a-bx)^2$ erhalten wird, so kann man daraus schließen, dass die Function unter dem Integralzeichen — abgesehen von constanten Factoren — durch Differentiation von

$$l\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)$$

entstanden ist:

$$d\left(l\frac{a+bx}{a-bx}\right) = \frac{1}{\frac{a+bx}{a-bx}} \cdot \frac{2ab}{(a-bx)^2} dx.$$

Man hat somit:

$$J = \frac{1}{2ab}\int \frac{1}{\frac{a+bx}{a-bx}} \cdot \frac{2ab}{(a-bx^2)} dx = \frac{1}{2ab}\int d\left(l\frac{a+bx}{a-bx}\right),$$

d. h.

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab} l\frac{a+bx}{a-bx} + C$$

oder

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{ab} l\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}} + C \quad \ldots\ldots (74$$

Auf dieselbe Art erhält man:

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} l\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C \quad \ldots\ldots (74a$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a} l\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} + C \quad \ldots\ldots (74b$$

6. Das Integral

$$J = \int \frac{A+Bx}{a+bx+cx^2} dx$$

lässt sich auf (61 oder (71 zurückführen.

Hebt man $\frac{1}{c}$ als Factor heraus und zerlegt das Integral in zwei Integrale, so erhält man:

$$J = \frac{1}{c}\int \frac{A + Bx}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x + x^2}\,dx = \frac{A}{c}\int \frac{dx}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x + x^2} + \frac{B}{c}\int \frac{x\,dx}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x + x^2}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$\frac{a}{c} = q. \qquad \frac{b}{c} = 2p.$$

so ist

$$J = \frac{A}{c}\int \frac{dx}{x^2 + 2px + q} + \frac{B}{c}\int \frac{x\,dx}{x^2 + 2px + q}.$$

Diese beiden Integrale sollen nun der Reihe nach abgehandelt werden.

Das erste

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 2px + q}$$

geht durch Umformung ($p^2$ im Nenner addieren und subtrahieren) über in

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 2px + p^2 + q - p^2} = \int \frac{dx}{(x + p)^2 + (q - p^2)}.$$

Setzt man darin

$$x + p = u. \quad \text{also} \quad dx = du,$$

so erhält man

$$J_1 = \int \frac{du}{u^2 + (q - p^2)}.$$

Je nachdem nun $q - p^2 \gtrless 0$, hat man es mit den bereits bekannten Formen

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2}; \quad \int \frac{dx}{x^2}; \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$$

zu thun.

*a*) Ist $q - p^2 > 0$,

so hat man zufolge (61 ($b^2 = 1$, $a^2 = q - p^2$):

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{q - p^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{u}{\sqrt{q - p^2}} + C,$$

also

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{q - p^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x + p}{\sqrt{q - p^2}} + C.$$

*b)* **Ist** $q - p^2 = 0$.

**so hat man**

$$J_1 = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C,$$

**demnach**

$$J_1 = -\frac{1}{x + p} + C.$$

*c)* **Ist schließlich** $q - p^2 < 0$, **dann ist**

$$q - p^2 = -(p^2 - q),$$

**wobei** $p^2 - q$ **wesentlich positiv ist, und man hat zufolge (74b** $a^2 = p^2 - q$)

$$J_1 = \frac{1}{2\sqrt{p^2 - q}} l \frac{u - \sqrt{p^2 - q}}{u + \sqrt{p^2 - q}} + C,$$

also

$$J_1 = \frac{1}{2\sqrt{p^2 - q}} l \frac{x + p - \sqrt{p^2 - q}}{x + p + \sqrt{p^2 - q}} + C.$$

**Fasst man alle drei Fälle zusammen, so gelangt man zur folgenden Formel:**

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2px + q} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{q - p^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x + p}{\sqrt{q - p^2}} + C; & \text{wenn } q - p^2 > 0 \\ -\frac{1}{x + p} + C & ; \quad \text{„} \quad q - p^2 = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{p^2 - q}} l \frac{x + p - \sqrt{p^2 - q}}{x + p + \sqrt{p^2 - q}} & ; \quad \text{„} \quad q - p^2 < 0 \end{cases} \quad (75$$

**Das zweite Integral**

$$J_2 = \int \frac{x\,dx}{x^2 + 2px + q}$$

**kann durch Addieren und Subtrahieren von p im Zähler zweckmäßig umgeformt werden.**

Man findet dann:

$$J_2 = \int \frac{x+p-p}{x^2+2px+q}\,dx = \int \frac{x+p}{x^2+2px+q}\,dx - p\int \frac{dx}{x^2+2px+q}$$

oder

$$J_2 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2p}{x^2+2px+q}\,dx - p\int \frac{dx}{x^2+2px+q}.$$

Das Integral $J_2$ ist somit in die Summe zweier Integrale zerlegt, von welchen das zweite bereits bekannt ist (Formel 75).

Das erste dieser Integrale

$$\int \frac{2x+2p}{x^2+2px+q}\,dx$$

ist direct eine Grundformel, denn es befindet sich im Zähler das vollständige Differential des Nenners:

$$\int \frac{2x+2p}{x^2+2px+p}\,dx = l(x^2+2px+q)+C.$$

Mithin ist:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2px+q} = \frac{1}{2}l(x^2+2px+q) - p\int \frac{dx}{x^2+2px+q} + C \ldots (76$$

wobei das rechts vom Gleichheitszeichen stehende Integral durch (75 gegeben erscheint.

In allen Fällen, in welchen die Function unter dem Integralzeichen eine compliciertere rational gebrochene Function ist, kann dieselbe, wie eingangs angeführt, auf die Form

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

gebracht werden, in welcher $f(x)$ und $\varphi(x)$ rationale ganze Functionen sind.

Ist der Bruch $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ kein echter Bruch, d. h. ist die Function im Zähler $f(x)$ vom höheren oder gleich hohem Grade wie jene im Nenner $\varphi(x)$, so kann dieser Bruch durch theilweise Ausführung der angezeigten Division als Summe einer rationalen ganzen und einer echt gebrochenen Function dargestellt werden.

So ist beispielsweise

$$\frac{x^4-x+2}{x^2-2x-3}$$

eine unecht gebrochene Function und kann, weil

$$(x^4 - x + 2) : (x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x + 7 + \frac{19x + 23}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\begin{array}{l} x^4 - 2x^3 - 3x^2 \\ \hline 2x^3 + 3x^2 - x + 2 \\ 2x^3 - 4x^2 - 6x \\ \hline 7x^2 + 5x + 2 \\ 7x^2 - 14x - 21 \\ \hline 19x + 23 \end{array}$$

durch

$$(x^2 + 2x + 7) + \frac{19x + 23}{x^2 - 2x - 3}$$

also durch eine Summe aus einer rationalen ganzen und einer rationalen echtgebrochenen Function ersetzt werden.

Das Integral einer unecht gebrochenen Function kann also stets als Summe zweier Integrale dargestellt werden, von welchen eines eine rationale ganze, das zweite eine rationale, echt gebrochene Function unter dem Integralzeichen enthält.

Die Integration einer rationalen ganzen Function ist immer möglich, und wurde bereits besprochen, so dass also hier nur noch die Integration einer echt gebrochenen rationalen Function zu besprechen erübrigt.

Ist

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

ein complicierterer echter Bruch, so kann derselbe durch entsprechende Umformung als Summe mehrerer einfacherer Brüche, sogenannter **Partialbrüche**, dargestellt werden. Zu dieser Darstellung ist die Kenntnis einiger Sätze aus der Theorie der höheren Gleichungen erforderlich, welche hier nur kurz angeführt werden sollen, da sie im zweiten Abschnitte näher untersucht und bewiesen werden.

Jede Gleichung des $n^{ten}$ Grades kann durch Transformation auf die Form gebracht werden

$$\varphi(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

in welcher $a_1, a_2, \ldots a_n$ ganze Zahlen sind, von welchen einzelne auch Null sein können.

Eine Gleichung $n^{ten}$ Grades hat n Wurzeln.

Sind $w_1, w_2, w_3 \ldots w_n$ diese n Wurzeln, so nennt man die Binome $x - w_1, x - w_2, x - w_3, \ldots$ die Wurzelfactoren der Gleichung,

und ist das Gleichungspolynom $\varphi(x)$ gleich dem Producte sämmtlicher Wurzelfactoren

$$\varphi(x) = (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3) \ldots (x - w_n).$$

Dabei können die Wurzeln real, imaginär oder gruppenweise untereinander gleich sein.

Sind insbesonders p reale Wurzeln $a_p$ gleich, so gibt jede derselben den Wurzelfactor $x - a_p$, demnach geben die p gleichen Wurzeln, p solcher Wurzelfactoren, deren Product $(x - a_p)^p$ ist. Hat also die Gleichung je p, q, r, s gleiche reale Wurzeln $a_p$, $a_q$, $a_r$, $a_s$, so ist das Gleichungspolynom $\varphi(x)$ in der Form darstellbar

$$\varphi(x) = (x - a_p)^p (x - a_q)^q (x - a_r)^r (x - a_s)^s.$$

Imaginäre Wurzeln einer Gleichung mit realen Coefficienten treten nur paarweise als conjugierte Wurzelpaare auf. Das Product der Wurzelfactoren eines solchen Paares complex conjugierter Wurzeln ist ein quadratisches Trinom mit realen Coefficienten von der Form

$$x^2 + 2px + q.$$

Hat also eine Gleichung mehrere Paare conjugierter Wurzeln, so kann für jedes derselben das Product der Wurzelfactoren zu einem derartigen quadratischen Trinom zusammengezogen werden.

Demzufolge kann jede algebraische rationale Function $\varphi(x)$ als ein Product dargestellt werden

$$\varphi(x) = (x - w_1)(x - w_2) \ldots (x - a_p)^p (x - a_q)^q \ldots (x^2 + 2p_1 x + q_1) \ldots$$

wenn die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ oder, wie man zu sagen pflegt, die Nullstellen der Function bekannt sind.

Bringt man also die Function $\varphi(x)$ im Nenner des gegebenen Bruches,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

durch Transformation auf die Form

$$\varphi(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

in welcher der Coefficient der höchsten Potenz 1 und alle anderen Coefficienten ganze Zahlen sind, so kann der gegebene Bruch, wenn man die Wurzeln von $\varphi(x) = 0$ kennt, auf die Form gebracht werden:

$$\frac{f(x)}{(x - w_1)(x - w_2) \ldots (x - a_p)^p (x - a_q)^q \ldots (x^2 + 2p_1 x + q_1) \ldots}$$

Dieser Bruch kann nun als Summe von Brüchen, sogenannten Partialbrüchen, angesehen werden, deren Nenner die Factoren des gemeinschaftlichen Nenners sind, und deren Zähler so bestimmt werden müssen, dass die Summe dieser Partialbrüche dem gegebenen Bruche gleich ist, was, wie die folgenden Beispiele lehren werden, immer möglich wird.

1. Der echte Bruch

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

ist in Partialbrüche zu zerlegen.

Die Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(x) \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

sind $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ und $w_3 = 3$, demnach ist

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{2x^2 + 3x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Bezeichnet man nun die noch unbekannten Zähler der Partialbrüche mit $z_1$, $z_2$ und $z_3$, so muss die Gleichung bestehen

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{z_1}{x-1} + \frac{z_2}{x-2} + \frac{z_3}{x-3},$$

aus welcher durch Summierung der Partialbrüche

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{z_1(x-2)(x-3) + z_2(x-1)(x-3) + z_3(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)},$$

oder, wenn man den Zähler rechts nach Potenzen von x ordnet,

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{(z_1 + z_2 + z_3)x^2 - (5z_1 + 4z_2 + 3z_3)x + (6z_1 + 3z_2 + 2z_3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

folgt. Soll nun die letzte Gleichung für alle Werte des x bestehen, so müssen die Zähler beider Brüche identisch, also die Coefficienten gleicher Potenzen des x einander gleich sein. Setzt man nun diese Coefficienten einander gleich

$$z_1 + z_2 + z_3 = 2,$$
$$5z_1 + 4z_2 + 3z_3 = -3.$$
$$6z_1 + 3z_2 + 2z_3 = 1,$$

so erhält man ebensoviele in Bezug auf die unbekannten Zähler $z$ lineare Gleichungen als Partialbrüche vorhanden sind, und durch diese Gleichungen sind alle Zähler eindeutig bestimmt.

Im gegebenen Falle findet man $z_1 = 3$, $z_2 = -15$, $z_3 = 14$, mithin

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{3}{x-1} - \frac{15}{x-2} + \frac{14}{x-3},$$

wodurch die gestellte Aufgabe gelöst ist.

Jeder realen einfachen Wurzel der Gleichung $\varphi(x) = 0$ entspricht, wenn $\varphi(x)$ der Nenner der gebrochenen Function ist, ein Partialbruch, dessen Zähler eine bestimmte Constante und dessen Nenner der entsprechende Wurzelfactor ist.

2. Es ist die Function

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{4x^3 + 16x - 3}{(x-1)^4}$$

in Partialbrüche zu zerlegen.

In diesem Beispiel hat die Function $\varphi(x)$ im Nenner eine vierfache Nullstelle 1, d. h. die Gleichung $(x-1)^4 = 0$ hat vier gleiche Wurzeln 1.

Würde man auch hier wie im vorigen Beispiel jeden der Wurzelfactoren $x - 1$ als Nenner eines Partialbruches ansetzen, so würde man vier Brüche mit demselben Nenner $x - 1$ erhalten, und der gemeinschaftliche Nenner derselben wäre $x - 1$ und nicht $(x-1)^4$.

In einem derartigen Falle führt aber folgende Zerlegung zum Ziele:

$$\frac{4x^3 + 16x - 3}{(x-1)^4} = \frac{z_1}{x-1} + \frac{z_2}{(x-1)^2} + \frac{z_3}{(x-1)^3} + \frac{z_4}{(x-1)^4};$$

addiert man nämlich die Partialbrüche, so erhält man:

$$\frac{4x^3 + 16x - 3}{(x-1)^4} = \frac{z_1(x-1)^3 + z_2(x-1)^2 + z_3(x-1) + z_4}{(x-1)^4},$$

oder wenn man nach Potenzen von x ordnet:

$$\frac{4x^3 + 16x - 3}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{z_1 x^3 + (z_2 - 3z_1)x^2 + (3z_1 - 2z_2 + z_3)x + (z_4 + z_2 - z_1 - z_3)}{(x-1)^4}.$$

Setzt man nun, aus demselben Grunde wie früher, die Coefficienten der gleichen Potenzen des x in den Zählern gleich, so erhält man ebensoviele lineare Gleichungen als Zähler vorhanden sind.

$$z_1 = 4,$$

$$z_2 - 3z_1 = 0,$$

$$3z_1 - 2z_2 + z_3 = 16,$$

$$z_4 + z_2 - z_1 - z_3 = -3.$$

Durch diese sind die unbekannten Zähler eindeutig bestimmt. Im gegebenen Falle $z_1 = 4$, $z_2 = 12$, $z_3 = 28$, $z_4 = 17$, mithin

$$\frac{4x^3 + 16x - 3}{(x-1)^4} = \frac{4}{x-1} + \frac{12}{(x-1)^2} + \frac{28}{(x-1)^3} + \frac{17}{(x-1)^4}.$$

Ist $\varphi(x)$ der Nenner einer rationalen gebrochenen Function, so entsprechen jeder nfachen Wurzel der Gleichung $\varphi(x) = 0$ n Partialbrüche, deren Zähler bestimmte Constante sind und deren Nenner den dieser Wurzel entsprechenden Wurzelfactor in Potenzen von der 1. bis zur $n^{ten}$ enthalten.

3. Es ist die rational gebrochene Function

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4x + 1}{[x^2 - 2x + 2][x^2 - 4x + 5]}$$

in Partialbrüche zu zerlegen.

Die Factoren des Nenners haben nur complexe Nullstellen, sind somit Producte von Paaren complex conjugierter Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$. Um also Brüche mit complexen Nennern zu vermeiden, wird man in der Zerlegung des Nenners in Factoren nicht weiter gehen dürfen.

Der gegebene Bruch kann daher nur als Summe zweier Brüche dargestellt werden, deren Nenner die beiden trinomischen Factoren $x^2 - 2x + 2$ und $x^2 - 4x + 5$ sind. Es ist aber auch leicht einzusehen, dass die Zähler dieser Brüche als lineare Functionen des x angesetzt werden müssen, weil die Summe der Brüche die dritte Potenz des x im Zähler enthalten muss.

Dementsprechend wird hier folgende Zerlegung vorgenommen werden müssen:

$$\frac{2x^3+3x^2+4x+1}{(x^2-2x+2)(x^2-4x+5)} = \frac{A_1x+B_1}{[x^2-2x+2]} + \frac{A_2x+B_2}{x^2-4x+5},$$

die sich als brauchbar erweist, wenn die Constanten $A_1$. $B_1$. $A_2$. $B_2$ bestimmt werden können.

Addiert man wieder die Partialbrüche, so erhält man:

$$\frac{2x^3+3x^2+4x+1}{(x^2-2x+2)(x^2-4x+5)} =$$

$$= \frac{(A_1x+B_1)(x^2-4x+5)+(A_2x+B_2)(x^2-2x+2)}{(x^2-2x+2)(x^2-4x+5)},$$

und wenn man rechts nach Potenzen von x ordnet.

$$\frac{2x^3+3x^2+4x+1}{(x^2-2x+2)(x^2-4x+5)} =$$

$$\frac{(A_1+A_2)x^3-(4A_1+2A_2-B_1-B_2)x^2+(5A_1+2A_2-4B_1-2B_2)x+(5B_1+2B_2)}{(x^2-2x+2)(x^2-4x+5)}.$$

Setzt man nun wieder die Coefficienten gleicher Potenzen des x in den Zählern gleich, so erhält man ebensoviele lineare Gleichungen als zu bestimmende Constante vorhanden sind:

$$A_1+A_2=2,$$
$$4A_1+2A_2-B_1-B_2=-3,$$
$$5A_1+2A_2-4B_1-2B_2=4,$$
$$5B_1+2B_2=1.$$

Durch diese sind die Constanten eindeutig bestimmt, und im gegebenen Falle ist $A_1=\frac{16}{5}$, $B_1=-\frac{43}{5}$, $A_2=-\frac{6}{5}$, $B_2=\frac{110}{5}$. Mithin

$$\frac{2x^3+3x^2+4x+1}{(x^2-2x+2)(x^2-4x+5)} = \frac{1}{5}\,\frac{16x-43}{x^2-2x+2} - \frac{1}{5}\,\frac{6x-110}{x^2-4x+5}.$$

Ist $\varphi(x)$ der Nenner der gebrochenen Function, so entspricht jedem Paar complex conjugierter Wurzeln der Gleichung $\varphi(x)=0$ ein Partialbruch, dessen Zähler eine lineare Function des x, und dessen Nenner der diesem Paare von Wurzeln entsprechende trinomische Factor ist.

Anmerkung: Mehrfache complexe Wurzeln treten in der Praxis sehr selten auf, weshalb der Fall, dass die Gleichung $\varphi(x)=0$ mehrfache complexe Wurzeln hat, nicht behandelt wird.

Hat der Nenner $\varphi(x)$ einer rational gebrochenen Function

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

alle drei besprochenen Arten der Nullstellen, d. h. hat die Gleichung $\varphi(x) = 0$ einfache und mehrfache reale Wurzeln und einfache conjugiert complexe Wurzelpaare, so erhält man bei ihrer Zerlegung drei Formen von Partialbrüchen und zwar:

$\frac{A}{x - w}$, herrührend von einer einfachen realen Nullstelle,

$\frac{B}{(x - w_k)^k}$, » » » mehrfachen » »

$\frac{Px + Q}{x^2 + px + p}$, » » einem einfachen Paar conjugiert complexer Nullstellen.

Ist nun für $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ das vollständige Zerlegungsschema angeschrieben, und befreit man die Gleichung durch Multiplication mit $\varphi(x)$ von allen Nennern, so erhält man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens rationale ganze Functionen von x.

Da die Gleichung für alle Werte von x bestehen muss, müssen auch die Coefficienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleich sein, durch welche Bedingung gerade so viel Gleichungen erhalten werden, als zur eindeutigen Bestimmung der Constanten in den Zählern der Partialbrüche erforderlich sind.

Weil jede rational gebrochene Function

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

als eine Summe bestimmter Partialbrüche darstellbar ist, sobald nur die Nullstellen des Nenners bekannt sind, so kann auch die Auffindung eines Integrals

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)} \, dx,$$

in welchem eine derartige Function unter dem Integralzeichen steht, auf die Integration der Partialbrüche zurückgeführt werden, welche ausführbar ist. (Siehe 60, 60 b, und das Integral welches zu 75 und 76 führte.)

Mithin kann jede rational gebrochene Function theoretisch in geschlossener Form integriert werden.

Die wirkliche Ausführung der Integration setzt die Kenntnis der Nullstellen der Function im Nenner voraus, sie ist also allgemein nur möglich, wenn die Function im Nenner höchstens vom 4. Grade ist. Gelingt die Zerlegung in Partialbrüche, so bereitet die Integration keinerlei Schwierigkeiten.

**Beispiele:**

1. $$J = \int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2-3x+2}.$$

Die Gleichung

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

hat zwei reale und verschiedene Wurzeln

$$w_1 = 1 \qquad w_2 = 2.$$

Die Zerlegung der Function unter dem Integralzeichen gibt also:

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2} = \frac{z_1}{x-1} + \frac{z_2}{x-2} = \frac{z_1(x-2)+z_2(x-1)}{(x-1)(x-2)},$$

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2} = \frac{(z_1+z_2)x-(2z_1+z_2)}{x^2-3x+2}.$$

Es müssen demzufolge die Gleichungen bestehen:

$$z_1 + z_2 = 2,$$

$$-2z_1 - z_2 = 1,$$

aus welchen

$$z_1 = -3,$$

$$z_2 = \quad 5$$

erhalten wird.

Mithin ist

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2} = -\frac{3}{x-1} + \frac{5}{x-2},$$

und

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\,dx = -\int \frac{3\,dx}{x-1} + \int \frac{5\,dx}{x-2}.$$

also

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\,dx = -3\,l(x-1) + 5\,l(x-2) + C.$$

2. $$J = \int \frac{x^3}{x^3-2x^2+2x-1}\,dx.$$

Die Function unter dem Integralzeichen ist unecht gebrochen, muss also vorerst durch theilweise Ausführung der Division in die Summe einer rationalen ganzen und einer echt gebrochenen Function verwandelt werden.

$$x^5 : (x^3 - 2x^2 + 2x - 1) = x^2 + 2x + 2 + \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$$

$$\begin{array}{r} x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 \\ - \quad + \quad - \quad + \\ \hline 2x^4 - 2x^3 + x^2 \\ 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x \\ - \quad + \quad - \quad + \\ \hline 2x^3 - 3x^2 + 2x \\ 2x^3 - 4x^2 + 4x - 2 \\ - \quad + \quad - \quad + \\ \hline x^2 - 2x + 2 \end{array}.$$

Zur Zerlegung des echten Bruches

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$$

ist die Kenntnis der Nullstellen der Nennerfunction, d. h. der Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

erforderlich. Die reale Wurzel dieser Gleichung ist offenbar $w_1 = 1$. Durch Division der Gleichung mit dem Wurzelfactor $x - 1$ erhält man $x^2 - x + 1$ als Product der beiden anderen Wurzelfactoren, welche complexe Größen sind; somit ist

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x + 1} = \frac{z_1}{x - 1} + \frac{Px + Q}{x^2 - x + 1}.$$

Befreit man die Gleichung von allen Nennern, so folgt — für jedes x giltig:

$$x^2 - 2x + 2 = z_1 (x^2 - x + 1) + (Px + Q)(x - 1).$$

Setzt man speciell $x = 1$, so wird $z_1 = 1$.

Ordnet man nach Potenzen von x, so hat man:

$$x^2 - 2x + 2 = (z_1 + P) x^2 - (z_1 + P - Q) x + (z_1 - Q),$$

also

$$z_1 + P = 1,$$
$$z_1 + P - Q = 2,$$
$$z_1 - Q = 2,$$

woraus sich

$$z_1 = 1, \quad P = 0, \quad Q = -1$$

ergibt.

Demnach ist:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x^2 - x + 1},$$

also

$$\frac{x^5}{x^3-2x^2+2x-1}=x^2+2x+2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-x+1}$$

und

$$\int\frac{x^5}{x^3-2x^2+2x-1}dx=\frac{x^3}{3}+x^2+2x+l(x-1)-\int\frac{dx}{x^2-x+1}.$$

Wie das Integral rechts vom Gleichheitszeichen bestimmt werden kann, wurde bei Bestimmung des Integrals (75 gezeigt und soll nur in Kürze an diesem concreten Beispiele recapituliert werden:

$$\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{4}{3}\int\frac{dx}{1+\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{3}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dx}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C.$$

Es ist somit schließlich:

$$\int\frac{x^5}{x^3-2x^2+2x-1}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+x^2+2x+l(x-1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C.$$

## § 16. Integration der irrationalen Functionen.

Die Zahl der Fälle, in welchen es möglich ist, das Integral einer irrationalen Function in geschlossener Form darzustellen, ist sehr gering.

Die Integration solcher Functionen in geschlossener Form wird nur dann ausführbar, wenn es gelingt, durch Anwendung irgend einer der Integrationsmethoden die Function unter dem Integralzeichen rational zu machen oder auf eine der Grundformeln der Integralrechnung zurückzuführen.

Bevor auf die Besprechung einiger allgemeiner Fälle, welche einen methodischen Vorgang bei der Integration zulassen, eingegangen wird, sollen einige einfache, hieher gehörige Integrale unter Angabe des Resultates und der zu demselben führenden Methode angeführt werden.

*1.*
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{b}\int \frac{b\,dx}{\sqrt{a+bx}} =$$

$$= \frac{1}{b}\int (a+bx)^{-\frac{1}{2}}\,d(a+bx) = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} + C. \quad . \quad . \quad (78$$

*2.*
$$\int \sqrt{a+bx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{b}\int (a+bx)^{\frac{1}{2}}\,b\,.\,dx = \frac{2}{3b}(a+bx)^{\frac{3}{2}} + C \quad . \quad . \quad . \quad (79$$

(Bei beiden Integralen eventuelle Substitution $u = a + bx$.)

*3.*
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}x\right)^2}} = \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{b}\int \frac{\frac{b}{a}\,.\,dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}x\right)^2}},$$

also

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\left(\frac{b}{a}x\right) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80$$

(Bei Anwendung der Substitution $u = \frac{b}{a}x$.)

Aus diesem Integrale folgt, wenn $a^2 = k^2$ und $b = 1$ gesetzt wird:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{k} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80a$$

*4.*
$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm a^2 + b^2x^2}} = \frac{1}{b}l(bx + \sqrt{\pm a^2 + b^2x^2}) + C \quad . \quad . \quad (81$$

Zu diesem Integral gelangt man durch die Substitution

$$\sqrt{\pm a^2 + b^2x^2} = u - bx,$$

denn es ist

$$\pm a^2 + b^2x^2 = u^2 - 2bxu + b^2x^2,$$

also

$$\pm a^2 = u^2 - 2bux,$$

und wenn man beiderseits die Differentiale bildet:

$$0 = 2u\,du - 2b(u\,dx + x\,du),$$

$$0 = (u - bx)\,du - bu\,dx,$$

folgt

$$\frac{dx}{u - bx} = \frac{1}{b}\frac{du}{u}.$$

Man hat demnach

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm a^2 + b^2 x^2}} = \int \frac{dx}{u - bx} = \frac{1}{b} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{b} l\,u + C,$$

und nach Rücksubstitution des Wertes von u; $u = bx + \sqrt{\pm a^2 + b^2 x^2}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm a^2 + b^2 x^2}} = \frac{1}{b} l\,(bx + \sqrt{\pm a^2 + b^2 x^2}) + C.$$

Aus diesem Integrale leitet man $b = 1$ und $a = k$ setzend ab:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k^2}} = l\,(x + \sqrt{x^2 \pm k^2}) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81a$$

5. Das Integral

$$J = \int \sqrt{a^2 - b^2 x^2}\, dx$$

kann durch partielle Integration, verbunden mit zweckmäßiger Umformung auf das Integral (80 zurückgeführt werden.

Setzt man nämlich

$$\sqrt{a^2 - b^2 x^2} = u, \text{ also } du = \frac{-b^2 x}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} dx$$

$$dx = dv, \qquad v = x,$$

so erhält man:

$$J = x\sqrt{a^2 - b^2 x^2} - \int \frac{-b^2 x^2}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} dx,$$

oder, wenn man im Zähler des Integrals rechts $a^2$ addiert und subtrahiert:

$$J = x\sqrt{a^2 - b^2 x^2} - \int \frac{a^2 - b^2 x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - b^2 x^2} - \int \frac{a^2 - b^2 x^2}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}},$$

d. h.

$$J = x\sqrt{a^2 - b^2 x^2} - \int \sqrt{a^2 - b^2 x^2}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}$$

$$J = x\sqrt{a^2 - b^2 x^2} - J + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}},$$

also

$$2J = x\sqrt{a^2 - b^2x^2} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}.$$

Nun ist das Integral rechts vom Gleichheitszeichen das bereits bekannte Integral (80, mithin ist

$$J = \int\sqrt{a^2 - b^2x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - b^2x^2} + \frac{a^2}{2b}\arcsin\frac{bx}{a} + C \quad . \quad (82$$

Setzt man in diesem Integral $a = k$ und $b = 1$, so erhält man:

$$\int\sqrt{k^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{k^2 - x^2} + \frac{k^2}{2}\arcsin\frac{x}{k} + C \quad . \quad . \quad (82a$$

In analoger Weise findet man:

$$\int\sqrt{\pm a^2 + b^2x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{\pm a^2 + b^2x^2} \pm \frac{a^2}{2b}l(bx + \sqrt{\pm a^2 + b^2x^2}) + C, \quad (83$$

durch Zurückführen auf (81, und daraus wieder

$$\int\sqrt{x^2 \pm k^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm k^2} \pm \frac{k^2}{2}l(x \pm \sqrt{x^2 \pm k^2}) + C \ldots (83a$$

*6.* Das Integral

$$J = \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$$

kann durch entsprechende Umformung auf (81a oder (80a zurückgeführt werden, je nachdem $a > 0$ oder $a < 0$ ist.

Erste Annahme:

$$a > 0,$$

dann ist

$$J = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}}.$$

Addiert und subtrahiert man unter dem Wurzelzeichen $\frac{b^2}{a^2}$, so erhält man:

$$J = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2\frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{a}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}}}.$$

Setzt man nun $x + \frac{b}{a} = z$, also $dx = dz$, und $\frac{ac - b^2}{a^2} = \pm k^2$, so erhält man:

$$J = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{z^2 \pm k^2}},$$

also zufolge (81a:

$$J = \frac{1}{\sqrt{a}} l\left(z + \sqrt{z^2 \pm k^2}\right) + C.$$

Durch die Rücksubstitution

$$z = x + \frac{b}{a},$$

$$z^2 \pm k^2 = \left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2} = x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{c}{a},$$

ergibt sich

$$J = \frac{1}{\sqrt{a}} l\left[x + \frac{b}{a} + \sqrt{x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}\right] + C$$

oder

$$J = \frac{1}{\sqrt{a}} l\left[\frac{ax + b}{a} + \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\right] + C,$$

d. h.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} l\left[\frac{ax + b}{a} + \frac{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}{\sqrt{a}}\right] + C. \quad (84a$$

Zweite Annahme:

$$a < 0,$$

dann setzt man $a = -a_1$, wobei $a_1$ wesentlich positiv ist und hat

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{-a_1 x^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2\frac{b}{a_1}x + \frac{c}{a_1}}}.$$

Addiert und subtrahiert man wieder unter dem Wurzelzeichen $\left(\frac{b}{a_1}\right)^2$, so erhält man

$$J = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2\frac{b}{a_1}x - \left(\frac{b}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{b}{a_1}\right)^2 + \frac{c}{a_1}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x - \frac{b}{a_1}\right)^2 + \frac{a_1 c + b^2}{a_1^2}}}.$$

Soll das Integral überhaupt real sein, so muss der Bruch $\frac{a_1 c + b^2}{a_1^2}$ positiv sein und kann also als positive Größe gleich $k^2$ gesetzt werden; substituiert man überdies $\left(x - \frac{b}{a_1}\right) = z$, also $dx = dz$, so geht das Integral über in (80a

$$J = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - z^2}} = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \arcsin \frac{z}{k} + C.$$

Durch die Rücksubstitutionen

$$a_1 = -a,\ z = x - \frac{b}{a_1} = x + \frac{b}{a}; \qquad \frac{z}{k} = \frac{x - \frac{b}{a_1}}{\sqrt{\frac{a_1 c + b^2}{a_1^2}}} = \frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}}$$

findet man schließlich:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}} + C, \ldots \text{(84b}$$

Setzt man insbesondere $b = p$, $c = 0$ und in (84a $a = 1$, in (84b $a = -1$, so erhält man:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2px}} = l[x + p + \sqrt{2px + x^2}] + C \quad \ldots \text{(85a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2px - x^2}} = \arcsin \frac{x - p}{p} + C \ldots \ldots \text{(85b}$$

7. Das Integral

$$\int \sqrt{a x^2 + 2 b x + c} \, . \, d x$$

kann, je nachdem ob $a > 0$ oder $a < 0$ ist, durch analoge Umformung, wie sie bei (84a und (84b angewendet wurde, auf (81, beziehungsweise (80 zurückgeführt werden.

## 8. *Integration binomischer Differentiale.*

Das binomische Differential hat die Form:

$$d u = x^m (a x^n + b)^p \, d x.$$

Man nennt allgemein m den äußeren, n den inneren und p den Klammerexponenten des Differentials, und es kann immer vorausgesetzt werden, dass m und n ganze Zahlen sind und n überdies eine positive Zahl ist.

Sollten nämlich m und n gebrochene Zahlen sein und man bringt sie auf den gemeinschaftlicher Nenner $\sigma$, so dass

$$m = \frac{\mu}{\sigma}; \qquad n = \frac{\nu}{\sigma},$$

dann geht du durch die Substitution $x = z^\sigma$, also $x^m = z^\mu$, $x^n = z^\nu$, $dx = \sigma z^{\sigma-1}$ über in

$$d u = \sigma z^{\mu+\sigma-1} (a z^\nu + b)^p \, d z,$$

ein binomisches Differential mit ganzzahligem äußeren und inneren Exponenten.

Sollte das binomische Differential den negativen inneren Exponenten $-n$ haben:

$$d u = x^m (a x^{-n} + b)^p \, d x,$$

so geht es durch Division und Multiplication mit $x^{-np}$ über in

$$d u = x^m \, . \, x^{-np} \frac{(a x^{-n} + b)^p}{x^{-np}} \, d x = x^{m-np} (b x^n + a)^p \, d x,$$

d. h. in ein binomisches Differential mit positivem inneren Exponenten.

In der Folge wird also stets vorausgesetzt, dass m und n ganze Zahlen sind und n positiv ist.

Die Integration eines derartigen binomischen Differentials ist in vier Fällen möglich, und zwar:

*a)* Ist p eine positive ganze Zahl, dann ist die Integration einfach.

Durch Ausführung der Potenzierung nach der Binomialformel erhält man eine Summe von $p + 1$ Gliedern, welche nebst Constanten nur Potenzen von x enthalten, also integriert werden können.

*b)* Ist $m = n - 1$, dann ist die Integration auch immer möglich, denn es ist

$$d u = x^{n-1} (a x^n + b)^p \, d x = \frac{1}{a n} (a x^n + b)^p \, d (a x^n + b),$$

somit

$$u = \frac{1}{a\,n}\int (a\,x^n + b)^p\, d\,(a\,x^n + b).$$

also

$$u = \frac{1}{a\,n}\,\frac{(a\,x^n + b)^{p+1}}{p+1} + C, \qquad \text{wenn } p \leqq -1,$$

$$u = \frac{1}{a\,n}\, l\,(a\,x^n + b) + C, \qquad \text{wenn } p = -1.$$

*c)* Die Integration ist möglich, wenn $\frac{m+1}{n}$ eine ganze Zahl ist.

Setzt man nämlich

$$a\,x^n + b = z,$$

dann ist

$$x = \left(\frac{z-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$$

und

$$x^{m+1} = \left(\frac{z-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}},$$

was differenziert

$$(m+1)\,x^m\,d\,x = \frac{m+1}{n}\left(\frac{z-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}\frac{d\,z}{a}$$

gibt. Daraus folgt:

$$x^m\,d\,x = \frac{1}{n\,a}\left(\frac{z-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} d\,z$$

und es geht

$$d\,u = x^m\,(a\,x^n + b)^p\,d\,x$$

über in

$$d\,u = \frac{1}{n\,a}\,z^p\left(\frac{z-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} d\,z;$$

dieses Differential kann immer, wenn $\frac{m+1}{n}$ eine ganze Zahl ist, rational gemacht werden, wodurch es integrabel wird.

Ist p ein Bruch mit dem Nenner $\sigma$, so wird das Differential durch die Substitution $z = t^\sigma$ $d\,z = \sigma t^{\sigma-1}$ rational.

*d)* Schließlich ist die Integration in geschlossener Form auch dann möglich, wenn $\frac{m+1}{n} + p$ eine ganze Zahl ist.

Durch Division und Multiplication mit $x^{np}$ geht das Differential

$$d u = x^m (a x^n + b)^p d x$$

über in

$$d u = x^{m+np} (a + b x^{-n})^p d x,$$

also wieder in ein binomisches Differential, welches zufolge Bedingung *c)* der Integrabilität integrierbar ist, wenn

$$\frac{m + np + 1}{n} = \frac{m + 1}{n} + p$$

eine ganze Zahl ist.

Demnach ist auch das ursprüngliche Differential in diesem Falle integrabel.

Die Bedingungen *a)* und *b)* sind in *c)* und *d)* enthalten und wurden nur angeführt, weil bei Zutreffen derselben die Integration unmittelbar ausgeführt werden kann.

Ist eine der Bedingungen der Integrabilität *c)* oder *d)* erfüllt, dann empfiehlt es sich, wenn p ein Bruch mit dem Nenner σ ist, $a x^n + b = z^\sigma$ zu setzen.

Sind die Exponenten große Zahlen, so pflegt man Reductionsformeln anzuwenden, um die Integrale auf möglichst einfache Formen zu bringen.

Die sechs Arten von Reductionsformeln sind in jedem Werke über Integralrechnung enthalten.

**Beispiele:**

1. $$\int \frac{x^3 d x}{\sqrt{1 + x^2}} = \int x^3 (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} d x.$$

Unter dem Integralzeichen steht ein binomisches Differential, in welchem speciell $m = 3,\ n = 2,\ p = -\frac{1}{2},\ a = b = 1$ ist.

Da $\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2$ eine ganze Zahl, ist die Integrabilitätsbedingung *c)* erfüllt.

Setzt man:

$$1 + x^2 = z^2,$$

also

$$x^2 = z^2 - 1, \quad x^4 = (z^2 - 1)^2,$$

$$4 x^3 d x = 2 (z^2 - 1) \,.\, 2 z d z,$$

$$x^3 d x = z (z^2 - 1) d z,$$

so erhält man:

$$\int \frac{x^3 d x}{\sqrt{1 + x^2}} = \int \frac{z (z^2 - 1) d z}{z} = \int (z^2 - 1) d z = \frac{z^3}{3} - z + C = \frac{z}{3} (z^2 - 3) + C$$

also

$$\int \frac{x^3 d x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{3} (x^2 - 2) + C.$$

2. $$J = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^8}} = \int x^3 (1+x^8)^{-\frac{1}{2}}\,dx;$$

hier ist

$$m = 3, \quad n = 8, \quad p = -\frac{1}{2}.$$

Bedingung *c*) nicht erfüllt, weil

$$\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{8} = \frac{1}{2}$$

keine ganze Zahl; dafür ist aber die Bedingung *d*) erfüllt, weil

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{3+1}{8} - \frac{1}{2} = 0$$

eine ganze Zahl ist.

Zur Durchführung der Integration muss eine Transformation des Integrals durch Division und Multiplication mit $x^{-4}$ (allgemein mit $x^{np}$) vorgenommen werden. Dadurch erhält man:

$$J = \int \frac{x^{-1}.dx}{\sqrt{1+x^{-8}}}.$$

Setzt man nun:

$$1 + x^{-8} = z^2 \qquad x^{-8} = z^2 - 1 \qquad -8x^{-9}\,dx = 2z\,dz,$$

also

$$x^{-1}.dx = -\frac{1}{4}\cdot\frac{z\,dz}{z^2-1},$$

so erhält man:

$$J = \int \frac{x^{-1}\,dx}{\sqrt{1+x^{-8}}} = -\frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{8}\,l\frac{1+z}{1-z} + C,$$

also

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^8}} = \frac{1}{8}\,l\frac{1+\sqrt{1+x^{-8}}}{1-\sqrt{1+x^{-8}}} + C.$$

3. $$J = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$J = \int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx,$$

hier ist

$$m = 0 \qquad n = 2 \qquad p = -\frac{3}{2},$$

also Bedingung *d*) erfüllt, weil

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

eine ganze Zahl; demnach ist eine Transformation durch Division und Multiplication mit $x^{-3}$ nothwendig, wodurch sich

$$J = \int \frac{x^{-3}\,dx}{\sqrt{(x^{-2}-1)^3}}.$$

ergibt. Setzt man jetzt:

$$x^{-2} - 1 = z^2,$$

also

$$x^{-3}\,dx = -z\,dz,$$

so folgt:

$$J = -\int \frac{z\,dz}{z^3} = \int -\frac{dz}{z^2} = \frac{1}{z} + C = \frac{1}{\sqrt{x^{-2}-1}} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C;$$

es ist also

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

4. $$J = \int x^3 \cdot \sqrt{(1-x^2)^5}\,dx,$$

hier ist

$$m = 3, \quad n = 2, \quad p = \frac{5}{2}.$$

Bedingung *c*) erfüllt, weil

$$\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2$$

eine ganze Zahl.

Setzt man:

$$1 - x^2 = z^2, \quad x^2 = 1 - z^2, \quad x^4 = (1-z^2)^2, \quad x^3\,dx = -(1-z^2)\,z\,dz.$$

so erhält man:

$$J = -\int z(1-z^2)\,z^5\,dz = \int (z^8 - z^6)\,dz = \frac{z^9}{9} - \frac{z^7}{7} + C,$$

somit ist

$$\int x^3 \sqrt{(1-x^2)^5}\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{(1-x^2)^9}}{9} - \frac{\sqrt{(1-x^2)^7}}{7} + C = -\frac{\sqrt{(1-x^2)^7}}{63}(7x^2+2) + C.$$

## § 17. Integration einiger transcendenter Functionen.

Für die Integration transcendenter Differentiale kann weder eine allgemein zum Ziele führende Regel angegeben werden, noch ist es möglich, eine Eintheilung in Gruppen so vorzunehmen, dass wenigstens für einzelne derselben eine solche Regel giltig wäre

Demzufolge soll hier die Integration transcendenter Differentiale nur an einzelnen, häufig vorkommenden, typischen Fällen ausgeführt werden.

Vor allem mögen hier einige Grundformen behandelt werden, ohne Rücksicht darauf, ob sie bereits als Beispiele in einem der früheren Paragraphe gedient haben.

1. $$\int \sin x \cos x \, dx = \int \sin x \, d \sin x = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

2. $$\int \operatorname{tang} x \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = \int \frac{-d \cos x}{\cos x} = -l \cos x + C.$$

3. $$\int \operatorname{cotang} x \, dx = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = l \sin x + C.$$

4. Bei dem Integral

$$J = \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

erhält man durch Division des Zählers und Nenners mit $\cos^2 x$

$$J = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tang} x} = \int \frac{d \operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x} = l \operatorname{tang} x + C,$$

demnach ist

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l \operatorname{tang} x + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86$$

Auf dieses Integral können die beiden Integrale

$$\int \frac{dx}{\sin x} \text{ und } \int \frac{dx}{\cos x}$$

zurückgeführt werden.

Es ist nämlich

$$J = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{dx}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}},$$

also direct das Integral (4, demnach

5. $$\int \frac{dx}{\sin x} = l \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87$$

Ferner ist

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \int \frac{-d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)},$$

also zufolge (87

$$6. \quad \int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -l\,tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C. \quad (87a$$

7. Das Integral

$$J = \int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx$$

kann in die Summe zweier Integrale zerlegt werden, wenn man berücksichtigt, dass

$$2 \cos A \cos B = \cos (A + B) + \cos (A - B),$$

also

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left\{\cos (\alpha + \beta) x + \cos (\alpha - \beta) x\right\}.$$

Setzt man diesen Wert in das Integral, so erhält man:

$$J = \frac{1}{2}\int \cos (\alpha + \beta) x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos (\alpha - \beta) x \, dx$$

oder nach Multiplication und Division des ersten Integrals mit $\alpha + \beta$ und des zweiten $\alpha - \beta$:

$$J = \frac{1}{2(\alpha + \beta)}\int \cos (\alpha + \beta) x \,.\, (\alpha + \beta) \, dx +$$

$$+ \frac{1}{2(\alpha - \beta)}\int \cos (\alpha - \beta) x \, (\alpha - \beta) \, dx,$$

demnach schließlich:

$$J = \int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx = \frac{\sin (\alpha + \beta) x}{2(\alpha + \beta)} + \frac{\sin (\alpha - \beta) x}{2(\alpha - \beta)} + C. \quad (88$$

Wird insbesondere $\alpha = \beta$, so hat der zweite Theil des Ausdruckes für J die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, der Wert desselben kann aber durch entsprechende Umformung gefunden werden.

Es ist nämlich

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} = \frac{x}{2}\,\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{(\alpha-\beta)x},$$

setzt man

$$(\alpha-\beta)x = u,$$

so ist

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} = \frac{x}{2}\,\frac{\sin u}{u}$$

und

$$\lim_{\alpha=\beta}\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} = \lim_{u=0}\frac{x}{2}\,\frac{\sin u}{u} = \frac{x}{2}\lim_{u=0}\frac{\sin u}{u} = \frac{x}{2}.$$

Demnach hat man:

$$\int\cos^2\alpha x\,dx = \frac{\sin 2\alpha x}{4\alpha} + \frac{x}{2} + C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89$$

8. Auf analoge Weise findet man

$$\int\sin\alpha x\sin\beta x\,dx = \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} - \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} + C. \quad . \quad . \quad (90$$

wenn man mit Rücksicht auf

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

setzt

$$\sin\alpha x\sin\beta x = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right\}.$$

Setzt man insbesondere in (90 $\alpha = \beta$, so erhält man

$$\int\sin^2\alpha x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2\alpha x}{4\alpha} + C.$$

9. Das Integral

$$J = \int\frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$$

kann durch Umformung auf das bereits bekannte Integral (87

$$\int\frac{dx}{\sin x}$$

gebracht werden.

Dividiert man nämlich im vorgelegten Integral Zähler und Nenner durch $\rho$, so geht es über in

$$J = \frac{1}{\rho} \int \frac{dx}{\frac{a}{\rho} \sin x + \frac{b}{\rho} \cos x}.$$

und es kann $\rho$ so ermittelt werden, dass

$$\frac{a}{\rho} = \cos \varphi; \quad \frac{b}{\rho} = \sin \varphi,$$

was richtig ist, wenn

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2},$$

weil zufolge $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$; $\frac{a^2 + b^2}{\rho^2} = 1$ sein muss.

Der Bogen $\varphi$ ist eindeutig bestimmt, weil

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{b}{a}.$$

also

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}.$$

Durch die angegebene Substitution erhält man:

$$J = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin (x + \varphi)}$$

oder

$$J = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{d(x + \varphi)}{\sin (x + \varphi)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} l \operatorname{tang} \frac{1}{2} (x + \varphi) + C,$$

also schließlich

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} l \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left( x + \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} \right) + C. \quad . \quad . \quad (91$$

10. Das Integral

$$J = \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x \pm b^2 \sin^2 x}$$

kann auch durch entsprechende Umformung auf ein bekanntes Integral zurückgeführt werden.

Dividiert man Zähler und Nenner durch $a^2 \cos^2 x$, so hat man:

$$J = \int \frac{\frac{dx}{a^2 \cos^2 x}}{1 \pm \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tang}^2 x}.$$

Setzt man jetzt

$$\frac{b}{a}\tan x = u,$$

also

$$\frac{b}{a}\frac{dx}{\cos^2 x} = du$$

oder

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{a}{b}du,$$

so ist

$$J = \frac{1}{ab}\int \frac{du}{1 \pm u^2},$$

welches Integral sowohl für das obere als auch für das untere Vorzeichen im Nenner bekannt ist, und zwar im erstangeführten Falle eine Grundformel der Integralrechnung und im zweiten Falle das Integral (69.

Es ist mithin:

$$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{b}{a}\tan x\right) + C \quad \ldots \quad (92$$

$$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x} = \frac{1}{2ab}l\frac{a + b\tan x}{a - b\tan x} + C \quad \ldots \quad (93$$

11. Auf eine der beiden Integralformen (92 und (93 kann auch das Integral

$$J = \int \frac{dx}{a + b\cos x}$$

zurückgeführt werden.

Mit Rücksicht auf

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

und

$$1 = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$$

kann geschrieben werden:

$$J = \int \frac{dx}{a + b\cos x} = \int \frac{dx}{a\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\right.}$$

oder

$$J = \int \frac{dx}{(a+b)\cos^2\frac{x}{2} + (a-b)\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= 2\int \frac{d\frac{x}{2}}{(a+b)\cos^2\frac{x}{2} + (a-b)\sin^2\frac{x}{2}}$$

und das Integral hat dieselbe Form wie (92 oder (93, je nachdem $a-b>0$, oder $a-b<0$ ist.

$a+b$ kann immer positiv vorausgesetzt werden, denn sollte es negativ sein, so könnte man $-1$ als Factor vor das Integralzeichen setzen und dadurch die Vorzeichen unter dem Integralzeichen ändern.

Ist bei positivem $a+b$ auch $a-b$ positiv, so hat das Integral dieselbe Form wie (92.

Ist dagegen $a-b$ negativ, dann ist $b-a$ wesentlich positiv und es muss im Integral $-(b-a)$ statt $a-b$ gesetzt werden, wodurch es dieselbe Form wie (93 annimmt.

Es ist somit

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = 2\int \frac{d\frac{x}{2}}{(a+b)\cos^2\frac{x}{2} + (a-b)\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tang}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right] + C. \quad . \quad . \quad . \quad (94$$

wenn

$$a-b>0$$

oder

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = 2\int \frac{d\frac{x}{2}}{(a+b)\cos^2\frac{x}{2} - (b-a)\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} l \frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}} + C, \quad . \quad (95$$

wenn

$$a-b<0.$$

**12. Für die Integrale**

$$\int \sin^m x \, dx, \quad \int \cos^m x \, dx$$

können mittelst partieller Integration Reductionsformeln abgeleitet werden, welche durch eine einfache Umformung sich in Reductionsformeln für die Integrale

$$\int \frac{dx}{\sin^n x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^n x}$$

umwandeln lassen.

Wendet man nämlich auf das Integral

$$J = \int \sin^m x \, dx = \int \sin^{m-1} x \sin x \, dx$$

die theilweise Integration an, indem man setzt:

$$u = \sin^{m-1} x,$$

also

$$du = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x \, dx$$

und

$$dv = \sin x \, dx,$$

also

$$v = -\cos x,$$

so erhält man:

$$J = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx$$

oder

$$J = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx,$$

also

$$J = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \, dx - (m-1) \underbrace{\int \sin^m x \, dx}_{J}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$m J = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \, dx$$

und schließlich:

$$\int \sin^m x \, dx = \frac{-\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x \, dx. \quad (96$$

Diese Reductionsformel erniedrigt die Potenz m von sin x, wenn diese eine positive Zahl ist, um zwei Einheiten und führt durch wiederholte Anwendung, wenn m überdies eine ganze Zahl ist, zu

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad \text{(wenn m ungerade)}$$

oder zu

$$\int dx = x + C \quad \text{(wenn m gerade ist).}$$

**Beispiele:**

α)
$$\int \sin^5 x \, dx = \frac{-\sin^4 x \cos x}{5} + \frac{4}{5}\int \sin^3 x \, dx,$$

$$\int \sin^3 x \, dx = \frac{-\sin^2 x \cos x}{3} + \frac{2}{3}\int \sin x \, dx,$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C,$$

somit ist

$$\int \sin^5 x \, dx = \frac{-\sin^4 x \cos x}{5} - \frac{4\sin^2 x \cos x}{15} - \frac{8\cos x}{15} + C.$$

β)
$$\int \sin^4 x \, dx = \frac{-\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4}\int \sin^2 x \, dx$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{-\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2}\int dx,$$

somit ist

$$\int \sin^4 dx = \frac{-\sin^3 x \cos x}{4} - \frac{3\sin x \cos x}{8} + \frac{3}{8}x + C.$$

Löst man die Gleichung (96 nach $\int \sin^{m-2} x \, dx$ auf, so erhält man:

$$\int \sin^{m-2} x \, dx = \frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m-1} + \frac{m}{m-1}\int \sin^m x \, dx.$$

Setzt man, wenn m eine negative Zahl:

$$m - 2 = -n,$$

dann ist

$$m = -n + 2 = -(n-2),$$

$$m - 1 = -n + 2 - 1 = -(n-1)$$

und findet dadurch:

$$\int \sin^{-n} x \, dx = \frac{\sin^{-(n-1)} x \cos x}{-(n-1)} + \frac{-(n-2)}{-(n-1)}\int \sin^{-(n-2)} x \, dx$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}, \quad \ldots \quad (97$$

eine Reductionsformel, in welcher n eine positive Zahl bedeutet, und welche durch wiederholte Anwendung zu den Schlussintegralen:

$$\int dx = x + C \qquad \text{(bei ganzem geraden n)},$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = l \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C \qquad \text{(bei ganzem ungeraden n)}$$

führt.

**Beispiele:**

$$J = \int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\sin^3 x},$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} l \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C,$$

mithin

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3}{8}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{3}{8} l \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C.$$

$$J = \int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\frac{\cos x}{5\sin^5 x} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{\sin^4 x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} + C = -\operatorname{cotg} x + C,$$

mithin

$$J = -\frac{\cos x}{5\sin^5 x} - \frac{4}{15}\frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{8}{15}\operatorname{cotg} x + C.$$

Wird auf das Integral

$$J = \int \cos^m x\, dx = \int \cos^{m-1} x \cos x\, dx$$

die theilweise Integration angewendet und hiebei gesetzt:

$$u = \cos^{m-1} x,$$

also

$$du = (m-1)\cos^{m-2}(-\sin x)\, dx$$

und

$$dv = \cos x \, dx,$$

also

$$v = \sin x,$$

so erhält man:

$$J = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) \int \cos^{m-2} x \sin^2 x \, dx$$

oder

$$J = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) \int \cos^{m-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$J = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) \int \cos^{m-2} x \, dx - (m-1) \underbrace{\int \cos^m x \, dx}_{J}.$$

Durch Auflösung der letzten Gleichung nach J folgt schließlich:

$$\int \cos^m x \, dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x \, dx, \quad \ldots \quad (98$$

eine Reductionsformel, welche den Potenzexponenten m, wenn er eine positive ganze Zahl ist, um zwei Einheiten erniedrigt und bei fortgesetzter Anwendung auf eines der Integrale:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \qquad \text{(wenn m ungerade)}$$

oder

$$\int dx = x + C \qquad \text{(wenn m gerade)}$$

führt.

**Beispiel:**

$$\int \cos^6 x \, dx = \frac{\cos^5 x \sin x}{6} + \frac{5}{6} \int \cos^4 x \, dx$$

$$\int \cos^4 x \, dx = \frac{\cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4} \int \cos^2 x \, dx$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{1}{2} \int dx = \frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{x}{2} + C,$$

also

$$\int \cos^6 x \, dx = \frac{\cos^5 x \sin x}{6} + \frac{5}{24} \cos^3 x \sin x + \frac{15}{48} \cos x \sin x + \frac{15}{48} x + C.$$

Aus der Gleichung (98 kann, wenn m negativ, durch die Substitution

$$m - 2 = -n,$$

also

$$m = -(n-2)$$

$$m-1 = -(n-1),$$

eine Reductionsformel für

$$\int \frac{dx}{\cos^n x}$$

hergeleitet werden. Man erhält nämlich:

$$\int \cos^{-(n-2)} x\, dx = \frac{\cos^{-(n-1)} \sin x}{-(n-2)} + \frac{-(n-1)}{-(n-2)} \int \cos^{-n} x\, dx,$$

und wenn aus dieser Gleichung das letzte Integral bestimmt wird:

$$\int \cos^{-n} x\, dx = \frac{\cos^{-(n-1)} \sin x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \cos^{-(n-2)} x\, dx,$$

oder

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} \quad \ldots \quad (99$$

Diese Reductionsformel führt schließlich auf eines der beiden bekannten Integrale:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -l \tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C$$

oder

$$\int dx = x + C.$$

**Beispiel:**

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} l \,.\, \tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C$$

also schließlich

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{8} \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{3}{8} l \,.\, \tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C.$$

**Anmerkung.** Die vier zuletzt behandelten Integrale sind specielle Fälle des allgemeinen Integrals

$$J = \int \sin^n x \cos^m x\, dx,$$

welches, wenn m und n ganze Zahlen sind, immer in endlicher Form darstellbar ist.

Durch die Substitution

$$\cos x = z, \quad \sin x = \sqrt{1 - z^2}, \quad -\sin x \, dx = dz, \quad dx = -\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

könnte dieses Integral auf ein algebraisches zurückgeführt werden, und zwar auf

$$J = -\int z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz,$$

welches, da unter dem Integralzeichen ein binomisches Differential steht, für welches, wenn m und n ganze Zahlen sind, eine der Integrabilitätsbedingungen unbedingt erfüllt ist, leicht integriert werden könnte.

Ungeachtet dessen empfiehlt es sich aber, für dieses Integral besondere Reductionsformeln abzuleiten, welche durch zweckmäßige Anwendung der theilweisen Integration erhalten werden können.

Setzt man nämlich im Integral

$$J = \int \sin^n x \cos^m x \, dx = \int \sin^{n-1} x \cos^m x \sin x \, dx$$

$$u = \sin^{n-1} x,$$

also

$$du = (n - 1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx$$

und

$$\cos^m x \sin x \, dx = dv,$$

also

$$v = -\frac{\cos^{m+1} x}{m + 1},$$

so erhält man:

$$\alpha) \qquad \int \sin^n x \cos^m x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m + 1} + \frac{n - 1}{m + 1} \int \sin^{n-2} x \cos^{m+2} x \, dx.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung das rechtsstehende Integral und setzt dann $m - 2$ statt m und $n + 2$ statt n, so erhält man:

$$\beta) \qquad \int \sin^n x \cos^m x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{n + 1} + \frac{m - 1}{n + 1} \int \sin^{n+2} x \cos^{m-2} x \, dx.$$

Ersetzt man in $\alpha$) im rechtsstehenden Integral $\cos^2 x$ durch $1 - \sin^2 x$, so erhält man:

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m + 1} + \frac{n - 1}{m + 1} \left[ \int \sin^{n-2} x \cos^m x \, dx - \int \sin^n x \cos^m x \, dx \right],$$

und wenn man aus dieser Gleichung das vorgelegte Integral bestimmt,

$$\gamma) \qquad \int \sin^n x \cos^m x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^{n-2} x \cos^m x \, dx.$$

Wird nun aus der letzten Gleichung das rechtsstehende Integral bestimmt und sodann $n+2$ statt $n$ gesetzt, so folgt:

$$\delta) \qquad \int \sin^n x \cos^m x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin^{n+2} x \cos^m x \, dx.$$

Setzt man im rechtstehenden Integral der Gleichung $\beta)$ $1 - \cos^2 x$, statt $\sin^2 x$, so hat man:

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \left[ \int \sin^n x \cos^{m-2} x \, dx - \int \sin^n x \cos^m x \, dx \right],$$

und erhält durch Auflösen nach $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$:

$$\varepsilon) \qquad \int \sin^n x \cos^m x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^n x \cos^{m-2} x \, dx.$$

Aus $\varepsilon)$ folgt schließlich durch Auflösung nach dem rechtsstehenden Integral, wenn man zugleich $m$ durch $m+2$ ersetzt:

$$\zeta) \qquad \int \sin^n x \cos^m x \, dx = -\frac{\sin^{n+1} x \cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^n x \cos^{m+2} x \, dx.$$

Die sechs verschiedenen Reductionsformeln sind aus folgendem Grunde nothwendig:

Ist $m = -1$, dann ist $m+1 = 0$, also Formel $\alpha)$ und $\zeta)$ unbrauchbar, wogegen die Anwendung von $\gamma)$, wenn n positiv, oder $\delta)$, wenn n negativ ist, schließlich auf eines der Integrale

$$\int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad \text{oder} \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

führt.

Ist $n = -1$, also $n + 1 = 0$, dann sind die Formeln $\beta$) und $\delta$) unbrauchbar, wogegen die Anwendung von $\varepsilon$) oder $\zeta$), je nachdem ob m positiv oder negativ ist, zu den Schlussintegralen führt:

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

Schließlich werden die Formeln $\gamma$) und $\varepsilon$) unbrauchbar, wenn $m = -n$ oder $n = -m$, weil dann $m + n = 0$ ist. Das Integral hat dann eine der Formen:

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^m x}\, dx = \int \operatorname{cotg} x^m\, dx,$$

oder

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^m x}\, dx = \int \operatorname{tang}^m x\, dx,$$

für welche directe Reductionsformeln abgeleitet werden können. Man kann aber auch $\alpha$) oder $\beta$) anwenden und gelangt dadurch zu einem der Integrale:

$$\int dx, \quad \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} \quad \text{oder} \quad \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx.$$

Diese Schlussintegrale sind alle elementar und bekannt, also die Integration immer ausführbar.

**Beispiele:**

$$\int \sin^3 x \cos^6 x\, dx.$$

Reduciert man in diesem Integral den Exponenten des Sinus auf 1, so ist $\sin x\, dx$ bis auf das Zeichen das Differential von $\cos x$, also unter dem Integralzeichen sodann nur eine Potenz, demnach ist hier die Reductionsformel $\gamma$) anzuwenden, weil diese den Potenzexponenten des Sinus um zwei Einheiten erniedrigt.

Man erhält durch Anwendung von $\gamma$):

$$\int \sin^3 x \cos^6 x\, dx = -\frac{\sin^2 x \cos^7 x}{9} + \frac{2}{9}\int \sin x \cos^6 x\, dx$$

$$= -\frac{\sin^2 x \cos^7 x}{9} - \frac{2}{9}\int \cos^6 x\, d(\cos x),$$

also schließlich:

$$\int \sin^3 x \cos^6 x\, dx = -\frac{\sin^2 x \cos^7 x}{9} - \frac{2}{9} \cdot \frac{\cos^7 x}{7} + C =$$

$$= -\frac{\cos^7 x}{9}\left(\sin^2 x + \frac{2}{7}\right) + C.$$

Dieses Integral könnte aber auch ohne Reductionsformel berechnet werden, z. B. auf folgende Art:

$$\int \sin^3 x \cos^6 x \, dx = \int \sin x \, (1 - \cos^2 x) \cos^6 x \, dx$$

$$= \int \sin x \cos^6 x \, dx - \int \sin x \cos^8 x \, dx,$$

also

$$\int \sin^3 x \cos^6 x \, dx = -\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^9 x}{9} + C.$$

Das Integral

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x} \, dx = \int \sin^4 x \cos^{-5} x \, dx$$

kann durch Anwendung von $\gamma$) und sodann von $\zeta$) integriert werden. Durch Anwendung von $\gamma$) erhält man:

$$\int \sin^4 x \cos^{-5} x \, dx = -\frac{\sin^3 x \cos^{-4} x}{-1} + \frac{3}{-1} \int \sin^2 x \cos^{-5} x \, dx,$$

$$\int \sin^2 x \cos^{-5} x \, dx = -\frac{\sin x \cos^{-4} x}{-3} + \frac{1}{-3} \int \cos^{-5} x \, . \, dx,$$

also

$$\int \sin^4 x \cos^{-5} x \, dx = -\frac{\sin^3 x \cos^{-4} x}{-1} + \frac{3 \sin x \cos^{-4} x}{-3} + \int \cos^{-5} x \, dx.$$

Wendet man nun auf das rechtsstehende Integral $\zeta$) an, so findet man:

$$\int \cos^{-5} x \, dx = -\frac{\sin x \cos^{-4} x}{-4} + \frac{-3}{-4} \int \cos^{-3} x \, dx,$$

$$\int \cos^{-3} x \, dx = -\frac{\sin x \cos^{-2} x}{-2} + \frac{-1}{-2} \int \cos x^{-1} \, dx =$$

$$= -\frac{\sin x \cos^{-2} x}{-2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \, l \, \mathrm{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + C,$$

also

$$\int \cos^{-5} x \, dx = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} - \frac{3}{8} \, l \, \mathrm{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + C$$

und somit schließlich:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x} \, dx = \frac{\sin^3 x - \frac{3}{4} \sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{8} \left[ \frac{\sin x}{\cos^2 x} - l \, \mathrm{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right] + C.$$

Das Integral

$$\int \sin^6 x \cos^6 x \, dx$$

kann wegen der gleichen Potenzexponenten zunächst transformiert werden:

$$\int \sin^6 x \cos^6 x \, dx = \frac{1}{2^6}\int (2 \sin x \cos x)^6 \, dx = \frac{1}{2^6}\int \sin^6 2x \, dx$$

$$\int \sin^6 x \cos^6 x \, dx = \frac{1}{2^7}\int \sin^6 2x \, . \, d(2x).$$

Auf dieses Integral ist nun ε) mit Vortheil anwendbar.

U. s. w.

13. Für die Integrale

$$\int \mathrm{tang}^m x \, dx$$

$$\int \mathrm{cotg}^m x \, dx$$

können durch einfache Umformung Reductionsformeln gefunden werden.

Es ist nämlich:

$$J = \int \mathrm{tang}^m x \, dx = \int \mathrm{tang}^{m-2} x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \mathrm{tang}^{m-2} x \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx.$$

also

$$J = \int \mathrm{tang}^{m-2} x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \mathrm{tang}^{m-2} x \, dx$$

oder

$$J = \int \mathrm{tang}^{m-2} x \, d(\mathrm{tang}\, x) - \int \mathrm{tang}^{m-2} x \, dx.$$

demnach

$$\int \mathrm{tang}^m x \, dx = \frac{\mathrm{tang}^{m-1} x}{m-1} - \int \mathrm{tang}^{m-2} x \, dx \; . \; . \; . \quad (100$$

Analog ist

$$\int \mathrm{cotg}^m x \, dx = \int \mathrm{cotg}^{m-2} x \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \mathrm{cotg}^{m-2} x \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx.$$

also

$$\int \mathrm{cotg}^m x \, dx = -\frac{\mathrm{cotg}^{m-1} x}{m-1} - \int \mathrm{cotg}^{m-2} x \, dx \quad . \; . \quad (101$$

Die fortgesetzte Anwendung dieser beiden Reductionsformeln führt auf eines der bekannten Integrale:

$$\left.\begin{aligned} \int \mathrm{tang}\, x \, dx &= -l \cos x + C \\ \int \mathrm{cotg}\, x \, dx &= l \sin x + C \end{aligned}\right\} \text{(wenn m ungerade}$$

oder

$$\int dx = x + C \qquad \text{(wenn m gerade.}$$

**Beispiele:**

Durch Anwendung von (100 auf das Integral

$$\int \operatorname{tang}^5 x \, dx$$

erhält man:

$$\int \operatorname{tang}^5 x \, dx = \frac{\operatorname{tang}^4 x}{4} - \int \operatorname{tang}^3 x \, dx$$

$$\int \operatorname{tang}^3 x \, dx = \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} - \int \operatorname{tang} x \, dx = \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} + l \cos x + C,$$

somit:

$$\int \operatorname{tang}^5 x \, dx = \frac{\operatorname{tang}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} - l \cos x + C.$$

Durch Anwendung von (101 auf

$$\int \operatorname{cotg}^6 x \, dx$$

wird erhalten:

$$\int \operatorname{cotg}^6 x \, dx = -\frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} - \int \operatorname{cotg}^4 x \, dx$$

$$\int \operatorname{cotg}^4 x \, dx = -\frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} - \int \operatorname{cotg}^2 x \, dx$$

$$\int \operatorname{cotg}^2 x \, dx = -\frac{\operatorname{cotg} x}{1} - \int dx = -\operatorname{cotg} x - x + C,$$

somit:

$$\int \operatorname{cotg}^6 x \, dx = -\frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} - \operatorname{cotg} x - x + C.$$

14. Zur Berechnung der beiden Integrale

$$y = \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx$$

$$z = \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$$

führt die gleichzeitige partielle Integration derselben, wenn

$$u = e^{\alpha x},$$

also

$$du = \alpha e^{\alpha x} . dx,$$

mithin im ersten

$$dv = \cos \beta x \, dx,$$

also

$$v = \frac{\sin \beta x}{\beta},$$

und im zweiten

$$dv = \sin \beta x \, dx,$$

also

$$v = -\frac{\cos \beta x}{\beta}$$

gesetzt wird.

Man erhält dadurch

$$y = \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$$

und

$$z = \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx = -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx,$$

d. h.

$$y = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} z,$$

$$z = -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} y,$$

oder

$$y + \frac{\alpha}{\beta} z = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$z - \frac{\alpha}{\beta} y = -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

oder

$$\beta y + \alpha z = e^{\alpha x} \sin b x$$

$$\alpha y - \beta z = e^{\alpha x} \cos \beta x.$$

Löst man nun diese zwei Gleichungen auf, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} y = \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx &= \frac{\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} \\ z = \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx &= \frac{\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (102$$

15. Für die beiden Integrale:

$$J_1 = \int x^m \cos x \, dx$$

$$J_2 = \int x^m \sin x \, dx,$$

erhält man durch theilweise Integration Reductionsformeln.

Setzt man nämlich:

$$x^m = u,$$

also

$$m\,x^{m-1}\,dx = du,$$

und

$$\cos x\,dx = dv,$$

also

$$v = \sin x,$$

beziehungsweise

$$\sin x\,dx = dv,$$

also

$$v = -\cos x,$$

so erhält man:

$$J_1 = \int x^m \cos x\,dx = x^m \sin x - m\int x^{m-1} \sin x\,dx \quad \ldots\ldots \text{(}\mu$$

$$J_2 = \int x^m \sin x\,dx = -x^m \cos x + m\int x^{m-1} \cos x\,dx \quad \ldots \text{(}\nu$$

und durch Anwendung der Reductionsformel (ν auf das letzte Integral in (μ und der Gleichung (μ auf das letzte Integral in (ν findet man:

$$\left.\begin{aligned}\int x^m \cos x\,dx &= x^m \sin x + m\,x^{m-1}\cos x - m(m-1)\int x^{m-2}\cos x\,dx\\ \int x^m \sin x\,dx &= -x^m \cos x + m\,x^{m-1}\sin x - m(m-1)\int x^{m-2}\sin x\,dx.\end{aligned}\right\}(103$$

Ist m eine positive ganze Zahl, so erniedrigen die Reductionsformeln (103 den Exponenten von x um zwei Einheiten und führen somit auf die Schlussintegrale:

$$\int \sin x\,dx, \qquad \int \cos x\,dx \qquad \text{(wenn m gerade)}$$

oder

$$\int x \sin x\,dx \text{ und } \int x \cos x\,dx \quad \text{(wennn m ungerade).}$$

Die beiden letzten Integrale sind durch (ν und (μ gelöst.

Es ist

$$\int x \cos x\,dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\int x \sin x\,dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Ist hingegen m negativ, also $m = -n$, dann hat man die Integrale

$$\int \frac{\cos x\,dx}{x^n}$$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{x^n},$$

in welchen nun n wesentlich positiv ist. Die Reductionsformeln für dieselben folgen aus den Gleichungen (103, wenn aus denselben die rechtsstehenden Integrale berechnet werden.

$$\int x^{m-2}\cos x\,dx = \frac{x^m \sin x + m\,x^{m-1}\cos x}{m(m-1)} - \frac{1}{m(m-1)}\int x^m \cos x\,dx.$$

$$\int x^{m-2}\sin x\,dx = -\frac{x^m \cos x - m\,x^{m-1}\sin x}{m(m-1)} - \frac{1}{m(m-1)}\int x^m \sin x\,dx.$$

Denn setzt man nun in diese Gleichungen $m = -n+2$, so erhält man:

$$\int x^{-n}\cos x\,dx =$$

$$= \frac{x^{-n+2}\sin x + (-n+2)\,x^{-n+1}\cos x}{(-n+2)(-n+1)} - \frac{1}{(-n+2)(-n+1)}\int x^{-n+2}\cos x\,dx.$$

$$\int x^{-n}\sin x\,dx =$$

$$= -\frac{x^{-n+2}\cos x - (-n+2)x^{-n+1}\sin x}{(-n+2)(-n+1)} - \frac{1}{(-n+2)(-n+1)}\int x^{-n+2}\sin x\,dx.$$

oder

$$\int \frac{\cos x\,dx}{x^n} = \frac{-\cos x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\sin x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\int \frac{\cos x\,dx}{x^{n-2}}.$$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{x^n} = \frac{-\sin x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{\cos x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\int \frac{\sin x\,dx}{x^{n-2}}.$$

Diese beiden Reductionsformeln führen durch fortgesetzte Anwendung auf die Integralformeln

$$\int \frac{\cos x\,dx}{x^2}, \qquad \int \frac{\sin x\,dx}{x^2} \quad \text{(wenn m gerade)}$$

oder

$$\int \frac{\cos x\,dx}{x}, \qquad \int \frac{\sin x\,dx}{x} \quad \text{(wenn m ungerade).}$$

Die beiden letzten Integrale repräsentieren höhere Transcendenten und werden Integralcosinus und Integralsinus genannt.

Sie sind in geschlossener Form nicht integrierbar.

Auf die beiden ersteren sind die Reductionsformeln wegen der Nenner, welche für $n = 2$ verschwinden, nicht anwendbar. Sie können aber auf die letzteren zurückgeführt werden.

16. Das Integral

$$\int \text{arc sin}\, x\,dx$$

wird durch partielle Integration gefunden.

Setzt man nämlich:

$$u = \arcsin x, \quad \text{also} \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$dv = dx, \qquad \text{also} \quad v = x,$$

so findet man:

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \int \frac{-x\, dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

also

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \quad . \quad . \quad . \quad (104$$

17. In ganz analoger Weise findet man:

$$\int \operatorname{arc\,tang} x\, dx = x \operatorname{arc\,tang} x + \frac{1}{2} l(1+x^2) + C \quad . \quad (105$$

18. Für das Integral

$$\int (lx)^n dx$$

kann ebenfalls durch theilweise Integration eine Reductionsformel gefunden werden.

Setzt man nämlich:

$$u = (lx)^n.$$

also

$$du = n \frac{(lx)^{n-1}}{x} dx$$

$$dv = dx \qquad v = x.$$

so erhält man:

$$\int (lx)^n dx = x(lx)^n - n\int (lx)^{n-1} dx.$$

Durch fortgesetzte Anwendung dieser Reductionsformel findet man schließlich:

$$\int (lx)^n dx = x\{(lx)^n - n(lx)^{n-1} + n(n-1)(lx)^{n-2} + \ldots \pm n!\} + C \ldots (108$$

**Anmerkung**: Die Integrale

$$\int \frac{e^z dz}{z} \quad \text{und} \quad \int \frac{du}{lu}$$

lassen sich in geschlossener Form nicht integrieren und bilden eine höhere Transcendente, welche Integrallogarithmus genannt und wie allgemein üblich mit li bezeichnet wird.

19. Manche irrationale Differentialfunctionen lassen sich durch entsprechende Substitution in bekannte trigonometrische überführen.

So z. B.

$$J_1 = \int x^m \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$$J_2 = \int \frac{x^m}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

Setzt man in denselben

$$x = \sin u, \qquad dx = \cos u\, du,$$

so erhält man:

$$J_1 = \int \sin^m u \sqrt{1 - \sin^2 u}\, \cos u\, du = \int \sin^m u \cos^2 u\, du$$

$$J_2 = \int \frac{\sin^m u}{\sqrt{1 - \sin^2 u}} \cos u\, du = \int \sin^m u\, du.$$

Ebenso können die Integrale

$$\int x^m \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx,$$

durch die Substitution

$$x = a \sin u$$

auf trigonometrische zurückgeführt werden.

Das Integral

$$\int \frac{1}{a + bx} \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}}$$

geht durch die Substitution

$$\frac{\beta x}{\alpha} = \operatorname{tang} u$$

über in

$$\int \frac{du}{a\beta \cos u + b\alpha \sin u}$$ (siehe 91).

Hingegen geht das Integral

$$\int \frac{1}{a + bx} \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}},$$

durch die Substitution

$$\frac{\beta x}{\alpha} = \cos u$$

in

$$\int \frac{du}{a\beta + b\alpha \cos u}$$

über. (Siehe 94.)

# 3. Abschnitt.

# Das bestimmte Integral.

## § 18. Begriff des bestimmten Integrals.

Wie bereits einmal angedeutet wurde, verdankt die Integralrechnung ihre Entstehung einem Probleme der Geometrie, und zwar der Quadratur ebener Curven.

*a*) Nachdem nun dieses Problem unmittelbar zum Begriffe des bestimmten Integrals führt, soll vor allem die Fundamentalaufgabe desselben in Betracht gezogen werden.

Diese lautet:

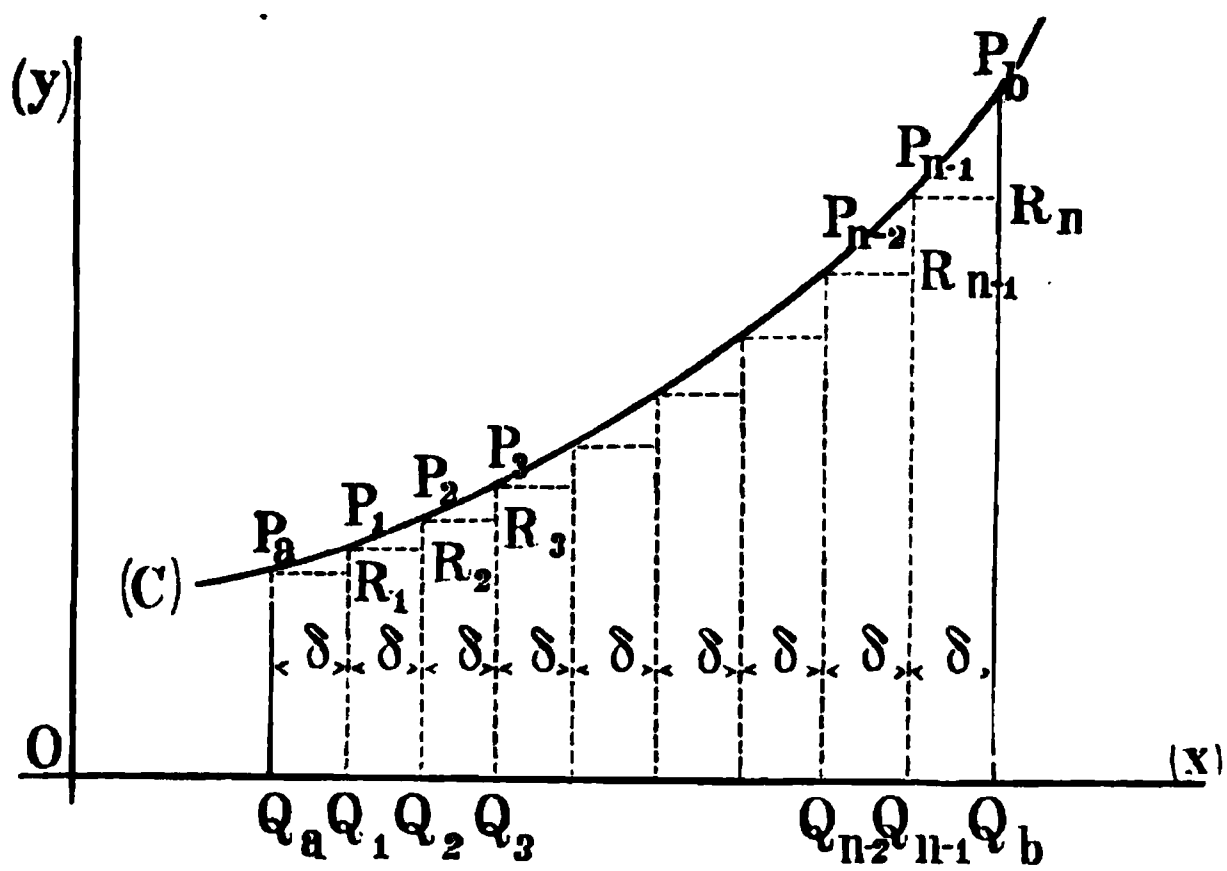
Es ist der Flächeninhalt der ebenen Figur zu bestimmen, welche von einer stetig verlaufenden Curve, die durch ihre auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Gleichung

$$y = f(x)$$

gegeben ist, dann von der Abscissenaxe und den beiden Ordinaten $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird.

Ist also C (Fig. 4) die durch die gegebene Gleichung dargestellte

Fig. 4.




Curve und $\bar{O}\bar{Q}_a = a$, $OQ_b = b$, so besteht die Aufgabe darin, den Flächeninhalt der gemischtlinigen Figur $Q_a Q_b P_b P_{n-2} P_3 P_a Q_a$ zu berechnen.

Zur Lösung dieser Aufgabe theilt man die Strecke $\overline{Q_a Q_b}$ in n gleiche Theile und errichtet in den (n — 1) Theilpunkten $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, . . . $Q_{n-2}$, $Q_{n-1}$, die Ordinaten, wodurch die zu berechnende Fläche in n Parallelstreifen von der Breite

$$\delta = \frac{\overline{Q_a Q_b}}{n} = \frac{b - a}{n}$$

getheilt erscheint.

Bezeichnet man nun die Flächeninhalte des 1., 2., . . . $i^{ten}$, . . . $n^{ten}$ Parallelstreifens mit $F_1, F_2, \ldots F_i, \ldots F_n$, so ist die gesuchte Fläche gegeben durch die Summe

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_i + \ldots + F_{n-1} + F_n = \sum_{i=1}^{i=n} F_i.$$

Zieht man durch die Curvenpunkte $P_a$, $P_1$, $P_2$, $P_3$, . . . $P_{n-1}$ Parallele zur Abscissenaxe bis zu den Punkten $R_1$, $R_2$, . . . $R_n$, so wird dadurch jeder der Parallelstreifen in ein Rechteck und ein Dreieck zerlegt.

Alle Dreiecke sind, wenn die Zahl n der Streifen sehr groß. also $\delta$ sehr klein ist, im Verhältnis zu den zugehörigen Rechtecken sehr klein, und zwar umso kleiner, je kleiner $\delta$ (je größer n) ist, und schließlich werden sie zu unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung. weil sie zwei unendlich kleine Dimensionen erlangen, wenn die Breite der Streifen $\delta$ unbeschränkt abnimmt, während die Rechtecke nur unendlich klein der ersten Ordnung werden.

Bildet man also die Summe aller dieser Rechtecke, so unterscheidet sich dieselbe umsoweniger von der gesuchten Fläche je kleiner $\delta$, d. h. je größer n wird, und sie kommt ihr unbeschränkt nahe, wenn $\delta$ unendlich klein, d. h. n unendlich groß wird.

Bezeichnet man die Flächen der aufeinander folgenden Rechtecke mit $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, . . . $\varphi_i$, . . . $\varphi_n$, so kann man setzen:

$$A = \text{area}\,(Q_a\, Q_b\, P_b\, P_{n-1}\, P_3\, P_a\, Q_a) =$$

$$= \lim_{n=\infty} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_i + \ldots + \varphi_{n-1} + \varphi_n) = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i.$$

Nun ist aber zufolge der Gleichung $y = f(x)$ der Curve $\overline{Q_a P_a} = f(a)$. $\overline{Q_1 P_1} = f(a + \delta)$, $\overline{Q_2 P_2} = f(a + 2\delta) \ldots$, $\overline{Q_{n-1} P_{n-1}} = f[a + (n - 1)\delta]$. somit:

$$\varphi_1 = \overline{Q_a P_a} \,.\, \delta = f(a)\,\delta$$
$$\varphi_2 = \overline{Q_1 P_1} \,.\, \delta = f(a + \delta)\,\delta$$
$$\varphi_3 = \overline{Q_2 P_2} \,.\, \delta = f(a + 2\delta)\,\delta$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\varphi_{n-1} = \overline{Q_{n-2}\,P_{n-2}}\,.\,\delta = f[a + (n-2)\,\delta]\,\delta$$
$$\varphi_n = \overline{Q_{n-1}\,P_{n-1}}\,.\,\delta = f[a + (n-1)\,\delta]\,\delta,$$

demnach die gesuchte Fläche:

$$A = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i =$$

$$= \lim_{\delta=0} \left[ f(a)\,\delta + f(a+\delta)\,\delta + f(a+2\,\delta)\,\delta + \ldots + f[a + (n-1)\,\delta] \right].$$

Um also die Fläche einer solchen Figur zu berechnen, ist es nothwendig, den Grenzwert einer gesetzmäßig gebildeten Summe zu finden, deren Glieder unendlich klein sind, während die Zahl derselben unendlich groß ist.

Viele andere Aufgaben führen auf diese Aufgabe zurück, so dass es angezeigt erscheint, letztere an und für sich zu lösen, um auf diese Art ein Mittel für die Lösung verschiedener Probleme zu gewinnen.

*b*) Im nachfolgenden soll also die Summe

$$\lim_{\delta=0} \left\{ \delta \left[ f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\,\delta) + \ldots + f[a + (n-1)\,\delta] \right] \right\} =$$

$$= \lim_{\delta=0} \sum_{k=0}^{k=n-1} \delta f(a + k\,\delta)$$

untersucht werden.

Ist $F(x)$ diejenige Function, deren Differentialquotient $f(x)$ ist, also

$$\frac{d\,F(x)}{d\,x} = f(x),$$

oder

$$\int f(x)\,d\,x = F(x) + C,$$

so besteht die Gleichung (2:

$$f(x) = \frac{d\,F(x)}{d\,x} = \lim_{\delta=0} \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta}$$

und zufolge der Formel (5 auch die Gleichung

$$F(x+\delta) - F(x) = \delta f(x) + \varepsilon\,\delta$$

oder

$$f(x)\,\delta = F(x+\delta) - F(x) - \varepsilon\,\delta,$$

in welcher $\varepsilon$ eine Größe bedeutet, welche mit $\delta$ gleichzeitig verschwindet.

Setzt man in die letzte Gleichung statt x nach und nach die Werte a, $a+\delta$, $a+2\delta, \ldots a+(n-1)\delta$, so erhält man:

$$f(a)\,\delta = F(a+\delta) - F(a) - \varepsilon_1\,\delta$$

$$f(a+\delta)\,\delta = F(a+2\delta) - F(a+\delta) - \varepsilon_2\,\delta$$

$$f(a+2\delta)\,\delta = F(a+3\delta) - F(a+2\delta) - \varepsilon_3\,\delta$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$f[a+(n-1)\delta]\,\delta = F(a+n\delta) - F[a+(n-1)\delta] - \varepsilon_n\,\delta.$$

wobei die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$ mit $\delta$ gleichzeitig verschwinden.

Durch Addition dieser Gleichungen folgt:

$$\Big[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f[a+(n-1)\delta]\Big]\delta =$$

$$= F(a+n\delta) - F(a) - \delta\sum_{i=1}^{i=n}\varepsilon_i,$$

also

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f(a+k\delta)\,\delta = F(a+n\delta) - F(a) - \delta\sum_{i=1}^{i=n}\varepsilon_i.$$

Nun ist aber $\frac{b-a}{n} = \delta$, also $b = a+n\delta$; bezeichnet man ferner mit $\alpha$ das arithmetische Mittel der Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, so dass

$$\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_n}{n} = \frac{\sum_1^n \varepsilon_i}{n} = \alpha,$$

wobei $\alpha$ mit den $\varepsilon_i$, also auch mit $\delta$ gleichzeitig verschwindet, so kann man schreiben:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f(a+k\delta)\,\delta = F(b) - F(a) - \delta\,n\,\alpha$$

oder, weil

$$n\delta = b-a,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f(a+k\delta)\,\delta = F(b) - F(a) + \alpha(a-b).$$

Geht man auf den Grenzwert für ein unbeschränkt klein werdendes $\delta$, also für $\delta = 0$ über, so erhält man, weil $\alpha$ mit $\delta$ gleichzeitig verschwindet:

$$\lim_{\delta=0}\ \sum_{k=0}^{k=n-1} f(a+k\delta).\,\delta = F(b) - F(a),$$

wodurch die vorgelegte Aufgabe gelöst erscheint.

Das Convergieren von $\delta$ gegen den Grenzwert Null kann symbolisch, wie dies bereits geschehen, dadurch angedeutet werden, dass bei Weglassung von $\lim_{\delta=0}$ $\mathrm{d}x$ statt $\delta$ geschrieben wird:

$$\lim_{\delta=0}\left[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f[a+(n-1)\delta]\right]\delta=$$

$$=\left[f(a)+f(a+\mathrm{d}x)+f(a+2\,\mathrm{d}x)+\ldots+f[a+(n-1)\,\mathrm{d}x]\right]\mathrm{d}x.$$

Den Grenzwert dieser Summe nennt man das zwischen den Grenzen a und b genommene bestimmte Integral von $f(x)\,\mathrm{d}x$ und bezeichnet denselben mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demnach gilt für die Definition und Wertbestimmung des bestimmten Integrals die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(a)\,\mathrm{d}x+f(a+\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x+f(a+2\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x+\ldots$$

$$\ldots+f[a+(n-1)\,\mathrm{d}x]\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\ldots\quad(109$$

Das bestimmte Integral ist also eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen.

a wird die untere, b die obere Grenze des bestimmten Integrals, das Intervall a bis b das Integrations-Intervall genannt.

Die Glieder der Summe heißen Elemente des bestimmten Integrals. Sie haben die Form $f(x)\,\mathrm{d}x$ und entstehen dadurch, dass x nach und nach alle aufeinander folgenden Werte von a bis b annimmt.

Da die Curve als stetig verlaufend angenommen wurde, so liegt der Untersuchung die Voraussetzung zugrunde, dass $f(x)$ im ganzen Integrationsintervall stetig ist.

**Anmerkung: Es ist nicht nothwendig, dass das Integrationsintervall in gleiche Theile getheilt wird, und es kann nachgewiesen werden, dass der Grenzwert der Summe $\sum_1^n \delta_k\, f(a+\sum_0^k \delta_k)$ für $\lim \delta=0$, also $\lim n=\infty$, stets derselbe, und gleich ist dem bestimmten Integral, nach welchem Gesetze immer die Theilung des Intervalls von a bis b ausgeführt wird.**

Die Definitionsgleichung für das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\ldots\quad(110$$

gibt direct eine Methode zur Wertermittlung desselben, wenn das unbestimmte Integral der Differentialfunction bekannt ist.

Der Wert des bestimmten Integrals ist nämlich gleich der Differenz zwischen den Werten des unbestimmten Integrals, welche dasselbe annimmt, wenn man darin die obere und die untere Grenze für die Variable substituiert.

**Beispiele:**

$$\int_{-1}^{+1} dx = [x]_{-1}^{+1} = 1 - (-1) = 2.$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -[\cos x]_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = 2.$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^3 \frac{\pi}{2}}{3} - \frac{\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\arcsin x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

$$\int_0^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{arc\,tang} x\right]_0^{1} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2(ax)\, dx = \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \text{ (a ganze Zahl).}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \left[\frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tang} \frac{b \operatorname{tang} x}{a}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2ab}.$$

$$\int_0^{\pi} \cos(ax)\cos(bx)\, dx = \left[\frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}\right]_0^{\pi} = 0$$

(wenn a und b ganze Zahlen sind,

u. s. w.

Denkt man sich die obere Grenze eines bestimmten Integrals veränderlich, die untere Grenze constant, aber sonst willkürlich, und schreibt dementsprechend $x_0$ statt a, x statt b, so hat man:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = F(x) - F(x_0).$$

Weil aber $x_0$ ganz willkürlich ist, so ist auch $F(x_0)$ eine willkürliche Constante, und man kann nach Weglassung der Grenzen auch schreiben:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Daraus ist zu ersehen, dass das unbestimmte Integral ebenfalls eine Summe repräsentiert, die mit einem ganz willkürlichen Elemente $f(x_0)\,dx$ beginnt und bis zu einem unbestimmt gelassenen Elemente $f(x)\,dx$ fortgesetzt wird.

## § 19. Fundamentalsätze über bestimmte Integrale.

1. Vertauscht man die Grenzen des bestimmten Integrals, so ändert dasselbe bloß sein Vorzeichen.

Der Beweis dieses Satzes ist in der Definitionsgleichung des bestimmten Integrals enthalten, ergibt sich auch durch die Wertermittlung

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b),$$

demnach

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111$$

oder

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111a$$

2. Schließen die Integrationsintervalle mehrerer bestimmter Integrale, deren Elemente dieselbe Form haben, aneinander an, so kann die Summe derselben durch ein Integral dargestellt werden.

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx,$$

Denn es ist:

$$F(b) - F(a) + F(c) - F(b) + F(d) - F(c) = F(d) - F(a).$$

Die Umkehrung dieses Satzes gibt ein Mittel zur Zerlegung eines bestimmten Integrals in eine Summe mehrerer bestimmter Integrale mit anschließenden Integrationsintervallen und Elementen derselben Form.

So ist beispielsweise

$$\int_0^{a+b+c} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{a+b+c} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{a+b} f(x)\,dx + \int_{a+b}^{a+b+c} f(x)\,dx.$$

Von dieser Zerlegung wird bei der Integration durch eine mehrdeutige Substitution Gebrauch gemacht.

3. Eine Summe von mehreren, zwischen denselben Grenzen genommenen Integralen kann durch ein bestimmtes Integral dargestellt werden.

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b [f(x) + g(x) + h(x)]\,dx.$$

Wird das unbestimmte Integral jeder Differentialfunction mit demselben, aber großen Buchstaben als Functionszeichen bezeichnet. so folgt aus dem Begriffe des bestimmten Integrals

$$F(b) - F(a) + G(b) - G(a) + H(b) - H(a) =$$

$$= [F(b) + G(b) + H(b)] - [F(a) + G(a) + H(a)],$$

wodurch der Satz bewiesen erscheint.

4. Wird eine der Grenzen des bestimmten Integrals unendlich groß, so hat das bestimmte Integral überhaupt nur dann einen Sinn, wenn es trotzdem einen endlichen Wert besitzt.

Da aber

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1),$$

so kann offenbar, wenn $x_1$ oder $x_2$ unendlich wird, das Integral nur dann endlich bleiben, wenn $F(x) = \int f(x)\,dx$ für $x = \infty$ endlich bleibt.

So ist beispielsweise

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{1} = 1,$$

also endlich trotz unendlicher oberer Grenze.

Ein analoges Verhalten zeigen die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \left[-\frac{e^{-ax}}{a}\right]_0^\infty = \left[\frac{e^{-ax}}{a}\right]_\infty^0 = \frac{1}{a},$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2a}.$$

Hingegen hat das Integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} = \left[lx\right]_0^\infty = \infty,$$

weil es unendlich groß wird, keinen Sinn.

Ist eine Function $f(x)$ für alle Werte von x, welche zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegen, stetig, so kann auch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

dessen beide Grenzen unendlich sind, einen endlichen Wert haben, wenn der Wert des unbestimmten Integrals der Function bei nach beiden Richtungen ins Unendliche wachsendem x, gegen endliche Grenzen convergiert.

So ist beispielsweise

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a}$$

trotz unendlicher Grenzen endlich.

Es existiert kein allgemeines Kennzeichen zur Beurtheilung, ob ein bestimmtes Integral mit unendlichen Grenzen einen Sinn hat oder unendlich wird, wenn das unbestimmte Integral der Differentialfunction nicht bekannt ist. Diesbezüglich lassen sich wohl Anhaltspunkte geben, die aber nicht allgemein zutreffende Entscheidungen ermöglichen und nur mit großer Vorsicht zu benützen sind, weshalb von ihrer Angabe mit Rücksicht auf den Zweck des Buches abgesehen wird.

5. Zur Berechnung unbestimmter Integrale wurde nebst anderen auch von der Methode der Substitution einer neuen Variablen Gebrauch gemacht.

In dem Resultate musste aber sodann die ursprüngliche Variable durch Rücksubstitution wieder eingeführt werden.

Diese Methode kann auch beim bestimmten Integral angewendet werden. Ein Zurückkommen auf die ursprüngliche Variable ist aber nicht nothwendig, sobald das umgeformte Integral zwischen richtig bestimmten Grenzen genommen wird.

Denn der Wert eines bestimmten Integrals wird durch eine Transformation der Variablen nicht geändert, wenn gleichzeitig die Grenzen desselben, mit Rücksicht auf die Substitutionsgleichung entsprechend geändert werden.

Es sei gegeben das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \ldots \quad (\alpha$$

welches durch die Substitution

$$x = \varphi(u) \quad \ldots \quad (\beta$$

transformiert werden soll.

Durch Differentiation der Substitutionsgleichung (β erhält man:

$$dx = \varphi'(u)\,du,$$

und hat als transformierte Differentialfunction unter dem Integralzeichen

$$f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du.$$

Da sich durch diese Transformation die Elemente des Integrals ändern, müssen die Grenzen der Integration entsprechend neu bestimmt werden, wenn der Wert des bestimmten Integrals derselbe bleiben soll.

Das vorgelegte Integral (α ist eine Summe der Elemente $f(x)\,dx$ für alle Werte des x, welche von $x = a$ angefangen bis $x = b$ liegen.

Das transformierte Integral ist die Summe aller Elemente $f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du$ für alle in dem noch zu bestimmenden Intervall $u_1$ bis $u_2$ gelegenen Werte von u.

Löst man nun die Substitutionsgleichung (β nach u auf und erhält dadurch z. B.

$$u = \psi(x),$$

so gibt die letzte Gleichung die den Werten $x = a$ und $x = b$ entsprechenden Werte des u, $u_1 = \psi(a)$ und $u_2 = \psi(b)$; denn während x alle Werte annimmt, welche zwischen $x = a$ und $x = b$ liegen, durchläuft u alle Werte des Intervalls $\psi(a)$ bis $\psi(b)$, mithin ist dieses das entsprechende Integrationsintervall des transformierten Integrals.

Es besteht also die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du.$$

Die Bestimmung der Grenzen des transformierten Integrals gestaltet sich demnach sehr einfach, wenn die Substitutionsgleichung

$$x = \varphi(u)$$

aufgelöst werden kann und eindeutig ist, d. h. wenn jedem Werte von x nur ein bestimmter Wert von u und umgekehrt entspricht, wie dies in folgenden zwei Beispielen der Fall ist.

1. Es ist das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{a+bx}$$

durch die Substitution

$$a + bx = u$$

zu transformieren.

Aus der Substitutionsgleichung folgt:

$$dx = \frac{1}{b}\,du,$$

ferner wird für $x = 0$, $u = a$; für $x = 1$, $u = a + b$.

Es ist somit

$$\int_0^1 \frac{dx}{a+bx} = \int_a^{a+b} \frac{1}{b}\frac{du}{u} = \frac{1}{b}\int_a^{a+b} \frac{du}{u} = \frac{1}{b}\,l\frac{a+b}{a}.$$

2. Das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

ist durch die Substitution

$$\sqrt{1+x^2} = t$$

zu transformieren.

Aus der Substitutionsgleichung folgt:

$$x^2 = t^2 - 1, \quad x^4 = (t^2-1)^2, \quad 4x^3\,dx = 4t(t^2-1)\,dt,$$

also $x^3\,dx = t(t^2-1)\,dt$; ferner wird für $x = 0$, $t = 1$ und für $x = 1$, $t = \sqrt{2}$.

Es ist demnach

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)\,dt = \int_1^{\sqrt{2}} t^2\,dt - \int_1^{\sqrt{2}} dt = \frac{2-\sqrt{2}}{3}.$$

Ist die Substitutionsgleichung $x = \varphi(u)$ mehrdeutig, d. h. gehören zu jedem Werte des u mehrere Werte von x oder zu jedem Werte des x mehrere Werte von u, was aus ihrer Auflösung $u = \psi(x)$ leicht zu ersehen ist, so ergeben sich bei der Umformung des bestimmten Integrals Schwierigkeiten.

Für die Umformung in derartigen Fällen können keine allgemein giltigen Regeln aufgestellt werden; es erfordert eben jeder Fall für sich eine besondere Untersuchung, was an einigen Beispielen erläutert werden soll.

1. Das Integral

$$\int_{-1}^{+1} dx$$

ist durch die Substitution

$$x^2 = u$$

zu transformieren.

Aus der Transformationsgleichung folgt:

$$x = \pm\sqrt{u}$$

$$dx = \pm\frac{du}{2\sqrt{u}}.$$

Die Substitutionsgleichung ist zweideutig, es ist also bei der Umformung des Integrals eine besondere Vorsicht zu gebrauchen.

Durch unüberlegtes Acceptieren des oberen Zeichens würde man, da u sowohl für $x = +1$ als auch für $x = -1$ den Wert 1 annimmt,

$$\int_{-1}^{1} dx = \int_1^1 \frac{du}{2\sqrt{u}} = 0$$

erhalten, weil die Integrationsgrenzen gleich sind, und es ist doch

$$\int_{-1}^{1} dx = 1 + 1 = 2.$$

Dasselbe falsche Resultat würde die Annahme des negativen Zeichens ergeben.

Der Grund der Unrichtigkeit liegt in folgendem:

Das Integrationsintervall $-1$ bis $+1$ übergreift die Null, im Gebiete $-1$ bis 0 ist x wesentlich negativ; demnach muss für diesen Theil des Integrationsintervalls $x = -\sqrt{u}$ gesetzt werden. Im Intervall 0 bis $+1$ ist x wesentlich positiv, daher die Substitution $x = +\sqrt{u}$ einzig richtig.

Es muss also für die Ausführung der angegebenen Substitution das gegebene Integral in die Summe zweier Integrale mit anschließenden Integrationsintervallen zerlegt werden:

$$\int_{-1}^{+1} d\,x = \int_{-1}^{0} d\,x + \int_{0}^{1} d\,x.$$

Substituiert man, wie angedeutet, im ersten Integral rechts $x = -\sqrt{u}$ und im zweiten $x = +\sqrt{u}$, so erhält man, weil für $x = \pm 1$, $u = 1$ und für $x = 0$ auch $u = 0$ ist:

$$\int_{-1}^{+1} d\,x = \int_{-1}^{0} d\,x + \int_{0}^{1} d\,x = -\int_{1}^{0} \frac{d\,u}{2\sqrt{u}} + \int_{0}^{1} \frac{d\,u}{2\sqrt{u}} =$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{d\,u}{2\sqrt{u}} + \int_{0}^{1} \frac{d\,u}{2\sqrt{u}} = 2\int_{0}^{1} \frac{d\,u}{2\sqrt{u}} = 2.$$

2. Ein analoger Fall würde sich ergeben, wenn in

$$\int_{0}^{\pi} \sin x\, d\,x$$

$$\sin x = u$$

zu substituieren wäre, denn man hätte dann zu setzen:

$$d\,x = \frac{d\,u}{\pm\sqrt{1 - u^2}}$$

und müsste für das Vorzeichen der Wurzel eine besondere Entscheidung treffen.

Die einfache Wahl eines der beiden Vorzeichen gäbe ein unsinniges Resultat; als Wert des Integrals erhielte man nämlich, weil die Grenzen gleich sind, Null, während doch das ursprüngliche Integral eine Summe ausschließlich positiver Größen ist.

Die Ursache dieser Erscheinung liegt darin, dass die Wurzelgröße $\sqrt{1 - u^2}$ für cos x gesetzt wird, nun ist aber der cos x im Wertebereiche von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ positiv und von da bis $x = \pi$ wesentlich negativ. Man hat also, um zum richtigen Resultate zu gelangen,

das Integrationsintervall in diese beiden Theile zu zerlegen, im ersten der Wurzel das positive, und im zweiten das negative Zeichen beizulegen.

Die Grenzen der zwei Integrale ergeben sich, wenn man bedenkt, dass für $x = 0$, $u = 0$; für $x = \frac{\pi}{2}$, $u = 1$ und für $x = \pi$, $u = 0$ wird.

Auf diese Art findet man:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{u \, du}{\sqrt{1 - u^2}} - \int_1^0 \frac{u \, du}{\sqrt{1 - u^2}} = 2 \int_0^1 \frac{u \, du}{\sqrt{1 - u^2}} = 2.$$

3. Bei der Transformation des Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(x + \frac{1}{x}\right)} dx$$

durch die Substitution

$$x + \frac{1}{x} = u$$

ist auch eine besondere Vorsicht zu gebrauchen.

Durch Multiplication mit x erhält man zunächst aus der Substitutionsgleichung

$$x^2 - u x + 1 = 0$$

und daraus

$$x = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4}}{2},$$

oder

$$x = \frac{u}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{u^2 - 4},$$

also

$$dx = \frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4}}\right] du.$$

Die Substitution ist zweideutig, und es muss die Entscheidung getroffen werden, welches Vorzeichen der Wurzel gewählt werden soll.

Die Wahl hängt davon ab, wie sich u zwischen den neuen Integrationsgrenzen verhält.

Zufolge der Definition des bestimmten Integrals nimmt x alle Werte an, welche zwischen $x = 0$ und $x = +\infty$ liegen.

Aus der Substitutionsgleichung

$$u = x + \frac{1}{x}$$

folgt:

für $x = 0$ ist $u = \infty$,

$x = \frac{p}{m}$ $u = \frac{p}{m} + \frac{m}{p}$ $(m > p)$,

$x = 1$ $u = 2$,

$x = \frac{m}{p}$ $u = \frac{m}{p} + \frac{p}{m}$ $(m > p)$,

$x = \infty$ $u = \infty$.

Wegen der Voraussetzung $m > p$, ist $\frac{p}{m} < 1$ und $\frac{m}{p} > 1$.

Nun lässt sich leicht nachweisen, dass $\frac{p}{m} + \frac{m}{p} > 2$ sein muss.

Denn es ist

$$\frac{p}{m} + \frac{m}{p} = \frac{(p - m)^2 + 2mp}{mp} = 2 + \frac{(p - m)^2}{mp},$$

daher unbedingt

$$\frac{p}{m} + \frac{m}{p} > 2.$$

Während also x von 0 bis 1 zunimmt, nimmt u von $\infty$ bis 2 ab; wenn hingegen x von 1 bis $\infty$ wächst, nimmt u von 2 bis $\infty$ zu.

In dem Theile des Integrationsintervalls 0 bis 1, in welchem u abnimmt, ist d u eine wesentlich negative Größe. in jenem 1 bis $\infty$. in welchem u zunimmt, ist d u wesentlich positiv.

Bei dieser Umformung muss somit das vorgelegte Integral in zwei Integrale mit anschließenden Integrationsintervallen derart zerlegt werden, dass die neue Variable u in dem einen eine abnehmende und in dem anderen eine wachsende Größe ist.

Eine derartige Zerlegung ist nach dem über das Verhalten von u Gesagten folgende:

$$\int_0^\infty e^{-\left(x + \frac{1}{x}\right)} dx = \int_0^1 e^{-\left(x + \frac{1}{x}\right)} dx + \int_1^\infty e^{-\left(x + \frac{1}{x}\right)} dx.$$

Wird nun die Umformung durch die Substitution ausgeführt, so ist im ersten Integrale der rechten Seite, weil u im Integrationsintervall abnehmend ist, d u eine wesentlich negative Größe, im zweiten Integral ist u wachsend, also d u wesentlich positiv.

Nun ist aber

$$\mathrm{d}\,u = \frac{\mathrm{d}\,x}{\frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4}}\right]},$$

und d x eine wesentlich positive Größe, weil x im ganzen Integrationsintervall wächst, ferner $u > \sqrt{u^2 - 4}$, d. h. $\frac{u}{\sqrt{u^2 - 4}} > 1$, somit d u negativ, wenn das negative, und positiv, wenn das positive Zeichen der Wurzel genommen wird.

Die richtig ausgeführte Umformung gibt also:

$$\int_0^\infty e^{-\left(x + \frac{1}{x}\right)}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_\infty^2 e^{-u}\left[1 - \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4}}\right]\mathrm{d}\,u +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_2^\infty e^{-u}\left[1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4}}\right]\mathrm{d}\,u$$

und nach Zerlegung der Integrale in Summen von Integralen und einfacher Reduction:

$$\int_0^\infty e^{-\left(x + \frac{1}{x}\right)}\,\mathrm{d}\,x = \int_2^\infty e^{-u}\,\frac{u}{\sqrt{u^2 - 4}}\,\mathrm{d}\,u.$$

## § 20. Wertermittlung bestimmter Integrale.

*1.* Ist das unbestimmte Integral der Differentialfunction $f(x)\,\mathrm{d}\,x$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(x) + C$$

bekannt, und die Function $f(x)$ im ganzen Integrationsintervall endlich und stetig, so ist, wie bereits ausgeführt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a),$$

demnach die Wertermittlung des bestimmten Integrals mit keinen Schwierigkeiten verbunden, was bereits durch einige Beispiele illustriert wurde.

Hiezu sei nur noch bemerkt: Existiert für das unbestimmte Integral eine Reductionsformel, so ist damit auch für das bestimmte Integral eine Reductionsformel gegeben.

So besteht beispielsweise die Reductionsformel

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx,$$

demnach auch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \left[-\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx,$$

und da der erste Theil rechts vom Gleichheitszeichen für beide Grenzen verschwindet, so ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx.$$

Ist nun n eine ganze positive Zahl, so erhält man durch wiederholte Anwendung dieser Formel, je nachdem n gerade oder ungerade, die Schlussintegrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

oder

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Somit für gerades n:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (113$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (n-3)\, n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (n-2) \cdot n}.$$

Hingegen für ungerades n:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \quad (113a$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (n-3) \cdot (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (n-2) \cdot n}.$$

Anmerkung: Die hier gefundenen Werte ermöglichen die Ableitung einer merkwürdigen Formel, welche von Wallis gefunden wurde und auch dessen Namen führt

Da x zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, so ist sin x ein echter Bruch, also

$$\sin^n x > \sin^{n+1} x > \sin^{n+2},$$

demnach ist auch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x \, dx,$$

weil die Elemente des ersten Integrals größer sind als die Elemente des zweiten, und diese wieder größer als die Elemente des dritten Integrals.

Angenommen n sei eine ungerade Zahl, dann ist $n+1$ gerade und $n+2$ wieder ungerade, man erhält also durch Anwendung der abgeleiteten Formeln:

$$\frac{2.4.6.8\ldots(n-1)}{3.5.7.9\ldots n} > \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5.7\ldots n}{2.4.6.8\ldots(n+1)} >$$

$$> \frac{2.4.6.8\ldots(n-1)(n+1)}{3.5.7.9\ldots n\ (n+2)},$$

oder, weil rechts

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}:$$

$$\frac{2.4.6.8\ldots(n-1)}{3.5.7.9\ldots n} > \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5\ldots n}{2.4.6\ldots(n+1)} >$$

$$> \frac{2.4.6.8\ldots(n-1)}{3.5.7.9\ldots n}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right).$$

Nimmt n ins Unendliche zu, so convergiert $\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$ gegen die Einheit. also die beiden äußeren Brüche gegen denselben Grenzwert, welcher demzufolge auch der Grenzwert des mittleren Bruches ist.

Für ein gegen Unendlich wachsendes n ist somit:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5.7\ldots}{2.4.6.8\ldots} = \frac{2.4.6.8\ldots}{3.5.7.9\ldots}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7\ldots}$$

Den Wert von $\frac{\pi}{2}$ erhält man aus dieser Gleichung umso genauer, je mehr Factoren man im Zähler und Nenner nimmt, es müssen aber im Nenner mit Einschluss der vorangestellten Einheit ebenso viele Factoren genommen werden als im Zähler.

Es ist direct einzusehen, dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx, \quad \ldots \ldots \quad (114$$

weil beide Integrale dieselben Elemente haben, nur in umgekehrter Reihenfolge.

Aus der Reductionsformel

$$\int \operatorname{tang}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tang}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tang}^{n-2} x \, dx$$

folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tang}^n x \, dx = \left[\frac{\operatorname{tang}^{n-1} x}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tang}^{n-2} x \, dx,$$

also

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tang}^n x \, dx = \frac{1}{n-1} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tang}^{n-2} x \, dx.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Reductionsformel gelangt man schließlich, je nachdem n eine gerade oder ungerade positive ganze Zahl ist, zu einem der Schlussintegrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$$

oder

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tang} x \, dx = \left[-\operatorname{l}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\operatorname{l}\frac{1}{2}\sqrt{2} = \operatorname{l}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\operatorname{l} 2.$$

Demnach ist, wenn n eine gerade Zahl:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tang}^n x \, dx = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-5} - \ldots \pm 1 \mp \frac{\pi}{4}, \quad (115$$

und wenn n eine ungerade Zahl:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tang}^n x \, dx = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-5} - \ldots \pm \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\operatorname{l} 2. \quad (115a$$

Ist das unbestimmte Integral der Differentialfunction $f(x)\,dx$ nicht bekannt, und ist es nicht möglich, dasselbe zu ermitteln, so müssen zur Bestimmung des Wertes des bestimmten Integrals andere Methoden angewendet werden.

Die wichtigsten derselben sollen in folgendem erläutert werden:

*2. Grenzen für den Wert eines bestimmten Integrals.*

Ist es möglich, zwei Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zu finden, welche integrierbar sind und die Eigenschaft besitzen, dass für alle innerhalb des Integrationsintervalls gelegenen Werte des x

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x),$$

dann ist auch

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Nachdem nun laut Voraussetzung die Werte der äußeren Integrale angegeben werden können, so sind bereits für den Wert des mittleren Integrals die Grenzen bestimmt, innerhalb welcher er liegen muss.

Das Wesen und der Wert dieser Methode soll an zwei Beispielen gezeigt werden.

1. Es ist der Wert des Integrals

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$$

zu ermitteln unter der Voraussetzung, dass $n > 2$ ist.

In diesem Falle ist die Integration in geschlossener Form unmöglich.

Innerhalb des ganzen Integrationsintervalls ist:

$$1 > \sqrt{1-x^n} > \sqrt{1-x^2},$$

denn im ganzen Intervall 0 bis $\frac{1}{2}$ ist x ein positiver echter Bruch, also $1 > 1-x^n$, folglich auch $1 > \sqrt{1-x^n}$; ferner ist $x^n < x^2$, weil $n > 2$, daher $1-x^n > 1-x^2$ und $\sqrt{1-x^n} > \sqrt{1-x^2}$.

Aus der aufgestellten Ungleichheit folgt:

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

es ist somit

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

d. h.

$$\Big[x\Big]_0^{\frac{1}{2}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \Big[\arcsin x\Big]_0^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \arcsin \frac{1}{2}.$$

Nun ist aber $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{3{\cdot}1415}{6} = 0{\cdot}5236$; mithin ist

$$0{\cdot}5 < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < 0{\cdot}5236$$

für jedes n, welches größer ist, wie 2.

Die Grenzen, zwischen welchen das Integral eingeschlossen wurde, sind bis auf die erste Decimalstelle gleich, wenn man sich also mit dem bis auf eine Decimalstelle genauen Werte begnügen kann, so hat man den Wert des Integrals mit 0·5 anzusetzen.

2. Es ist der Wert des Integrals

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

zu ermitteln, wobei k ein echter Bruch ist ($k < 1$).

Dieses Integral ist das vollständige elliptische Integral erster Gattung und in endlicher Form nicht darstellbar.

Sicher ist, weil der Radicant ein echter Bruch:

$$1 > \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} > 1-k^2\sin^2\varphi,$$

demnach

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} < \frac{1}{1-k^2\sin^2\varphi}$$

und

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Das Integral

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

kann dargestellt werden; ersetzt man nämlich darin die Einheit durch $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$, so geht es in

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + (1 - k^2) \sin^2 \varphi} = \int \frac{\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}}{1 + (1 - k^2) \operatorname{tang}^2 \varphi}$$

über; und weil k ein echter Bruch ist, so ist $1 - k^2 > 0$, also

$$\int \frac{\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}}{1 + (1 - k^2) \operatorname{tang}^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \operatorname{arc\,tang} (\sqrt{1 - k^2} \operatorname{tang} \varphi) + C.$$

folglich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \operatorname{arc\,tang} (\sqrt{1 - k^2} \operatorname{tang} \varphi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - k^2}}.$$

Man hat sonach:

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} < \frac{\pi}{2\sqrt{1 - k^2}}.$$

Das Integral ist zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, die umso enger sind, je kleiner k ist.

Ist beispielsweise $k = \frac{1}{20}$; dann ist $\frac{\pi}{2\sqrt{1 - k^2}} = 1{\cdot}5728$ und somit

$$1{\cdot}5691 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{20}\right)^2 \sin^2 \varphi}} < 1{\cdot}5728,$$

d. h. auf eine Decimalstelle genau hat das Integral den Wert 1·5.

### 3. *Der Mittelwertsatz.*

Die Function unter dem Integralzeichen $f(x)$ sei als Product zweier Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ darstellbar, von welchen eine $\psi(x)$ für alle Werte des Integrationsintervalls dasselbe Vorzeichen beibehält:

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx.$$

Nun sei vorausgesetzt, dass $\psi(x)$ für alle zwischen a und b gelegenen Werte von x beständig positiv sei, ferner dass m der kleinste und M der größte Wert ist, den die Function $\varphi(x)$ im Integrationsintervall annehmen kann.

Zufolge der Voraussetzung ist

$$m < \varphi(x) < M$$

für alle Werte des x, welche zwischen $x = a$ und $x = b$ liegen, und weil $\psi(x)$ beständig positiv bleibt, besteht auch die Ungleichheit:

$$m\,\psi(x) < \varphi(x)\,\psi(x) < M\,\psi(x),$$

demzufolge ist ebenso:

$$m\int_a^b \psi(x)\,dx < \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx < M\int_a^b \psi(x)\,dx,$$

und es muss einen zwischen m und M gelegenen Mittelwert $\mu$ geben, für welchen die Gleichung besteht:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \mu\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Nun sind m und M Werte, welche die Function $\varphi(x)$ in dem Integrationsintervall annimmt, und zwar speciell m der kleinste und M der größte Wert derselben, folglich muss die Function, da sie als stetig vorausgesetzt wird, mindestens an einer Stelle des Integrationsintervalls den zwischen m und M gelegenen Functionswert $\mu$ annehmen.

Bezeichnet diese Stelle $x = \xi$, so ist im allgemeinen

$$a < \xi < b, \qquad \mu = \varphi(\xi)$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Diese Gleichung wird der verallgemeinerte Mittelwertsatz genannt.

Der einfache Mittelwertsatz wird erhalten, wenn man $\psi(x) = 1$ und $\varphi(x) = f(x)$ setzt; dadurch ergibt sich

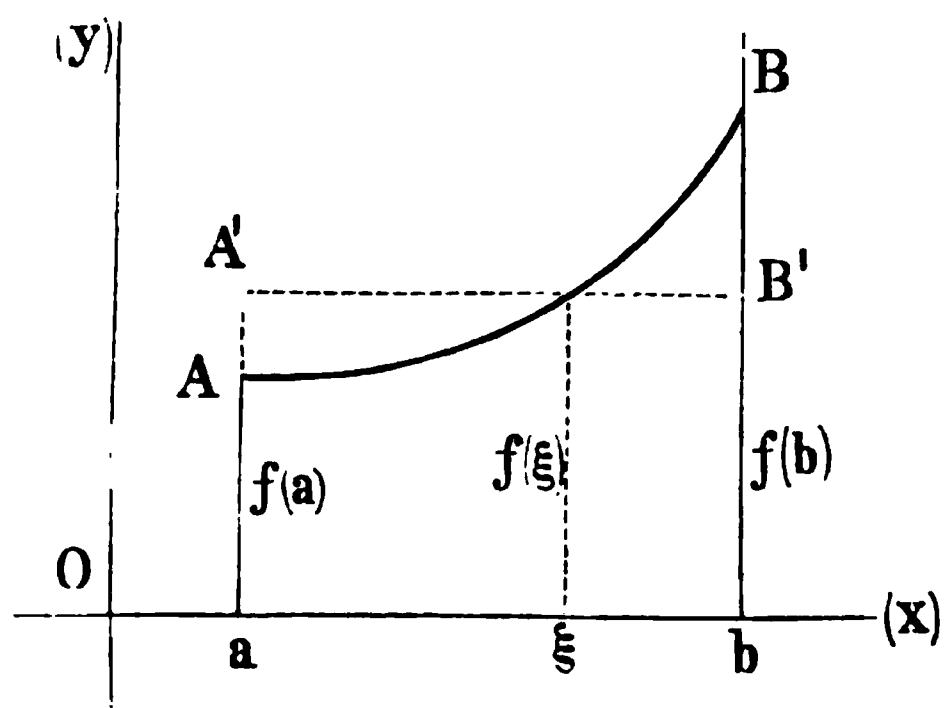
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) f(\xi),$$

wobei $\xi$ ein Wert von $x$ aus dem Intervall a bis b ist.

Die letzte Gleichung hat einen sehr einfachen geometrischen Sinn. Es ist nämlich:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area}\,(a\,b\,B\,A\,a)$$

Fig. 5.




$(b - a) f(\xi)$ (Fig. 5) stellt die Rechteckfläche a b B' A' a von der Basis $b - a$ und der Höhe $\xi$ vor, die einem Mittelwerte von $f(x)$ entspricht, der immer vorhanden ist.

Der Mittelwertsatz kann zur näherungsweisen Berechnung des Wertes eines bestimmten Integrals angewendet werden, wie das folgende Beispiel zeigt.

Gegeben ist das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)\,(1 - k^2 x^2)}},$$

wobei $k^2 < 1$, also ein echter Bruch sein soll.

Setzt man:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 x^2}} \text{ und } \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

so bleibt $\psi(x)$ beständig real und positiv, weil $x$ nur Werte annimmt, welche zwischen 0 und 1 liegen und das negative Vorzeichen der Wurzel ausgeschlossen wird. Man kann also zufolge des Mittelwertsatzes schreiben:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)\,(1 - k^2 x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \Theta^2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

wobei $\Theta$ ein Wert von $x$ aus dem Integrationsintervall, mithin ein echter Bruch ist.

Es ist somit:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2\Theta^2}} \Big[\arcsin x\Big]_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2,(1-k^2x^2)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-k^2\Theta^2}}.$$

Setzt man für $\Theta$ die beiden äußersten Werte ein, welche es annehmen kann, nämlich 0 und 1, so erhält man die Grenzen, innerhalb welcher der Integralwert liegen muss:

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}} < \frac{\pi}{2\sqrt{1-k^2}}.$$

Dieses Integral hat also einen Wert, welcher zwischen denselben Grenzen liegt, wie der Wert des sub 2. angeführten elliptischen Integrals. Es ist auch thatsächlich mit dem früher besprochenen elliptischen Integral identisch und nur in seiner algebraischen Form dargestellt.

Setzt man nämlich $x = \sin\varphi$, dann ist $dx = \cos\varphi\, d\varphi$. Die Grenzen des Integrals werden zufolge der Substitutionsgleichung 0 und $\frac{\pi}{2}$, weil für $x = 0$, $\varphi = 0$ und für $x = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und man findet:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

*4. Methode der Differentiation unter dem Integralzeichen.*

Der Wert eines bestimmten Integrals ist von der Integrationsvariablen ganz unabhängig und hängt nur von den beiden Grenzen, dann den Constanten oder Parametern der Function unter dem Integralzeichen ab.

Betrachtet man diese Größen als variabel, so ist das bestimmte Integral eine Function derselben und kann nach einer dieser Größen differenziert werden.

Die Differentiation eines bestimmten Integrals nach einer der Integrationsgrenzen ergibt sich direct aus dem Begriffe eines Integrals.

Unter dem Integral einer Differentialfunction $f(x)\,dx$ versteht man nämlich diejenige Function $F(x)$, deren Differential die Differentialfunction ist:

$$\mathrm{d}\,\mathrm{F}(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\,\mathrm{x},$$

d. h.

$$\mathrm{F}'(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}).$$

Hat man also

$$\mathrm{J} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\,\mathrm{x} = \mathrm{F}(\mathrm{b}) - \mathrm{F}(\mathrm{a})$$

nach den oberen Grenzen b zu differenzieren, d. h. den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \mathrm{b}}$ zu bilden, so findet man, weil F(a) von b ganz unabhängig ist:

$$\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \mathrm{b}} = \frac{\partial \mathrm{F}(\mathrm{b})}{\partial \mathrm{b}},$$

und weil F(b) dadurch gebildet wird, dass in F(x) statt x, b substituiert wird, demnach

$$\mathrm{F}(\mathrm{b}) = [\mathrm{F}(\mathrm{x})]_{\mathrm{x}=\mathrm{b}}$$

ist, schließlich

$$\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \mathrm{b}} = \left[\frac{\partial \mathrm{F}(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}}\right]_{\mathrm{x}=\mathrm{b}} = f(\mathrm{x})_{\mathrm{x}=\mathrm{b}} = f(\mathrm{b}).$$

Der Differentialquotient eines bestimmten Integrals nach seiner oberen Grenze ist gleich dem dieser Grenze zugehörigen Werte der Function unter dem Integralzeichen.

Soll der partielle Differentialquotient des Integrals

$$\mathrm{J} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\,\mathrm{x}$$

nach der unteren Grenze gebildet werden, so findet man durch Zurückführen dieses Falles auf den vorigen, weil

$$\mathrm{J} = -\int_{\mathrm{b}}^{\mathrm{a}} f(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\,\mathrm{x}$$

$$\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \mathrm{a}} = -f(\mathrm{a}).$$

Der Differentialquotient eines bestimmten Integrals nach der unteren Grenze ist der negative, dieser Grenze entsprechende Wert der Function unter dem Integralzeichen.

**Beispiele:**

1. $$J = \int_a^b \frac{dx}{1+x},$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{1}{1+b}; \quad \frac{\partial J}{\partial a} = -\frac{1}{1+a}.$$

2. $$J = \int_a^b \frac{x^m}{1+x^n} dx,$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{b^m}{1+b^n}; \quad \frac{\partial J}{\partial a} = -\frac{a^m}{1+a^n}$$

u. s. w.

Enthält die Differentialfunction einen Parameter $\alpha$:

$$f(x, \alpha)\, dx,$$

dann ist das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = F(b, \alpha) - F(a, \alpha)$$

auch eine Function dieses Parameters $\alpha$, und es kann in Bezug auf diesen partiell differenziert werden.

Zunächst sei nun vorausgesetzt, dass die beiden Grenzen b und a von $\alpha$ ganz unabhängig sind.

Der Wert des bestimmten Integrals sei als Function von $\alpha$ der Kürze wegen mit $\varphi(\alpha)$ bezeichnet, so dass also

$$\varphi(\alpha) = F(b, \alpha) - F(a, \alpha),$$

demnach

$$\int_a^b f(x, a)\, dx = \varphi(\alpha).$$

Geht nun $\alpha$ in $\alpha + h$ über, so erhält man:

$$\int_a^b f(x, \alpha + h)\, dx = \varphi(\alpha + h)$$

und

$$\int_a^b f(x, \alpha + h)\, dx - \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha),$$

oder, wenn beide Integrale unter ein Integralzeichen zusammengezogen werden:

$$\int_a^b [f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)]\, dx = \varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha).$$

Dividiert man nun beiderseits mit h, und geht auf die Grenze über für ein gegen Null convergierendes h, so hat man:

$$\int_a^b \lim_{h=0} \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h}\, dx = \lim_{h=0} \frac{\varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha)}{h};$$

also schließlich:

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx = \varphi(\alpha).$$

Man erhält den Differentialquotienten eines Integrals nach einem Parameter der Function unter dem Integralzeichen, wenn man dieselbe nach dem Parameter differenziert und sodann die Integration ausführt.

Sind auch die Integrationsgrenzen eines bestimmten Integrals Functionen des Parameters $\alpha$, dann ist das bestimmte Integral

$$J = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = F(b, \alpha) - F(a, \alpha)$$

eine Function von a, b und $\alpha$, wobei a und b wieder Functionen des $\alpha$ sind, was beim Differenzieren berücksichtigt werden muss.

Der Differentialquotient des als Function von $\alpha$ aufgefassten Integrals J erscheint dann gegeben durch:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{\partial J}{\partial \alpha} + \frac{\partial J}{\partial b}\frac{db}{d\alpha} + \frac{\partial J}{\partial a}\frac{da}{d\alpha}.$$

Bei der partiellen Differentiation von J nach $\alpha$ werden a und b als Constante angesehen, es liegt also bei der Bildung von $\frac{\partial J}{\partial \alpha}$ der früher angeführte Fall vor, es ist

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx.$$

Bei der partiellen Differentiation von J nach a, beziehungsweise b, sind b und $\alpha$ oder a und $\alpha$ als Constante zu behandeln, d. h. es ist

das Integral nach der oberen, beziehungsweise unteren Grenze zu differenzieren. Mithin ist

$$\frac{\partial J}{\partial a} = -f(a, \alpha),$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = f(b, \alpha).$$

Es ist also schließlich:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha}.$$

Die Differentiation von Integralen nach Parametern (Differentiation unter dem Integralzeichen) ist eines der wichtigsten Hilfsmittel für die Ermittlung der Werte bestimmter Integrale, indem durch dieselbe bekannte Integrale verallgemeinert, beziehungsweise aus bekannten Integralen andere hergeleitet werden können.

Dies soll nun an einigen Beispielen veranschaulicht werden.

1. Wenn $n \gtrless (-1)$,

ist

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Betrachtet man in diesem Integral n als willkürlichen Parameter und differenziert nach demselben, so erhält man:

$$\int_0^1 x^n lx\, dx = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Durch nochmalige Differentiation folgt:

$$\int_0^1 x^n (lx)^2 dx = \frac{1 \cdot 2}{(n+1)^3},$$

daraus analog:

$$\int_0^1 x^n (lx)^3 dx = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(n+1)^4},$$

und nach m maliger Differentiation:

$$\int_0^1 x^n (lx)^m dx = (-1)^{m+1} \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

2. Aus dem Integral

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = a^{-1} = \frac{1}{a} \quad (a > 0 \text{ vorausgesetzt})$$

erhält man durch wiederholte Differentiation nach dem Parameter **a**:

$$\int_0^\infty x\,e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a^2},$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax}\,dx = \frac{1\,.\,2}{a^3},$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-ax}\,dx = \frac{1\,.\,2\,.\,3}{a^4},$$

. . . . . .

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax}\,dx = \frac{m!}{a^{m+1}}.$$

3. Durch wiederholte Differentiation des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2} = \frac{\pi}{2}\,a^{-\frac{1}{2}}$$

nach dem positiv vorausgesetzten Parameter a gelangt man zu den Integralen

$$\int_0^\infty -\frac{dx}{(a+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\,a^{-\frac{3}{2}},$$

$$\int_0^\infty \frac{1\,.\,2}{(a+x^2)^3}\,dx = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,2}\frac{\pi}{2}\,a^{-\frac{5}{2}},$$

$$\int_0^\infty -\frac{1\,.\,2\,.\,3}{(a+x^2)^4}\,dx = -\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,2\,.\,2}\frac{\pi}{2}\,a^{-\frac{7}{2}},$$

. . . . . .

$$\int_0^\infty \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m}{(a+x^2)^{m+1}}\,dx = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2m-1)}{2\,.\,2\,.\,2\,\ldots\ldots\,2}\frac{\pi}{2}\,a^{-\frac{1}{2}-m}.$$

Aus dem letzten Integral erhält man nach Division durch m!

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{m+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}{2\cdot 2\cdot 2\ldots\ldots 2\cdot m!}\frac{\pi}{2}a^{-\frac{2m+1}{2}}$$

und wenn man die m gleichen Factoren 2 des Nenners mit m! derart verbindet, dass man mit jedem dieser Factoren einen Factor von m! multipliciert:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{m+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ldots 2m}\frac{\pi}{2a^{\frac{2m+1}{2}}}.$$

4. Aus dem bestimmten Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}$$

folgt durch Differentiation nach a:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{2a\cos^2 x}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}\,dx = \frac{-\pi}{2a^2 b},$$

oder, wenn man mit $-2a$ beiderseits dividiert:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}\,dx = \frac{\pi}{4a^3 b}.$$

Analog erhält man durch Differentiation nach b:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}\,dx = \frac{\pi}{4ab^3}$$

und durch Addition der beiden letzten Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)} = \frac{\pi}{4ab}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

5. Als Beispiel der Differentiation nach einem Parameter, wenn die Grenzen auch Functionen desselben sind, sei das Integral

$$J = \int_{-\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}} e^{\alpha x}\, dx = \left[\frac{e^{\alpha x}}{a}\right]_{-\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{e - e^{-1}}{\alpha} = \frac{e^2 - 1}{e}\,\frac{1}{\alpha}$$

nach dem Parameter $\alpha$ zu differenzieren.

Hier ist

$$J = \frac{e^2 - 1}{e}\,\frac{1}{\alpha},$$

$$f(x, \alpha) = e^{\alpha x},$$

$$a = -\frac{1}{\alpha},$$

$$b = \frac{1}{\alpha},$$

demnach

$$\frac{dJ}{d\alpha} = -\frac{e^2 - 1}{e}\,\frac{1}{\alpha^2},$$

$$\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = x\, e^{\alpha x}.$$

$$f(a, \alpha) = e^{-1}; \quad \frac{da}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha^2},$$

$$f(b, \alpha) = e; \quad \frac{db}{d\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}.$$

Man erhält also mit Rücksicht auf die abgeleitete Formel:

$$-\frac{e^2 - 1}{e}\,\frac{1}{\alpha^2} = \int_{-\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}} x\, e^{\alpha x}\, dx - \frac{e}{\alpha^2} - \frac{e^{-1}}{\alpha^2},$$

oder

$$\int_{-\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}} x\, e^{\alpha x}\, dx = -\frac{e^2 - 1}{e}\,\frac{1}{\alpha^2} + \frac{e}{\alpha^2} + \frac{e^{-1}}{\alpha^2} = \frac{-(e^2 - 1) + 1 + e^2}{e\,\alpha^2}$$

und schließlich:

$$\int_{-\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}} x\, e^{\alpha x}\, dx = \frac{2}{e\,\alpha^2}.$$

*5. Integration unter dem Integralzeichen.*

Ebenso wie durch die Differentiation können auch durch Integration nach einem Parameter Integrale verallgemeinert oder aus bekannten neue Integrale hergeleitet werden.

Gegeben sei das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, a)\, dx = \varphi(a),$$

dessen Grenzen vom Parameter unabhängig sind.

Multipliciert man beiderseits mit $g(a)\, da$, wobei $g(a)$ eine beliebige Function des Parameters a ist, integriert sodann zwischen den Grenzen $a_1$ und $a_2$, so erhält man:

$$\int_{a_1}^{a_2} \left\{ g(a)\, da \left[ \int_{x_1}^{x_2} f(x, a)\, dx \right] \right\} = \int_{a_1}^{a_2} g(a)\, \varphi(a)\, da, \quad \ldots \quad (\alpha$$

wo links zuerst die Integration innerhalb der eckigen Klammer nach x und dann jene nach a auszuführen ist.

Es kann bewiesen werden, dass die Reihenfolge der Integration gleichgiltig ist, dass also die Ausdrücke

$$\int_{a_1}^{a_2} \left\{ g(a)\, da \left[ \int_{x_1}^{x_2} f(x, a)\, dx \right] \right\} \text{ und } \int_{x_1}^{x} \left\{ dx \left[ \int_{a_1}^{a_2} g(a)\, f(x, a)\, da \right] \right\}, \quad \ldots \quad (\beta$$

in welchen die Integration in der eckigen Klammer zuerst auszuführen ist. einander gleich sind.

Bildet man nämlich die Differentialquotienten der beiden Ausdrücke (β nach $a_2$, so erhält man, weil die Integrale nach ihrer oberen Grenze differenziert werden:

$$g(a_2) \int_{x_1}^{x_2} f(x, a_2)\, dx \text{ und } \int_{x_1}^{x_2} dx\, g(a_2) f(x, a_2),$$

zwei Größen, welche gleich sind, weil $g(a_2)$ beim rechten als von der Integrationsvariablen unabhängig vor das Integralzeichen gesetzt werden kann.

Die beiden Ausdrücke (β haben sonach denselben Differentialquotienten, können sich also nur um eine additionelle Constante unterscheiden.

Dass selbst ein solcher Unterschied nicht bestehen kann, zeigt sich sofort, wenn $a_1 = a_2$ gesetzt wird; dadurch verschwindet von den beiden Ausdrücken (β jener links als Integral von gleichen Integratio

grenzen, jener rechts, weil alle Elemente des Integrals Null werden: die Ausdrücke können sich also um keine Constante voneinander unterscheiden.

Wegen der Gleichheit der beiden Ausdrücke (β kann die Gleichung (α auch in der Form

$$\int_{x_1}^{x_1} dx \left\{ \int_{a_1}^{a_2} g(a) f(x, a)\, da \right\} = \int_{a_1}^{a_2} g(a)\, \varphi(a)\, da$$

geschrieben werden. Führt man beiderseits die Integration nach a aus, so erscheint links ein neues Integral, dessen Wert durch das rechts vom Gleichheitszeichen stehende gegeben ist.

Weil nun g (a) ganz willkürlich ist, so bietet die Integration unter dem Integralzeichen ein Mittel, aus bekannten Integralen verschiedenartigste neue zu combinieren.

**Beispiele:**

1. Multipliciert man das bekannte Integral

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a}$$

mit $da$ [$g(a) = 1$], und integriert zwischen den Grenzen $a_1$ und $a_2$, so erhält man:

$$\int_0^\infty dx \left\{ \int_{a_1}^{a_2} e^{-ax}\, da \right\} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{a} = l \frac{a_2}{a_1}.$$

Nun ist aber

$$\int_{a_1}^{a_2} e^{-ax}\, da = \left[ -\frac{e^{ax}}{x} \right]_{a_1}^{a_2} = \frac{-e^{a_2 x} + e^{a_1 x}}{x}.$$

Demnach hat man als neues Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{a_1 x} - e^{a_2 x}}{x}\, dx = l \frac{a_2}{a_1}.$$

2. Betrachtet man in dem Integral

$$\int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$$

n als willkürlichen Parameter und integriert nach Multiplication mit $dn$ zwischen den Grenzen $n_1$ und $n_2$, so erhält man:

$$\int_0^1 dx \left\{ \int_{n_1}^{n_2} x^n \, dn \right\} = \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{n+1} = l \frac{n_2+1}{n_1+1},$$

und weil

$$\int_{n_1}^{n_2} x^n \, dn = \left[ \frac{x^n}{lx} \right]_{n_1}^{n_2} = \frac{x^{n_2} - x^{n_1}}{lx},$$

schließlich:

$$\int_0^1 \frac{x^{n_2} - x^{n_1}}{lx} dx = l \frac{n_2+1}{n_1+1}.$$

Setzt man nun speciell

$$n_2 = n, \quad n_1 = 0,$$

so folgt:

$$\int_0^1 \frac{x^n - 1}{lx} dx = l(n+1).$$

3. Betrachtet man in dem Integral

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin \beta x \, dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \text{ *)}$$

$\alpha$ als willkürlichen Parameter und integriert nach Multiplication mit $d\alpha$ zwischen a und b, so erhält man

$$\int_0^\infty \sin \beta x \, dx \int_a^b e^{-\alpha x} \, d\alpha = \int_a^b \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} d\alpha.$$

Nun ist aber

$$\int_a^b e^{-\alpha x} \, d\alpha = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$$

---

*) Das unbestimmte Integral

$$\int e^{-\alpha x} \sin \beta x \, dx$$

wird analog gefunden wie das abgeleitete $\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$ (102 und kann von demselben durch Substitution $\alpha = -\alpha$ direct übertragen werden, so dass

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin \beta x \, dx = \left[ \frac{-\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha x} \right]_0^\infty = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

und

$$\int_a^b \frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2}\, d\alpha = \left\{ \text{arc tang } \frac{\alpha}{\beta} \right\}_a^b = \text{arc tang } \frac{b}{\beta} - \text{arc tang } \frac{a}{\beta}.$$

Man findet also schließlich als neues Integral:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin \beta x\, dx = \text{arc tang } \frac{b}{\beta} - \text{arc tang } \frac{a}{\beta}.$$

Setzt man speciell $a = 0$ und $b = \infty$, was gestattet ist, da a und b jeden positiven Wert annehmen können, so erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x} dx = \pm \frac{\pi}{2}$$

($\pm$ je nachdem $\beta \gtrless 0$ ist).

4. Die Methode der Integration unter dem Integralzeichen kann zur Bestimmung des Wertes des bestimmten Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

angewendet werden. Da $e^{-x^2}$ für gleich große positive und negative Werte des x dieselben Werte annimmt, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx,$$

denn die Summe hat im Intervalle $-\infty$ bis 0 dieselben Elemente wie im Intervall 0 bis $\infty$, es ist also nur der Wert des Integrals

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

zu berechnen.

Multipliciert man auf beiden Seiten mit $e^{-\alpha^2}\, d\alpha$ und integriert zwischen den Grenzen 0 und $\infty$, so erhält man:

$$u \int_0^\infty e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(\alpha^2 + x^2)}\, d\alpha,$$

und, weil

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2}\, d\alpha = u,$$

$$u^2 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(\alpha^2 + x^2)}\, d\alpha.$$

Setzt man nun

$$\alpha = x \cdot z, \quad d\alpha = x\, dz,$$

so ist, weil für $\alpha = 0$, $z = 0$ und $\alpha = \infty$, $z = \infty$ wird,

$$u^2 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x^2(1+z^2)}\, x\, dz = \int_0^\infty dz \int_0^\infty e^{-x^2(1+z^2)}\, x\, dx.$$

Das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2(1+z^2)}\, x\, dx$$

geht durch die Substitution

$$-x^2(1+z^2) = t,$$

weil

$$-(1+z^2)\, 2x\, dx = dt,$$

und

$$x\, dx = \frac{dt}{-2(1+z^2)}$$

in

$$\int_0^{-\infty} e^t \frac{dt}{-2(1+z^2)} = \frac{1}{-2(1+z^2)} \int_0^{-\infty} e^t\, dt = \frac{1}{2(1+z^2)}$$

über. Da nun

$$\int_0^\infty e^{-x^2(1+z^2)}\, x\, dx = \frac{1}{2(1+z^2)},$$

ist

$$u^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2} \Big[ \text{arc tang } z \Big]_0^\infty = \frac{1}{2}\, \frac{\pi}{2},$$

und schließlich

$$u = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

d. h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (116$$

## § 21. Erweiterung des Begriffes eines bestimmten Integrals.

Der Begriff des bestimmten Integrals wurde unter zwei denselben wesentlich einschränkenden Voraussetzungen entwickelt, und zwar:

1. dass die Function unter dem Integralzeichen $f(x)$ für alle im Integrationsintervall einschließlich der Grenzen gelegenen Werte des x endlich und stetig ist.

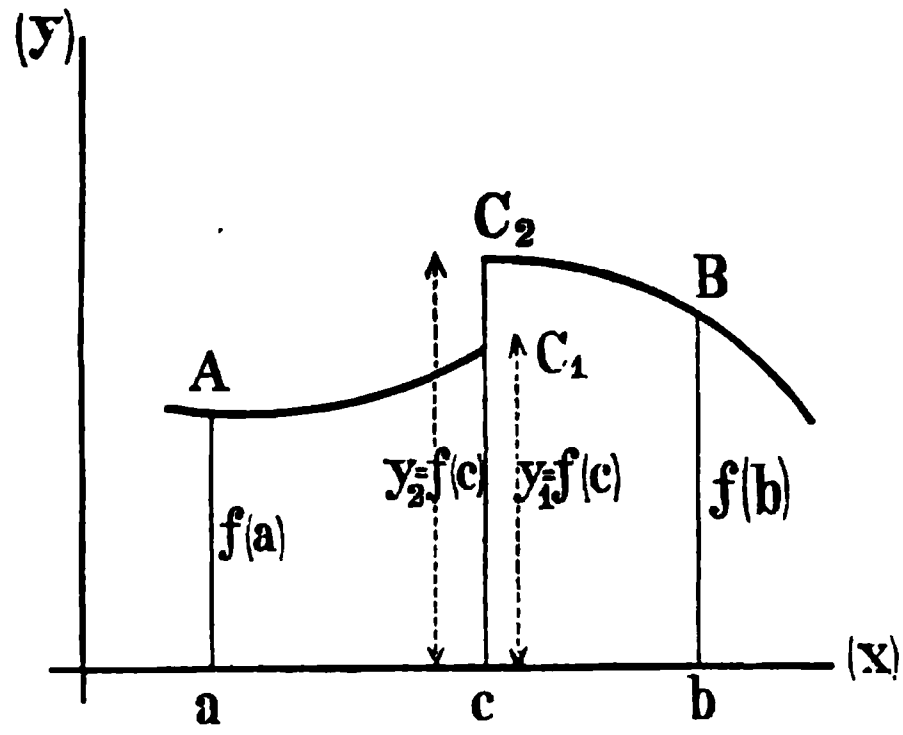
2. dass das Integrationsintervall selbst ein endliches ist.

Es fragt sich also, ob das bestimmte Integral beim Nichtzutreffen einer dieser Bedingungen überhaupt eine Bedeutung hat oder den Sinn ganz verliert.

Dass ein bestimmtes Integral seine Bedeutung behält, wenn die Function im Integrationsintervall eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit um ein endliches Maß erleidet, ist aus der geometrisehen Bedeutung des bestimmten Integrals direct zu ersehen.

Wird nämlich die Function $f(x)$ an der Stelle $x = c$ des Intervalls a bis b in der Art unstetig, dass der Functionswert an dieser Stelle einen Sprung um einen endlichen Betrag macht, d. h. für $x = c$ zwei um eine endliche Größe verschiedene Functionswerte $y_1$ und $y_2$ erhalten werden, so hat die durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellte Curve für die Abscisse $x = c$ zwei verschiedene, endliche Ordinaten, also beispielsweise den in der Fig. 6 angegebenen Verlauf.

Fig. 6.




Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = J$$

ist mit Rücksicht auf die geometrische Bedeutung des bestimmten Integrals die Fläche der ebenen Figur a b B $C_2$ $C_1$ A a.

Diese Fläche ist im vorliegenden Falle eine bestimmte, endliche Größe, das Integral hat somit einen bestimmten Wert.

Das Integral behält auch seine Bedeutung, wenn die Function im Integrationsintervall eine größere aber endliche Anzahl solcher Unstetigkeitsstellen aufweist.

Wird die Function unter dem Integralzeichen für einen dem Integrationsintervall angehörigen Wert von x unendlich, dann ist zur Entscheidung, ob das bestimmte Integral dennoch einen Sinn beibehält, eine besondere Untersuchung erforderlich.

Zunächst soll der Fall ins Auge gefasst werden, in welchem die Function $f(x)$ im Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

an der oberen Grenze unendlich wird, für alle anderen Werte des Integrationsintervalls aber endlich und stetig bleibt.

Zufolge der gemachten Annahme ist

$$f(b) = \infty$$

und das Integral

$$\int_a^\xi f(x)\,dx = J$$

hat einen bestimmten Wert J, wenn

$$\xi < b$$

vorausgesetzt wird.

Convergiert nun der Wert des Integrals J gegen eine bestimmte Grenze, wenn sich $\xi$ dem Werte b unbeschränkt nähert, so nennt man diesen Grenzwert den Wert des bestimmten Integrals:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi = b} \int_a^\xi f(x)\,dx.$$

Kann z. B. das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

angegeben werden, so ist

$$\int_a^\xi f(x)\,dx = F(\xi) - F(a)$$

und mithin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi = b} [F(\xi) - F(a)].$$

Nähert sich $F(\xi)$ einer bestimmten Grenze, wenn $\xi$ gegen b convergiert, so kann diese mit F(b) bezeichnet werden und man erhält:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Der Fall, in welchem die Function unter dem Integralzeichen an der unteren Grenze unendlich wird, ist in dem behandelten enthalten, weil man bei Änderung des Vorzeichens die Integrationsgrenzen einfach vertauschen kann.

Hiedurch ist aber auch der Fall, in welchem die Function $f$ eine Stelle $x = c$ des Integrationsintervalls a bis b durch Unendl werden unstetig wird, bereits erledigt, weil durch Zerlegung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

erhalten wird, demnach nur Integrale, in welchen die Function an einer der Grenzen unendlich wird, zu untersuchen sind.

Diese Betrachtungen führen somit zu folgendem Schluss: »Wird die Function an einer Stelle des Integrationsintervalls unstetig in der Art, dass sie unendlich wird, so kann unter Voraussetzung, dass das unbestimmte Integral bekannt ist, der Wert des bestimmten Integrals nach der Definitionsgleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ermittelt werden, sobald das unbestimmte Integral $F(x)$ sich einem bestimmten Grenzwert nähert, wenn $x$ gegen die Unstetigkeitsstelle convergiert.«

**Beispiele:**

1. Auf das Integral

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

ist, trotzdem für $x = a$ die Function unter dem Integralzeichen unendlich wird, die Definitionsgleichung zur Wertermittlung anwendbar. weil bei Annäherung von $x$ gegen den Wert $a$ das unbestimmte Integral $\arcsin \frac{x}{a}$ gegen die Grenze $\frac{\pi}{2}$ convergiert, es ist sonach

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\arcsin \frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{\pi}{2}.$$

2. Das Integral

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$$

hat nur dann eine Bedeutung, wenn $n < 1$ ist. An der Stelle $x = b$. für welche die Function unter dem Integralzeichen unendlich wird. convergiert der Wert des unbestimmten Integrals

$$\int \frac{dx}{(b-x)^n} = \frac{1}{(n-1)(b-x)^{n-1}} + C$$

gegen Null, wenn $n < 1$ ist, wird hingegen unendlich, wenn $n > 1$ angenommen wird, in welchem Falle das Integral jeden Sinn verliert.

Für $n = 1$ ist das bestimmte Integral auch ohne Interesse, weil das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dx}{b-x} = -l(b-x) + C$$

für $x = b$ unendlich wird.

3. Das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

hat, obgleich $\frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x = 0$ unendlich wird, einen bestimmten endlichen Wert, weil das unbestimmte Integral $2\sqrt{x}$ für $x = 0$ den endlichen Wert Null annimmt.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2.$$

4. Hingegen hat das Integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$$

keine Bedeutung, weil bei Annäherung von x gegen Null nicht nur die Function unter dem Integralzeichen, sondern auch das unbestimmte Integral derselben $-\frac{1}{x}$ unbegrenzt wächst.

Auf dieses Integral ist also die Anwendung der Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

unzulässig und würde zu dem Resultat $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = -2$ führen, welches offenbar unrichtig ist, da doch eine Summe durchaus positiver Elemente (Quadrate) nicht negativ sein kann.

Ist das unbestimmte Integral der Differentialfunction nicht bekannt, so muss in den zuletzt angeführten drei Unstetigkeitsfällen stets vorerst untersucht werden, ob das Integral einen bestimmten Wert hat oder nicht.

# ZWEITER THEIL.

# Anwendungen der Differential- und Integralrechnung.

## I. Abtheilung.

### Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Aufgaben der Algebra.

### 1. Abschnitt.

### Die Reihen.

#### § 22. Begriff einer Reihe und ihrer Convergenz.

1. Unter einer Reihe versteht man eine unbegrenzte Folge von Zahlengrößen

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4, \ldots$$

welche nach einem bestimmten Gesetze aus einander entstehen.

Diese Zahlengrößen $u_i$ werden Glieder der Reihe genannt.

Gewöhnlich betrachtet man die Summe

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

der unendlich vielen Glieder $u_i$ und belegt die Summe schlechtweg mit dem Namen Reihe.

In einer solchen Reihe pflegt man die Summe der ersten n Glieder mit $S_n$, die Summe der übrigen auf das $n^{te}$ folgenden Glieder mit $R_n$ zu bezeichnen, welch letztere das Restglied der Reihe genannt wird.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n,$$

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$$

2. Ist die Summe einer Reihe

$$S = S_n + R_n$$

eine endliche Zahl, so nennt man die Reihe convergent, ist sie hingegen unendlich groß oder gar unbestimmt, so wird die Reihe als divergent bezeichnet und verliert dadurch jedes Interesse.

Reihen, deren Summe abwechselnd verschiedene Werte hat, werden oscillierende Reihen genannt. In diese Gruppe gehört beispielsweise die Reihe

$$a - a + a - a + a - a + a - \ldots$$

Ihre Summe ist unbestimmt, und zwar entweder a oder 0.

Sind die Glieder einer Reihe complexe Zahlen von der Form $p + q\,i$, so nennt man die Reihe imaginär.

Es ist an sich klar, dass nur convergente Reihen eine Bedeutung haben, weshalb in der Folge nur solche untersucht werden sollen.

## § 23. Convergenz der Reihen.

Soll eine Reihe eine endliche Summe haben, so muss sie von einer bestimmten Stelle angefangen fallend sein, d. h. es müssen ihre Glieder von einer Stelle angefangen continuierlich abnehmen, denn jede Summe unendlich vieler numerisch wachsender Glieder wird unendlich groß.

Daraus folgt, dass eine Reihe nur dann convergent sein kann, wenn sie fallend ist.

Bei einer Reihe von durchwegs positiven Gliedern ist das Abnehmen derselben gegen eine von Null verschiedene endliche Größe für die Convergenz nicht hinreichend, weil die Glieder einer derartigen Reihe stets endliche von Null verschiedene Größen bleiben, deren Summe, als Summe unendlich vieler endlicher Größen unendlich groß wird.

Eine Reihe von durchaus positiven Gliedern kann nur dann convergieren, wenn ihre Glieder von einer Stelle angefangen continuierlich gegen Null abnehmen.

Setzt man beispielsweise in der Formel

$$u_n = \frac{2}{2 - \frac{1}{n}}$$

nach und nach für n die Zahlen 1, 2, 3, 4, . . . etc., so erhält man die Reihe

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{6}{5}, \quad \frac{8}{7}, \quad \frac{10}{9}, \quad \frac{12}{11} \cdots$$

welche zwar fallend ist, deren Glieder aber nicht kleiner wie die Einheit werden, so dass von einer endlichen Summe dieser Reihe keine Rede sein kann.

Diese Reihe ist fallend und doch nicht convergent.

Übrigens ist das Abnehmen der Glieder einer Reihe gegen Null. für die Convergenz derselben nicht unbedingt hinreichend, weshalb diese Eigenschaft in jedem einzelnen Falle durch besondere Untersuchungen erwiesen werden muss.

Es gibt viele Kennzeichen und Sätze für die Convergenz der Reihen; die wichtigsten derselben sollen in dem Folgenden angeführt und bewiesen werden.

1. Jede fallende Reihe mit regelmäßigem Zeichenwechsel der Glieder ist convergent.

Die Summe einer solchen Reihe

$$S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \ldots$$

kann nämlich in folgenden zwei Formen dargestellt werden:

$$S = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \ldots,$$

$$S = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - (u_6 - u_7) - \ldots;$$

da laut Annahme $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 >$ etc., also die Klammerausdrücke wesentlich positive Größen sind, sieht man, dass

$$S > u_1 - u_2 \text{ und } S < u_1.$$

Die Summe S der Reihe hat einen zwischen den beiden endlichen Größen $u_1 - u_2$ und $u_1$ gelegenen Wert, ist somit endlich, mithin die Reihe convergent.

Hiebei sei insbesondere bemerkt, dass bei einer Reihe mit regelmäßigem Zeichenwechsel, das Abnehmen ihrer Glieder gegen Null, für ihre Convergenz nicht erforderlich ist, vielmehr ist bei einer derartigen Reihe das Abnehmen der Glieder gegen eine beliebige endliche Größe für die Convergenz vollständig hinreichend.

So ist z. B. die Reihe

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \ldots,$$

deren Glieder gegen die Einheit abnehmen convergent. Ihre Summe hat einen Wert, welcher zwischen $u_1 - u_2 = \frac{2}{1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ und $u_1 = 2$ liegt.

2. Kann für n Glieder der Reihe eine Summenformel aufgestellt, d. h. $S_n$ als Function von n dargestellt werden, so ist die Reihe convergent, wenn der Grenzwert dieser Summe $S_n$ bei unendlich wachsendem n eine endliche Größe ist.

Also ist

$$\lim_{n=\infty} S_n = \text{endliche Größe}$$

eine Convergenzbedingung.

Dieser Satz bedarf keines besonderen Beweises, weil derselbe im Begriffe der Convergenz einer Reihe liegt.

**Beispiele:**

Ist n eine ganze positive Zahl, so besteht die Gleichung:

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{n-1}.$$

Es besteht somit für die Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots + x^n + x^{n+1} + \ldots \quad (117$$

die Summenformel

$$S_n = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Diese Reihe, bekanntlich die geometrische Reihe genannt, kann nur convergieren, wenn $1 > x > -1$ (x ein echter Bruch) ist, weil sie nur dann fallend ist.

Ist nun x ein echter Bruch, so ist $\lim_{n=\infty} x^n = 0$, demnach

$$S = \lim_{n=\infty} S_n = \frac{1}{1 - x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (117a$$

Die Summe S hat einen endlichen Wert, die Reihe ist somit convergent für alle Werte von x, welche zwischen $-1$ und $+1$ liegen.

Die Reihe

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots \quad (118$$

(harmonische Reihe genannt) divergiert, obwohl ihre Glieder continuierlich gegen Null abnehmen.

Die Glieder dieser Reihe haben nämlich die Form:

$$\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{1-\varepsilon} x^{n-1}\,dx.$$

Setzt man nach und nach $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ so erhält man:

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots =$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \left[ \int_0^{1-\varepsilon} dx + \int_0^{1-\varepsilon} x\,dx + \int x^2\,dx + \int_0^{1-\varepsilon} x^3\,dx + \ldots \right]$$

oder

$$S = \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{1-\varepsilon} \left[ 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \right] dx.$$

Da in diesem Integral x ein positiver echter Bruch ist, kann statt der convergenten geometrischen Reihe unter dem Integralzeichen die Summenformel gesetzt werden, so dass sich

$$S = \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x}$$

oder

$$S = \lim_{\varepsilon=0} \left[ -l(1-x) \right]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon=0} (-l\varepsilon) = \infty$$

ergibt.

Die harmonische Reihe convergiert nicht, weil ihre Summe unendlich ist.

Da die Summenformel nur in seltenen Fällen aufgestellt werden kann, müssen andere Mittel gesucht werden, um die Convergenz einer Reihe zu erkennen.

3. Sind die Glieder einer Reihe von einer bestimmten Stelle angefangen kleiner als die Glieder einer convergenten Reihe, so ist die vorgelegte Reihe auch convergent.

Der Satz ist selbstverständlich, bedarf also keines Beweises.

Wäre beispielsweise die Reihe

$$S = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

zu untersuchen, so könnte man sie mit der Reihe

$$S' = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \ldots$$

vergleichen. Die letztere ist vom zweiten Gliede angefangen eine geometrische Reihe $\left(x = \frac{1}{2}\right)$, also convergent und hat die Summe

$$S' = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Die Glieder der vorgelegten Reihe S sind vom vierten angefangen kleiner als die correspondierenden Glieder der Reihe S', weil sie größere Nenner haben.

Demnach ist die Summe der gegebenen Reihe S kleiner als S', also kleiner als 3.

(Bekanntlich $S = e = 2{\cdot}718281828 \ldots$)

Durch Combination bekannter Reihen kann man neue Reihen construieren und diese dann als Vergleichsreihen anwenden.

So geben beispielsweise die Reihen

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$$

$$\frac{x^2}{1-x} = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots$$

. . . . . .

. . . . . .

welche von der zweiten an durch Multiplication der ersten mit $x$, $x^2$, $x^3$, ... entstehen, als Summe:

$$\frac{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots}{1 - x} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots$$

also schließlich, weil links im Zähler eine geometrische Reihe steht, deren Summe $\frac{1}{1-x}$ ist:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots\ldots \quad (119$$

4. Hat das Restglied $R_n$ einer Reihe den Grenzwert Null für ein unendlich werdendes n, so ist die Reihe convergent.

Ist nämlich die Reihe convergent, so nähert sich die Summe $S_n$ der ersten n Glieder bei unendlich wachsendem n einer bestimmten endlichen Grenze S:

$$S = \lim_{n=\infty} S_n,$$

es muss also die Differenz

$$S - S_n = R_n$$

für hinreichend großes n beliebig klein werden, was durch

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0$$

ausgedrückt wird.

Ist umgekehrt

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

so sind die Reste

$$\begin{aligned}
R_n &= u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = S - S_n,\\
R_{n+1} &= u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots = S - S_{n+1},\\
R_{n+2} &= u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4} + \ldots = S - S_{n+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
R_{n+i} &= u_{n+i} + u_{n+i+1} + u_{n+i+2} + \ldots = S - S_{n+i}
\end{aligned}$$

für hinreichend große n sämmtlich beliebig klein, mithin sind es auch alle Differenzen

$$R_n - R_{n+i} = S_{n+i} - S_n.$$

Ist also $\lim R_n = 0$, so wird die Differenz

$$S_{n+i} - S_n$$

für hinreichend große n beliebig klein, wie groß auch i werden mag. d. h. $S_n$ nähert sich mit wachsendem n einer bestimmten endlichen Grenze, die Reihe ist also convergent.

Um ein Beispiel einer derartigen Restgliedуntersuchung zu geben, soll die Convergenz der Reihe

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

welche als convergierend erkannt wurde, nochmals nachgewiesen werden.

Das Restglied dieser Reihe ist:

$$R_{n+2} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots$$

Nun ist offenbar

$$R_{n+2} < \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{n^2} + \cdots$$

weil die Nenner der Brüche vom zweiten angefangen alle kleiner sind wie jene der Reihe. Demnach ist

$$R_{n+2} < \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \cdots\right],$$

also

$$R_{n+2} < \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n}}$$

für sehr große n wird $R_{n+2}$ offenbar sehr klein und für $n = \infty$ wird $R = 0$, die Reihe ist also convergent.

Die Restglieduntersuchungen sind manchmal sehr schwierig, weshalb noch andere Kennzeichen der Convergenz aufgesucht werden müssen.

5. Ist der Grenzwert von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für $n = \infty$ kleiner als die Einheit, so ist die Reihe convergent.

Dieses Kriterium für die Convergenz einer Reihe wurde von Cauchy gegeben.

Ist nämlich

$$\left|\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1,$$

so muss schon von einem im endlichen Bereiche gelegenen Gliede, z. B. dem $k^{ten}$ angefangen, das Verhältnis $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ kleiner sein wie die Einheit, also gleich sein einem echten Bruche.

Es wird sich deshalb ein echter Bruch $\alpha$ so groß annehmen lassen, dass

$\frac{u_{k+1}}{u_k} < \alpha$ oder $u_{k+1} < \alpha\, u_k$

$\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} < \alpha$ d. h. $u_{k+2} < \alpha\, u_{k+1}$, also umsomehr $u_{k+2} < \alpha^2 u_k$,

$\frac{u_{k+3}}{u_{k+2}} < \alpha$ » $u_{k+3} < \alpha\, u_{k+2}$, » » $u_{k+3} < \alpha^3 u_k$,

u. s. w.

Durch Summierung erhält man:

$$u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \ldots < u_k(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots)$$

Da nun $\alpha$ ein echter Bruch ist, so hat die rechts befindliche Größe einen endlichen Wert, es ist also die linksstehende Summe $R_{k+1}$ endlich, ferner ist die Summe der ersten k Glieder $S_k$ an sich endlich, mithin ist es auch die Summe der Reihe

$$S = S_k + R_k.$$

Die Reihe ist sonach convergent.

Ist $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, dann sind zur Entscheidung, ob die Reihe convergiert, besondere Untersuchungen erforderlich. Ist hingegen $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, so ist die Reihe unbedingt divergent.

**Beispiele:**

Für welche Werte von x convergiert die Reihe

$$\frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \ldots + \frac{x^n}{n^p} + \ldots$$

Hier ist

$$u_n = \frac{x^n}{n^p}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^p},$$

demnach

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p x = \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p};$$

also

$$\lim_{n+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p} = x.$$

Die Reihe convergiert für jeden Wert von x, welcher numerisch kleiner als die Einheit, also wenn x ein echter Bruch ist.

Dies schließt aber die Convergenz der Reihe für $x = \pm 1$ keinesfalls aus und es kann durch entsprechende Untersuchung gezeigt werden, dass sie für $x = \pm 1$ auch convergiert, wenn $p > 1$ ist.

Für welche Werte von x convergiert die Reihe von Newton (Binomialreihe):

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1} + \ldots \quad (120$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$u_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1},$$

also

$$u_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n,$$

mithin

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-n+1}{n}x = \left[\frac{m+1}{n} - 1\right]x,$$

somit

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty}\left[\frac{m+1}{n} - 1\right]x = -x.$$

Der Grenzwert von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ist kleiner als die Einheit, wenn x ein echter Bruch ist.

Die Reihe convergiert für jeden Wert von x, welcher ein echter Bruch ist.

Man kann aber auch die Convergenz der Reihe für $x = +1$ und $x = -1$ nachweisen. Für $x > +1$ und $x < -1$ ist die Reihe divergent.

Für $x = +1$ ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{n-(m+1)}{n}.$$

Da n eine unbegrenzt wachsende Größe, also unbedingt größer als $m + 1$ ist, kann der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ nur negativ sein. Der negative Quotient aber zeigt an, dass die unmittelbar aufeinander folgenden Glieder der Reihe $u_n$ und $u_{n+1}$ entgegengesetzt bezeichnet sind, d. h. dass die Reihe von einer bestimmten Stelle angefangen regelmäßigen Zeichenwechsel aufweist.

Wenn es nun gelingt, zu zeigen, dass die Reihe fallend ist, so ist auch die Convergenz derselben erwiesen.

Soll die Reihe fallend sein, so muss $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ein echter Bruch werden, d. h.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1.$$

Nun ist

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 - \frac{m+1}{n}.$$

Aus der Annahme

$$1 - \frac{m+1}{n} < 1$$

folgt

$$-\frac{m+1}{n} < 0;$$

$$-(m+1) < 0;$$

$$m + 1 > 0,$$

oder

$$m > -1$$

als Bedingung für das Fallen der Reihe, somit auch als Bedingung für ihre Convergenz.

Die Reihe von Newton convergiert also auch für $x = +1$, wenn $m > -1$ ist.

Die Convergenzbedingung dieser Reihe für $x = -1$ kann durch Anwendung des folgenden, leicht nachweisbaren Satzes gefunden werden.

6. Eine Reihe mit durchaus positiven Gliedern ist convergent, wenn der Grenzwert des Ausdruckes $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ für ein unendlich wachsendes n größer ist wie die Einheit. d. h. wenn:

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > 1.$$

Trifft nämlich diese Voraussetzung zu, so muss schon für einen im endlichen Bereiche gelegenen Wert von n die Ungleichheit

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > 1$$

bestehen, aus welcher nachstehende abgeleitet werden können:

$$-n\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 - n;$$

$$-\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1}{n} - 1;$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 - \frac{1}{n}.$$

Geht man nun auf die Grenze für $n = \infty$ über, so erhält man:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

was bereits als Kennzeichen für die Convergenz einer Reihe erkannt wurde.

Wendet man diesen Satz auf die Reihe von Newton, in welcher $x = -1$ gesetzt wurde, an, so findet man, weil

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = +1 - \frac{m+1}{n},$$

$$\lim_{n=\infty} n\left[1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right] = \lim_{n=\infty} n\left[1 - 1 + \frac{m+1}{n}\right] = m + 1.$$

Soll nun, was für die Convergenz der Reihe erforderlich ist, dieser Grenzwert größer werden wie $+1$, so muss

$$m + 1 > 1,$$

mithin

$$m > 0$$

sein.

Die Reihe von Newton convergiert also auch für $x = -1$, wenn m eine wesentlich positive Größe ist.

## § 24. Reihe von Taylor.

Transformiert man das bestimmte Integral

$$\int_x^{x+h} f'(u)\,du$$

durch die Substitutionsgleichung

$$u = x + h - z,$$

in welcher z als die Variable angesehen wird, so erhält man, weil

$$du = -dz$$

und

$$z = x + h - u,$$

also für

$$u = x; \quad z = h,$$

ferner für

$$u = x + h; \quad z = 0,$$

$$\int_x^{x+h} f'(u)\,du = -\int_h^0 f'(x+h-z)\,dz = \int_0^h f'(x+h-z)\,dz.$$

Es besteht somit die Gleichung:

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^h f'(x+h-z)\,dz.$$

Wendet man nun auf das Integral

$$\int f'(x+h-z)\,dz$$

die Methode der theilweisen Integration an, indem man setzt:

$$u = f'(x+h-z), \quad \text{also} \quad du = -f''_z(x+h-z)\,dz,^*)$$
$$dv = dz, \quad \text{also} \quad v = z,$$

so findet man:

$$\int f'(x+h-z)\,dz = z f'(x+h-z) + \int z f''(x+h-z)\,dz.$$

Setzt man in dem rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Integral

$$u = f''(x+h-z) \quad \text{und} \quad dv = z\,dz,$$

so erhält man durch theilweise Integration:

$$\int z f''(x+h-z)\,dz = \frac{z^2}{1.2} f''(x+h-z) + \frac{1}{1.2}\int z^2 f'''(x+h-z)\,dz,$$

und analog:

$$\frac{1}{1.2}\int z^2 f'''(x+h-z)\,dz = \frac{z^3}{1.2.3} f'''(x+h-z) +$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\int z^3 f^{IV}(x+h-z)\,dz$$

. . . . . .

$$\frac{1}{(n-2)!}\int z^{n-2} f_z^{(n-1)}(x+h-z)\,dz =$$
$$= \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x+h-z) + \frac{1}{(n-1)!}\int z^{n-1} f^{(n)}(x+h-z)\,dz.$$

*) Der Index z zeigt an, dass die Differentiation nur nach der Integrationsvariablen z auszuführen ist, was selbstverständlich ist, weshalb dieser Index in der Folge weggelassen wird.

Demzufolge ist

$$\int f'(x+h-z)\,dz = z f'(x+h-z) + \frac{z^2}{2!} f''(x+h-z) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x+h-z) + \frac{1}{(n-1)!}\int z^{n-1} f^{(n)}(x+h-z)\,dz,$$

also:

$$\int_0^h f'(x+h-z)\,dz = h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h z^{n-1} f^{(n)}(x+h-z)\,dz.$$

Durch Einführung des Wertes für das links vom Gleichheitszeichen stehende Integral erhält man:

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h z^{n-1} f^{(n)}(x+h-z)\,dz,$$

also schließlich

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h z^{n-1} f^{(n)}(x+h-z)\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121$$

Diese Formel, welche die Reihe von Taylor genannt wird, gestattet die Entwicklung von $f(x+h)$ in eine Potenzreihe nach steigenden Potenzen des h.

Sie gilt nur dann, wenn alle Differentialquotienten der Function bis zum $n^{ten}$ im ganzen Intervall x bis $x+h$ endlich und stetig sind, und nur für jene Werte von h, für welche sie convergiert.

Die Taylor'sche Reihe kann auf eine andere Form gebracht werden, indem in derselben zunächst $x = a$ und dann $h = x - a$ gesetzt wird.

Man erhält dann:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \ldots \quad (121a$$

Diese Umformung hat zur Voraussetzung, dass sowohl die Function $f(x)$ als auch ihre Differentialquotienten an der Stelle $x = a$ endlich und stetig sind.

Für die Reihe von Taylor ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{h}{n} \frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n-1)}(x)},$$

somit convergiert diese Reihe für alle Werte von h, welche der Bedingung genügen:

$$\left| h \lim \frac{1}{n} \frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n-1)}(x)} \right| < 1.$$

Die Summe aller Glieder einer Reihe, welche auf das $n^{te}$ folgen. nennt man das Restglied der Reihe.

Die Summe aller dieser Glieder der Taylor'schen Reihe wird durch das bestimmte Integral

$$\int_0^h \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x + h - z)\, dz$$

repräsentiert, somit ist dieses das Restglied R der Reihe; für die Anwendung kann es durch entsprechende Transformation in eine brauchbarere Form gebracht werden.

Die Transformation nach Lagrange erfolgt durch die Substitution

$$t = h - z, \quad \text{also} \quad z = h - t, \quad dz = -dt,$$

wodurch dasselbe in

$$R = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h (h-t)^{n-1} f^{(n)}(x+t)\, dt$$

übergeht. Bestimmt man nun den Wert des Integrals näherungsweise durch Anwendung des Mittelwertsatzes

$$\int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = \varphi(\xi) \int_a^b \psi(x)\, dx; \quad \xi = a + \varepsilon(b-a),$$

indem man $f^{(n)}(x+t)$ als $\varphi(x)$, und $(h-t)^{n-1}$ als $\psi(x)$ anzusehen hat, so erhält man:

$$\int_0^h (h-t)^{n-1} f^{(n)}(x+t)\, dt = f^{(n)}(x + \varepsilon h) \int_0^h (h-t)^{n-1}\, dt =$$

$$= \frac{h^n}{n} f^{(n)}(x + \varepsilon h),$$

also schließlich nach Einführung des Wertes für das bestimmte Integral

$$R = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \varepsilon h) \quad |\varepsilon| < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122$$

als Restglied in der Form nach Lagrange.

Um zu der 2ten üblichen Form des Restgliedes (nach Cauchy) zu gelangen, ist dieselbe Substitution anzuwenden. Bei der Ermittlung des Integralwertes durch Anwendung des Mittelwertsatzes ist aber $(h - t)^{n-1} f^{(n)}(x + t)$ als $\varphi(x)$ und 1 als $\psi(x)$ anzusehen.

Dementsprechend ist:

$$\int_0^h (h - t)^{n-1} f^{(n)}(x + t)\, dt = (h - \varepsilon h)^{n-1} f^{(n)}(x + \varepsilon h) \int_0^h dt;$$

$$= h(h - \varepsilon h)^{n-1} f^{(n)}(x + \varepsilon h);$$

$$= h^n (1 - \varepsilon)^{n-1} f^{(n)}(x + \varepsilon h),$$

also schließlich:

$$R = \frac{h^n (1 - \varepsilon)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x + \varepsilon h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123$$

das Restglied in der Form nach Cauchy.

Die Reihenentwicklung hat, wie schon einmal bemerkt, nur dann einen Sinn, wenn die Reihe convergiert, also wenn

$$\lim_{n=\infty} R = 0$$

ist.

Hat nun $f^{(n)}(x + \varepsilon h)$ für $n = \infty$ einen endlichen Wert, dann ist $\lim_{n=\infty} R$ sicher Null, weil

$$\lim_{n=\infty} \frac{h^n}{n!} = 0.$$

Denn man findet

$$\frac{h^n}{n!} = \frac{h}{1} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdots \frac{h}{k} \cdot \frac{h}{k+1} \cdots \frac{h}{n},$$

also dass $\frac{h^n}{n!}$ ein Product von Brüchen ist, deren Zähler alle gleich h, d. h. gleich einer endlichen Größe sind, während die Nenner unbegrenzt zunehmen. Von einem Factor $\frac{h}{k}$ angefangen wird der Nenner größer geworden sein als der Zähler, so dass unendlich viele echte Brüche miteinander multipliciert erscheinen, deren Product demnach Null ist.

## § 25. Reihe von Maclaurin.

Setzt man in der Reihe von Taylor $x = 0$ und schreibt, wie allgemein gebräuchlich, x für h, so erhält man die Reihe von Maclaurin,

welche dadurch eine besondere Bedeutung hat, dass sie ein Mittel zur Entwicklung der Functionen in Potenzreihen repräsentiert.

Sie lautet:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R. \quad (124$$

Die beiden Formen des Restgliedes ergeben sich aus jenen der Taylor'schen Reihe als

$$R=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\varepsilon x) \qquad \text{(Form nach Lagrange).}$$

$$R=x^n\frac{(1-\varepsilon)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\varepsilon x) \qquad \text{(Form nach Cauchy).}$$

Die Reihe hat nur dann einen Sinn, wenn $\lim_{n=\infty} R=0$, also wenn

$$f^{(n)}(\varepsilon x)$$

für ein unendlich werdendes n einen endlichen Wert hat und die Differentialquotienten von $f(x)$ im ganzen Intervall von 0 bis x endlich und stetig sind.

Ist $\lim_{n=\infty} R=0$ dann ist $f(x)$ die Summe der Reihe von Maclaurin.

## § 26. Reihe von Taylor für Functionen zweier unabhängigen Variablen.

Hat man

$$f(x+h,\quad y+k)$$

in eine Reihe nach Taylor zu entwickeln, so betrachtet man zunächst $y+k$ als willkürlichen Parameter und entwickelt die Function von $x+h$ nach steigenden Potenzen von h. Auf diese Weise erhält man:

$$f(x+h,y+k)=f(x,y+k)+h\frac{\partial f(x,y+k)}{\partial x}+$$

$$+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x,y+k)}{\partial x^2}+\ldots$$

Betrachtet man in dieser Reihe x als constanten Parameter, so kann man ihre Glieder als Functionen von $y+k$ nach Taylor in Potenzreihen nach steigenden Potenzen von k entwickeln und erhält:

$$f(x,y+k)=f(x,y)+k\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}+\frac{k^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}+\ldots$$

$$\frac{\partial f(x, y+k)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + k \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y^2} + \cdots$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y+k)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + k \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \cdots$$

Setzt man nun diese Werte für die entsprechenden Glieder der zuerst entwickelten Reihe, so hat man die Gleichung:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + k \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[ h^2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + 2 h k \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right] +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left[ h^3 \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2} + 3 h^2 k \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y} + 3 h k^2 \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y^2} + k^3 \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3} \right] + \cdots$$

oder, wenn die symbolische Bezeichnung wie bei Bildung höherer Differentiale angewendet wird,

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + k \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[ h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(x, y) + \frac{1}{3!} \left[ h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 f(x, y) + \ldots + R, \quad (125$$

wobei, wie leicht gezeigt werden kann,

$$R = \frac{1}{n!} \left[ h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x + \varepsilon h, y + \varepsilon k).$$

Diese Gleichung gibt eine Entwicklung der Function zweier Variablen

$$f(x+h, y+k)$$

in eine Reihe nach steigenden Potenzen von h und k.

In analoger Weise kann auch die Reihe von Taylor für Functionen mehrerer unabhängigen Variablen hergeleitet werden.

## § 27. Entwicklung der Functionen in Reihen.

*1. Durch Anwendung der Reihe von Maclaurin.*

*a)* die Exponentialreihe.

Es soll

$$f(x) = e^x$$

in eine Reihe entwickelt werden.

Man hat:

$$f\ (x) = e^x, \quad \text{also} \quad f\ (0) = e^0 = 1,$$
$$f'\ (x) = e^x, \quad \text{»} \quad f'\ (0) = e^0 = 1,$$
$$f''(x) = e^x, \quad \text{»} \quad f''(0) = e^0 = 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n-1)}(x) = e^x, \quad \text{also} \quad f^{(n-1)}(0) = e^0 = 1,$$
$$f^{(n)}\ (\varepsilon x) = e^{\varepsilon x},$$

demnach zufolge Maclaurins Formel:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^{n-1}}{n!} + R,$$
$$R = e^{\varepsilon x} \frac{x^n}{n!}.$$

Die Reihe convergiert für jeden endlichen Wert von x, da $f^{(n)}(\varepsilon x) = e^{\varepsilon x}$ für jeden endlichen Wert von x endlich bleibt ($\varepsilon$ echter Bruch), also $\lim_{n=\infty} R = 0$ wird. Die Summe dieser Reihe ist $e^x$.

Setzt man $x = 1$, so findet man:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \quad \cdots \quad (126$$

*b*) Die Sinusreihe.

$$f(x) = \sin x$$

ist in eine Reihe zu entwickeln.

Man hat:

$$f\ (x) = \sin x, \quad \text{also} \quad f\ (0) = \sin(0) = 0,$$
$$f'\ (x) = \cos x, \quad \text{»} \quad f'\ (0) = \cos(0) = 1,$$
$$f''\ (x) = -\sin x, \quad \text{»} \quad f''\ (0) = -\sin(0) = 0,$$
$$f'''(x) = -\cos x, \quad \text{»} \quad f'''(0) = -\cos(0) = -1,$$
$$f^{IV}(x) = \sin x, \quad \text{»} \quad f^{IV}(0) = \sin(0) = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(\varepsilon x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \varepsilon x\right),$$

mithin nach Maclaurin

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + R, \quad \cdots \quad (127$$
$$R = \frac{x^n}{n!} \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \varepsilon x\right).$$

Diese Reihe convergiert auch für jeden endlichen Wert von x, weil für jeden endlichen Wert des x, $f^{(n)}(\varepsilon x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \varepsilon x\right)$ als Sinus endlich bleibt, demnach $\lim_{n=\infty} R = 0$ wird.

In analoger Weise erhält man:

*c*) die Cosinusreihe.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad (128$$

sie convergiert ebenso wie die frühere für alle endlichen Werte von x.

*d*) die Binomialreihe (Reihe von Newton).

Es ist

$$(1 + x)^m$$

in eine Reihe zu entwickeln.

Man hat:

$f(x) = (1 + x)^m$ also $f(0) = 1^m = 1$

$f'(x) = m(1 + x)^{m-1}$ » $f'(0) = 1^{m-1} m = m$

$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$ » $f''(0) = m(m-1)1^{m-2} = m(m-1)$

$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}$, also $f'''(0) = m(m-1)(m-2)$

. . . . . .

$f^{(n)}(\varepsilon x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)[1+\varepsilon x]^{m-n}$,

demnach nach Maclaurins Reihe:

$$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \ldots + R \quad (129$$

$$R = \binom{m}{n} (1 + \varepsilon x)^{m-n}.$$

Dass diese Reihe für jeden Wert von x, welcher ein echter Bruch ist, dann für $x = +1$, wenn $m > -\frac{1}{2}$ und für $x = -1$, wenn $m > 0$ ist, convergiert, wurde bereits gezeigt.

Anmerkung: Die Entwicklung nach der Reihe von Maclaurin ist bei allen Functionen möglich, welche endliche und stetige Differentialquotienten haben.

2. *Durch Integration der in eine Reihe entwickelten Differentialfunction.*

*a*) die logarithmische Reihe.

Die Entwicklung der Function $l(x)$ in eine Reihe stößt auf Schwierigkeiten, weil die Differentialquotienten $\frac{1}{x}, -\frac{1}{x^2}, \ldots$ für $x = 0$ unendlich groß werden.

Man hilft sich, indem man

$$l(1+x)$$

in eine Reihe entwickelt, was sowohl nach Maclaurins Formel als auch auf folgende in diesem Falle bequemere Art geschehen kann.

Die Differentialfunction von $l(1+x)$ ist $\frac{dx}{1+x}$ und kann nach der Binomialreihe in eine Reihe entwickelt werden. Es ist

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

also

$$\frac{dx}{1+x} = [1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots]\,dx,$$

mithin

$$l(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x [1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots]\,dx,$$

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Diese Reihe convergiert für alle Werte des x, welche echte Brüche sind, und für $x = +1$ deshalb, weil sie fallend ist und regelmäßigen Zeichenwechsel aufweist. Für $x = -1$ ist sie aber divergent, weil sie zur negativ genommenen harmonischen Reihe wird.

Setzt man $-x$ statt x in der Reihe für $l(1+x)$ und multipliciert beiderseits des Gleichheitszeichens mit $-1$, so erhält man:

$$-l(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

und wenn man die Reihen für $l(1+x)$ und $-l(1-x)$ addiert:

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right].$$

Die letzte Reihe eignet sich zur Berechnung der natürlichen Logarithmen.

Setzt man nämlich darin

$$x = \frac{1}{2z-1},$$

wobei wegen der Convergenz $z > 1$ sein muss, damit $x < 1$ sei, so entsteht, weil

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{2z-1}}{1-\frac{1}{2z-1}} = \frac{2z}{2z-2} = \frac{z}{z-1},$$

die Reihe:

$$l\frac{z}{z-1} = 2\left[\frac{1}{2z-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2z-1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2z-1)^5} + \ldots\right]$$

oder

$$lz = l(z-1) + 2\left[\frac{1}{2z-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2z-1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2z-1)^5} + \ldots\right]. \quad (130$$

Für $z = 2, 3, 4, \ldots$ erhält man nun

$$l2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\frac{1}{3^7} + \ldots\right],$$

$$l3 = l2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{5^5} + \frac{1}{7}\frac{1}{5^7} + \ldots\right],$$

$$l4 = 2 \,.\, l2,$$

$$l5 = l4 + 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\frac{1}{9^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{9^5} + \frac{1}{7}\frac{1}{9^7} + \ldots\right]$$

u. s. w.

**Anmerkung:** Um aus den natürlichen Logarithmen die Brigg'schen Logarithmen zu berechnen, geht man von der Definitionsgleichung des Brigg'schen Logarithmus aus.

$$10^{\log x} = x.$$

Nimmt man beiderseits den natürlichen Logarithmus, so erhält man

$$\log x \,.\, l\,10 = l\,x,$$

woraus

$$\log x = \frac{l\,x}{l\,10}$$

folgt.

Die natürlichen Logarithmen sind, um aus denselben Brigg'sche zu erhalten, mit dem Factor

$$\frac{1}{l\,10}\,(\text{Modul}) = 0{\cdot}43429448$$

zu multiplicieren.

*b)* Arcustangentenreihe (Kreisreihe).

Um die Reihe für arc tang x zu erhalten, entwickelt man den Differentialquotienten dieser Function

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$

nach der Binomialreihe

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots;$$

multipliciert sodann mit d x und erhält durch Integration:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } x = \int_0^x [1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots]\, dx,$$

also

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad (131$$

Diese Reihe convergiert für $|x| \leqq 1$, denn sie ist für $|x| < 1$ und $x = +1$ fallend und hat regelmäßigen Zeichenwechsel; für $x = -1$ geht sie über in $-\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots\right)$, ist also divergent, weil $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots$, also auch $> \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right)$, welch letztere Reihe nicht convergiert.

Da die Reihe für $x = +1$ convergiert, kann man mit derselben durch Substitution $x = 1$ die Zahl $\pi$ berechnen, weil arc tang $1 = \frac{\pi}{4}$.

Es ist:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \cdot$$

Diese Reihe heißt die Reihe von Leibniz.

Aus derselben folgt:

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \ldots$$

also

$$\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \ldots\right)$$

und

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) - \ldots;$$

also

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 2\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{143} + \ldots\right).$$

Auf diese Art lassen sich, wenn nur eine beschränkte Zahl von Gliedern der Reihen genommen wird, zwei Zahlen finden, zwischen denen $\frac{\pi}{4}$ liegt.

Die Rechnung von $\frac{\pi}{4}$ aus diesen Reihen würde sich aber sehr langwierig gestalten, wenn man den Wert nur auf sechs Stellen genau haben wollte, weshalb man bemüht gewesen ist, Reihen für $\pi$ zu construieren, deren Glieder rascher abnehmen.

Setzt man z. B.

$$\text{tang u} = \frac{1}{2} \text{ oder } \text{u} = \text{arc tang}\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\text{tang v} = \frac{1}{3} \text{ » } \text{v} = \text{arc tang}\left(\frac{1}{3}\right),$$

dann wird

$$\text{tang}(\text{u} + \text{v}) = \frac{\text{tang u} + \text{tang v}}{1 - \text{tang u tang v}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{5}{5} = 1$$

oder

$$\text{u} + \text{v} = \text{arc tang } 1 = \frac{\pi}{4},$$

d. h.

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tang}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{arc tang}\left(\frac{1}{3}\right),$$

und wenn man beide Arcustangenten in Reihen entwickelt,

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - + \ldots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^5} - + \ldots\right)$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} - \frac{1}{3^5}\right) - \ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{5}{6} - \frac{35}{648} + \frac{257}{38880} - .$$

Diese Reihe heißt die Reihe von Euler, sie convergiert bedeutend rascher wie jene von Leibniz, ist somit zur Berechnung von $\pi$ besser geeignet.

Noch rascher convergiert die Reihe

$$\frac{\pi}{4} = \frac{17}{21} - \frac{713}{27783} + \frac{33857}{20420505} - \cdots,$$

welche durch die Benützung der Gleichung

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{7}$$

erhalten wird.

Die Richtigkeit der letzten Gleichung ist leicht einzusehen.

Setzt man nämlich:

$$\operatorname{tang} u = \frac{1}{3} \quad \text{oder} \quad u = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{tang} v = \frac{1}{7} \quad \text{»} \quad v = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2},$$

dann ist

$$\operatorname{tang}(2u + v) = \frac{\operatorname{tang} 2u + \operatorname{tang} v}{1 - \operatorname{tang} 2u + \operatorname{tang} v} = \frac{\dfrac{2 \operatorname{tang} u}{1 - \operatorname{tang}^2 u} + \operatorname{tang} v}{1 - \dfrac{2 \operatorname{tang} u}{1 - \operatorname{tang}^2 u} \operatorname{tang} v} =$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{2}{3}}{1 - \dfrac{1}{9}} + \dfrac{1}{7}}{1 - \dfrac{\dfrac{2}{3}}{1 - \dfrac{1}{9}} \cdot \dfrac{1}{7}} = \frac{25}{25} = 1,$$

also

$$2u + v = \operatorname{arc\,tang} 1,$$

d. h.

$$2 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}.$$

Auf sechs Decimalstellen genau ist:

$$\frac{\pi}{4} = 0{\cdot}7853981632,$$

$$\pi = 3{\cdot}14159265.$$

Wenn in der für $\frac{\pi}{4}$ zuletzt aufgestellten Reihe die ersten drei Glieder allein berücksichtigt werden, so erhält man schon $\frac{\pi}{4}$ auf drei und $\pi$ auf zwei Decimalstellen genau.

*c*) Arcussinusreihe.

In derselben Art erhält man, weil

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

und $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ nach der Binomialreihe entwickelt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots$$

$$\arcsin x = \int_0^x \left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots\right] dx,$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots \quad (132$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n-2)}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

also

$$u_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-3)(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n-2)\,2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

demnach

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty}\frac{(2n-1)^2}{(2n+1)\,2n}x^2 = \lim_{n=\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2}{1+\frac{1}{2n}}x^2 = x^2.$$

Die Reihe convergiert für alle Werte von x, welche numerisch kleiner sind wie die Einheit, also wenn x ein echter Bruch.

Sie convergiert aber auch für $x = \pm 1$, denn es ist für $x = +1$

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n\left[1 - \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\right] = n\left[1 - \frac{4n^2-4n+1}{4n^2+2n}\right] =$$

$$= n\left[1 - \frac{4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{2}{n}}\right] = n\,\frac{\frac{6}{n} - \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{2}{n}} = \frac{6 - \frac{1}{n}}{4 + \frac{2}{n}},$$

also

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \frac{6}{4} > 1.$$

Für $x = -1$ werden alle Glieder der Reihe negativ, sonst ist sie mit jener für $x = +1$ identisch, also auch convergent.

Bedenkt man, dass

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

also

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right),$$

so erhält man eine Reihe zur Berechnung von $\pi$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{7.2^7} + \ldots,$$

welche aber nicht so rasch convergiert wie die zuletzt angegebene.

Aus

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

folgt:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7} + \ldots\right).$$

## § 28. Summieren der Reihen mittelst Differentiation und Integration.

Ist $S_1$ die Summe der Reihe

$$S_1 = u_1' + u_2' + u_3' + \ldots; \quad u_1' = f_1'(x),$$

deren Glieder die Differentialquotienten der Glieder einer anderen Reihe

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots; \quad u_1 = f_1(x)$$

ist, so ist die Summe der letzteren Reihe gegeben durch die Gleichung

$$S = \int S_1 \, dx,$$

in welcher die Integrationsconstante entsprechend zu bestimmen ist.

Diese keines besonderen Beweises erfordernde Thatsache kann häufig als Mittel zur Bildung der Summe einer Reihe benützt werden, was an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

*a*) Es ist die Reihe

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

welche, wie bereits bekannt, für jeden endlichen Wert von x convergiert, zu summieren.

Durch Differentiation erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

und findet demnach, dass

$$\frac{dy}{dx} = y$$

oder

$$\frac{dy}{y} = dx,$$

somit

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx,$$

also

$$ly = x + lC$$

(willkürliche Integrationsconstante als Logarithmus geschrieben)

$$l\frac{y}{C} = x,$$

$$y = C\,e^x.$$

Nun zeigt aber ein Blick auf die gegebene Reihe, dass für $x = 0$, $y = 1$ werden muss. Um dieser Bedingung zu genügen, muss $C = 1$ werden.

Man hat also schließlich:

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = e^x,$$

$e^x$ ist die Summe der Reihe.

*b*) Es sind die Reihen

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots ,$$

$$z = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots ,$$

deren Convergenz für jeden endlichen Wert von x nachgewiesen wurde, zu summieren.

Durch Differentiation erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\frac{dz}{dx} = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots ,$$

d. h.

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = -y,$$

oder, wenn man in den letzten zwei Gleichungen mit y und z multipliciert,

$$y\frac{dy}{dx} = yz \quad z\frac{dz}{dx} = -yz,$$

demnach

$$y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx} = 0,$$

oder

$$y\,dy + z\,dz = 0,$$

$$\int y\,dy + \int z\,dz = 0,$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = \frac{C}{2},$$

$$y^2 + z^2 = C.$$

Die Constante C kann bestimmt werden, wenn die Werte für y und z gesetzt werden, welche $x = 0$ entsprechen. Diese sind $y = 0$ und $z = 1$, demnach muss $C = 1$ sein.

Es ist somit

$$z^2 + y^2 = 1,$$

also

$$z = \sqrt{1 - y^2}.$$

Nun ist aber

$$z = \frac{dy}{dx},$$

demnach

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int dx,$$

mithin

$$\arcsin y = x - C,$$

$$x = \arcsin y + C.$$

Setzt man in die erste Reihe $x = 0$, so findet man, dass $y$ mit $x$ gleichzeitig verschwindet, dass also

$$0 = \arcsin 0 + C,$$

also $C = 0$ sein muss.

Aus

$$x = \arcsin y$$

folgt

$$y = \sin x$$ als Summe der ersten Reihe.

und aus

$$z = \sqrt{1 - y^2},$$

$$z = \cos x$$ als Summe der zweiten Reihe.

Es ist demnach

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sin x$$

$$z = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \cos x$$

*c*) Es ist die Summe der Reihe

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$$

zu bilden.

Bevor die Aufgabe gelöst wird, muss zunächst untersucht werden, ob die Reihe convergiert. Es ist

$$u_n = \frac{x^{n-1}}{n-1}; \quad u_{n+1} = \frac{x^n}{n},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-1}{n} x,$$

also

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x = x.$$

Die Reihe convergiert für jeden Wert von x, welcher ein echter Bruch ist.

Für $x = +1$ convergiert die Reihe nicht, weil sie zur harmonischen Reihe wird, für $x = -1$ ist sie als fallende Reihe mit regelmäßigem Zeichenwechsel convergent.

Sind die Convergenz-Bedingungen erfüllt, so hat die Reihe eine endliche Summe und diese ist darzustellen.

Bildet man den Differentialquotienten der Reihe, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots,$$

das ist aber die geometrische Progression, deren Summe

$$\frac{1}{1-x}$$

bekannt ist.

Man hat sonach

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x},$$

$$dy = \frac{dx}{1-x},$$

also

$$y = \int \frac{dx}{1-x} = -l(1-x) + C$$

als Summe der Reihe.

Um die Constante zu bestimmen, hat man nur zu berücksichtigen, dass, mit Rücksicht auf die gegebene Reihe, ihre Summe $y = 1$ für $x = 0$, also $C = 1$ werden muss.

Die Summe dieser Reihe ist somit

$$y = 1 - l(1-x) = l\frac{e}{1-x}.$$

*d*) Die Reihe

$$y = x - \frac{1\,x^2}{2} + \frac{2\,x^3}{3} - \frac{3\,x^4}{4} + \ldots,$$

welche für jeden zwischen $-1$ und $+1$ liegenden Wert von x convergiert, ist zu summieren. Durch Differentiation erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + \ldots,$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - x(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots).$$

Setzt man

$$z = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots,$$

also

$$z\,dx = (1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots)\,dx,$$

so ergibt sich

$$\int_0^x z\,dx = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots,$$

und man hat, weil rechts vom Gleichheitszeichen eine geometrische Progression steht, deren Summe $\frac{x}{1+x}$ bekannt ist,

$$\int_0^x z\,dx = \frac{x}{1+x},$$

demnach

$$z = \frac{d\int_0^x z\,dx}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

und

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x}{1+x^2},$$

$$dy = \left[1 - \frac{x}{1+x^2}\right]dx$$

oder integriert

$$y = x - \int \frac{x}{(1+x)^2}\,dx + C.$$

$$y = x - l(1+x) - \frac{1}{1+x} + C^*).$$

---

*) $\int \frac{x}{(1+x)^2}\,dx = \int \frac{1+x-1}{(1+x)^2}\,dx = \int \frac{dx}{1+x} - \int \frac{dx}{(1+x)^2} = \int \frac{dx}{1+x} - \int \frac{d(1+x)}{(1+x)^2}$

Für $x = 0$ muss aber $y = 0$ werden, d. h. es muss auch $C = 0$ sein, man hat sonach als Summe der Reihe

$$y = 1 + x - \frac{1}{1+x} - l(1+x).$$

$$y = \frac{2x + x^2}{1+x} - l(1+x).$$

## § 29. Integration durch Reihen.

In vielen Fällen, in denen die bisher angeführten Integrationsmethoden zur Integration einer Differentialfunction $f(x)\,dx$ nicht ausreichen, das Integral derselben also in geschlossener Form nicht angegeben werden kann, ist es zweckmäßig, dasselbe in Form einer Reihe darzustellen.

Diese Darstellung ist immer möglich, wenn die Function $f(x)$ unter dem Integralzeichen in eine Potenzreihe nach Maclaurin entwickelt werden kann.

Man erhält dann

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots,$$

also

$$\int f(x)\,dx = \int \left[ f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots \right] dx.$$

Nun ist aber das Integral einer Summe gleich der Summe der Integrale der einzelnen Glieder.*)

Es ist demnach

$$\int f(x)\,dx = \int f(0)\,dx + \int \frac{x}{1!} f'(0)\,dx + \int \frac{x^2}{2!} f''(0)\,dx + \int \frac{x^3}{3!} f'''(0)\,dx + \ldots,$$

d. h.

$$\int f(x)\,dx = C + \frac{x}{1!} f(0) + \frac{x^2}{2!} f'(0) + \frac{x^3}{3!} f''(0) + \frac{x^4}{4!} f'''(0) + \ldots$$

---

*) Der Satz gilt allerdings zunächst nur für die Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern und ist nicht mehr unbedingt richtig, wenn es sich um Summen unendlich vieler Glieder handelt. Er behält aber im gegebenen Falle seine Richtigkeit, wofür der Beweis in jedem umfangreicheren Werke zu finden ist.

Selbstverständlich bestehen diese Gleichungen nur bei solchen Werten von x, für welche die Reihen convergieren.

In vielen Fällen, in denen die Function unter dem Integralzeichen $f(x)$ als Product zweier Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ dargestellt werden kann, wird mit Vortheil nur einer der Factoren in eine Potenzreihe entwickelt.

**Beispiele:**

Das Integral der Differentialfunction $e^{-x^2}\,dx$ ist in geschlossener Form nicht darstellbar, kann aber durch eine Potenzreihe ausgedrückt werden.

*a*) Zufolge der Exponentialreihe ist nämlich:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots,$$

also

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int dx - \int \frac{x^2}{1!}\,dx + \int \frac{x^4}{2!}\,dx - \int \frac{x^6}{3!}\,dx + \ldots,$$

oder

$$\int e^{-x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} + \frac{1}{5!}\frac{x^9}{9} - \ldots$$

Dass die Reihe für jeden endlichen Wert von x convergiert, kann leicht nachgewiesen werden.

Denn es ist

$$u_n = \frac{1}{(n-1)!}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

demnach

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n}\frac{2n-1}{2n+1}x^2 = \frac{1}{n}\cdot\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}x^2$$

und

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}x^2,$$

also Null für jeden endlichen Wert von x.

*b*) Um das in geschlossener Form nicht darstellbare Integral

$$\int \frac{e^x \, dx}{x}$$

durch eine Reihe auszudrücken, entwickelt man nur den Factor $e^x$ der Differentialfunction in eine Reihe (Exponentialreihe) und erhält:

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

oder

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots,$$

demnach

$$\int \frac{e^x \, dx}{x} = \int \left[\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots\right] dx,$$

d. h.

$$\int \frac{e^x \, dx}{x} = C + lx + x + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Die Reihe convergiert für alle endlichen Werte von x mit Ausschluss von $x = 0$, denn es ist:

$$u_n = \frac{1}{n}\,\frac{x^n}{n!}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

also

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{n}{(n+1)^2}\,x = \lim_{n=\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}\,x$$

gleich Null für jeden endlichen Wert von x.

Für $x = 0$ wird aber das vor der Potenzreihe stehende Glied $lx$ negativ unendlich, die Reihe ist divergent.

*c*) Um das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}};$$

in welchem $\varepsilon$ einen echten Bruch bedeutet, und welches für keinen Wert der oberen Grenze in geschlossener Form darstellbar ist, durch eine Reihe auszudrücken, entwickelt man $\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} = (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$ nach der Binomialreihe. Da $\varepsilon^2 \sin^2 \varphi$ immer ein echter Bruch, ist dies möglich und man erhält:

$$(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \sin^4 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^6 \sin^6 \varphi + \ldots,$$

somit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \sin^4 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^6 \sin^6 \varphi + \ldots \right] d\varphi$$

oder

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \, d\varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi \, d\varphi + \ldots$$

Nun ist aber (siehe § 20, Formel 113)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \frac{\pi}{2},$$

mithin

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \varepsilon^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \varepsilon^6 + \ldots \right].$$

Dieses Integral, welches bereits als das vollständige elliptische Integral erster Gattung bekannt ist, erscheint somit durch eine Reihe ausgedrückt, welche umso rascher convergiert, je kleiner $\varepsilon$ ist. Sein Wert kann, wenn eine entsprechende Zahl der Glieder der Reihe berücksichtigt wird, mit beliebiger Genauigkeit gerechnet werden.

## 2. Abschnitt.

## Bestimmung der Werte von Ausdrücken, welche für besondere Werte der Variablen eine der unbestimmten Formen $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, $\infty - \infty$, $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$ annehmen.

Bei Ausdrücken von der Form

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

kann es vorkommen, dass für einen Wert $x = a$ Zähler und Nenner gleichzeitig Null oder Unendlich werden, wodurch solche Ausdrücke eine der unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ annehmen.

Diese Ausdrücke können aber dennoch für $x = a$ ganz bestimmte Werte haben, welche im Folgenden ermittelt werden sollen.

Ein bereits bekanntes Beispiel bietet hiefür der Bruch

$$\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2},$$

welcher für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt.

Da aber

$$\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{(x - a)(x + a)},$$

so kann der Bruch durch $x - a$ gekürzt werden, wodurch die Unbestimmtheit beseitigt wird.

Es ist

$$\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = \frac{x^2 + ax + a^2}{x + a},$$

also für $x = a$ der Wert des Bruches gleich $\frac{3}{2}a$.

Um die Methode zu zeigen, nach welcher in complicierteren Fällen, der Wert eines Ausdruckes von unbestimmter Form ermittelt werden kann, sollen die verschiedenen Formen nacheinander besprochen werden.

## § 30. Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$.

Werden in dem Bruche

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

für $x = a$ Zähler und Nenner gleichzeitig Null, d. h. wird $\varphi(a) = 0$ und $\psi(a) = 0$, so betrachtet man zunächst den Bruch

$$\frac{\varphi(x+h)}{\psi(x+h)},$$

welcher durch Entwicklung des Zählers und des Nenners nach Taylor auf die Form gebracht werden kann:

$$\frac{\varphi(x+h)}{\psi(x+h)} = \frac{\varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x) + \dots}{\psi(x) + h\psi'(x) + \frac{h^2}{2!}\psi''(x) + \dots}.$$

Setzt man nun $x = a$, so ergibt sich, weil $\varphi(a) = 0$ und $\psi(a) = 0$ ist,

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{h\varphi'(a) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(a) + \dots}{h\psi'(a) + \frac{h^2}{2!}\psi''(a) + \dots} = \frac{\varphi'(a) + \frac{h}{2!}\varphi''(a) + \frac{h^2}{3!}\varphi'''(a) + \dots}{\psi'(a) + \frac{h^2}{2!}\psi''(a) + \frac{h^2}{3!}\psi'''(a) + \dots},$$

woraus durch Übergang auf den Grenzwert für $h = 0$

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

folgt.

Man erhält also den wahren Wert der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ für $x = a$, wenn man die Functionen im Zähler und im Nenner durch ihre Differentialquotienten ersetzt und dann $x = a$ substituiert.

Sollte $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ für $x = a$ ebenfalls die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, so führt dasselbe Verfahren zum Werte dieses Bruches; man erhält dann

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$$

u. s. w.

**Beispiele:**

1. Der Wert des Ausdruckes

$$\frac{a^x - b^x}{x};$$

welcher für $x = 0$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt, ist zu ermitteln.

Durch Anwendung der Regel erhält man:

$$\left[\frac{a^x - b^x}{x}\right]_{x=0} = \left[\frac{a^x \, l\, a - b^x \, l\, a}{1}\right]_{x=0}.$$

Demnach ist

$$\left[\frac{a^x - b^x}{x}\right]_{x=0} = \frac{l\, a - l\, b}{1} = l\frac{a}{b}.$$

2. Es soll der Wert des Ausdruckes

$$\frac{x - \sin x}{x^3}$$

für $x = 0$ ermittelt werden, in welchem Falle er in der unbestimmten Form $\frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}$ erscheint.

Ersetzt man nach der Regel die Functionen im Zähler und im Nenner durch ihre Differentialquotienten, so erhält man:

$$\left[\frac{x - \sin x}{x^3}\right]_{x=0} = \left[\frac{1 - \cos x}{3x^2}\right]_{x=0}.$$

Nun ist aber

$$\left[\frac{1 - \cos x}{3x^2}\right]_{x=0} = \frac{0}{0}$$

wieder unbestimmt, und es muss zur Ermittlung des Wertes dieses Bruches neuerdings die Regel angewendet werden.

Man erhält dadurch:

$$\left[\frac{1 - \cos x}{3x^2}\right]_{x=0} = \left[\frac{\sin x}{6x}\right]_{x=0},$$

also nochmals die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$.

Schließlich findet man in gleicher Weise

$$\left[\frac{\sin x}{6x}\right]_{x=0} = \left[\frac{\cos x}{6}\right]_{x=0} = \frac{1}{6},$$

es ist somit

$$\left[\frac{x - \sin x}{x^3}\right]_{x=0} = \frac{1}{6}.$$

## § 31. Ausdrücke von der Form $\frac{\infty}{\infty}$.

Der Fall. in welchem ein Bruch

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, weil $\varphi(a) = \infty$ und $\psi(a) = \infty$ wird, kann durch die Identität

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

auf den Fall $\frac{0}{0}$ zurückgeführt werden, denn für $x = a$ wird $\frac{1}{\psi(a)} = \frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{\varphi(a)} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Zur Ermittlung des wahren Wertes w des Bruches

$$\frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

für $x = a$ kann aber, weil derselbe die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, die in § 30 angeführte Regel angewendet werden, es ist somit:

$$w = \left\{\begin{matrix} \frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2} \\ \frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2} \end{matrix}\right\}_{x=a} = \left\{\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]^2 \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right\}_{x=a} = \left[\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\right]^2 \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Nun ist aber $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ der zu suchende wahre Wert w, es besteht also die Gleichung

$$w = w^2 \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)},$$

aus welcher

$$w = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

folgt.

Der wahre Wert der unbestimmten Form $\frac{\infty}{\infty}$ wird sonach durch dasselbe Verfahren ermittelt wie jener der Form $\frac{0}{0}$.

**Beispiele:**

1. Es ist der Wert des Ausdruckes

$$\frac{\mathrm{l}\,x}{x^n}; \qquad n>0,$$

für $x=\infty$ zu ermitteln, in welchem Falle er die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt.

Durch Anwendung der Regel erhält man:

$$\left[\frac{\mathrm{l}\,x}{x^n}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{n\,x^{n-1}}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{1}{n\,x^n}\right]_{x=\infty}=\frac{1}{\infty}=0.$$

2. Der Ausdruck

$$\frac{\mathrm{l}\,x}{a+n\,\mathrm{l}\sin x}$$

nimmt für $x=0$ die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ an, es ist der wahre Wert desselben zu ermitteln.

Man erhält nach der Regel

$$\left[\frac{\mathrm{l}\,x}{a+n\,\mathrm{l}\sin x}\right]_{x=0}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{\frac{n}{\sin x}\cos x}\right]_{x=0}=\frac{1}{n}\left[\frac{\tang x}{x}\right]_{x=0}.$$

Nun ist aber $\frac{\tang x}{x}$ für $x=0$ auch unbestimmt in der Form $\frac{0}{0}$, demnach ist eine Wiederholung des Verfahrens nöthig.

Man hat dann:

$$\frac{1}{n}\left[\frac{\tang x}{x}\right]_{x=0}=\frac{1}{n}\left[\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1}\right]_{x=0}=\frac{1}{n};$$

demnach:

$$\left[\frac{\mathrm{l}\,x}{a+n\,\mathrm{l}\sin x}\right]_{x=0}=\frac{1}{n}.$$

## § 32. Ausdrücke von der Form $0.\infty$.

Nimmt ein Ausdruck

$$\varphi(x)\,\psi(x)$$

für $x = a$ die unbestimmte Form $0 . \infty$ an, indem $\varphi(a) = 0$ und $\psi(a) = \infty$ wird, so kann die Bestimmung des wahren Wertes dieses Ausdruckes, auf einen der beiden vorhergehenden Fälle zurückgeführt werden.

Es bestehen nämlich die Identitäten:

$$\varphi(x)\,\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}},$$

$$\varphi(x)\,\psi(x) = \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}},$$

von welchen die erste für $x = a$ auf die Form $\frac{0}{0}$, die zweite auf die Form $\frac{\infty}{\infty}$ führt.

**Beispiele:**

1. Es ist der Wert des Ausdruckes

$$x \operatorname{cotg} x$$

für $x = 0$ zu bestimmen. Derselbe nimmt für $x = 0$ die Form $0 . \infty$ an.

Nun ist aber

$$x \operatorname{cotg} x = \frac{x}{\operatorname{tang} x}$$

und $\frac{x}{\operatorname{tang} x}$ hat für $x = 0$ die Form $\frac{0}{0}$, demnach besteht die Gleichung (nach Regel § 30):

$$\left[\frac{x}{\operatorname{tang} x}\right]_{x=0} = \left[\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}\right]_{x=0} = 1,$$

also auch

$$[x \operatorname{cotg} x]_{x=0} = 1.$$

2. Es ist der Wert des Ausdruckes

$$(a - x) \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2 a}$$

für $x = a$ zu ermitteln:

$$\left[(a - x) \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2 a}\right]_{x=a} = 0 . \infty.$$

Man findet

$$\left[(a - x) \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2 a}\right]_{x=a} = \left[\frac{a - x}{\operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2 a}}\right]_{x=a};$$

$$\left[\begin{matrix} a-x \\ \cotg \frac{\pi x}{2a} \end{matrix}\right]_{x=a} = \frac{0}{0} = \left[\frac{\frac{-1}{-1}}{\frac{\pi}{2a}}\right]_{x=a} = \frac{2a}{\pi}.$$

Demnach ist

$$\left[(a-x)\tang\frac{\pi x}{2a}\right]_{x=a} = \frac{2a}{\pi}.$$

3. Auf dieselbe Art findet man

$$\left[x\,lx\right]_{x=0} = 0$$

und bei Berücksichtigung dieses Wertes durch Logarithmieren u. s. w.

$$\left[x^n e^{\frac{1}{x^2}}\right]_{x=0} = \infty.$$

## § 33. Ausdrücke von der Form $\infty - \infty$.

Wird in dem Ausdrucke

$$\varphi(x) - \psi(x)$$

$\varphi(a) = \infty$ und $\psi(a) = \infty$, so nimmt derselbe für $x = a$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$ an.

Die Bestimmung des wahren Wertes dieses Ausdruckes kann auf den ersten Fall zurückgeführt werden:

$$\varphi(x) - \psi(x) = -\frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{\psi(x)}} = \frac{\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)\,\psi(x)}}.$$

Der letzte Bruch nimmt für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ an, so dass sein Wert nach der angegebenen Regel ermittelt werden kann.

**Beispiele:**

1. Der Ausdruck

$$\frac{1}{l(1+x)} - \frac{1}{x}$$

hat für $x = 0$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$.

Da

$$\frac{1}{l(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - l(1+x)}{x\,l(1+x)}$$

und der Bruch für $x = 0$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, kann sein Wert nach der Regel
mmt werden.

Es ist

$$\left[\frac{x-l(1+x)}{x.l(1+x)}\right]_{x=0}=\left[\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\frac{x}{1+x}+l(1+x)}\right]_{x=0}=$$

$$=\left[\frac{x}{x+(1+x)l(1+x)}\right]_{x=0}$$

und weil sich wieder $\frac{0}{0}$ ergibt,

$$\left[\frac{x}{x+(1+x).l(1+x)}\right]_{x=0}=\left[\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}(1+x)+l(1+x)}\right]_{x=0}=\frac{1}{2};$$

demnach ist

$$\left[\frac{1}{l(1+x)}-\frac{1}{x}\right]_{x=0}=\frac{1}{2}.$$

2. Es ist der Wert des Ausdruckes

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$$

für $x=0$ zu bestimmen. Derselbe hat für $x=0$ die unbestimmte Form $\infty-\infty$.

Nun ist aber

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\frac{x+\sin x}{\sin^2 x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^2}=$$

$$=\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}+\frac{x}{\sin x}\right)\frac{x-\sin x}{x^3},$$

Da für $x=0$, $\frac{x}{\sin x}=1$, also auch $\frac{x^2}{\sin^2 x}=1$ [siehe Einleitung (3], so ist

$$\left[\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right]_{x=0}=2\left[\frac{x-\sin x}{x^3}\right]_{x=0}$$

und weil $\frac{x-\sin x}{x^3}$ für $x=0$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, nach der Regel

$$\left[\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right]_{x=0}=2\left[\frac{1-\cos x}{3x^2}\right]_{x=0}=2\left[\frac{\sin x}{6x}\right]_{x=0}=$$

$$=2\left[\frac{\cos x}{6}\right]_{x=0}=\frac{1}{3}.$$

## § 34. Die unbestimmten Formen $1^\infty$, $0^0$, $\infty^0$.

Auch diese unbestimmten Formen können durch entsprechende Umformung auf die beiden ersten zurückgeführt werden, was an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

1. Der Ausdruck

$$(\cos \alpha x)^{\frac{1}{x^2}}$$

hat für $x = 0$ die unbestimmte Form $1^\infty$.

Es ist aber

$$\cos \alpha x = e^{l \cos \alpha x},$$

mithin

$$(\cos \alpha x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{l \cos \alpha x}{x^2}};$$

man hat also nur, um den Wert des gegebenen Ausdruckes anzugeben. den Wert von

$$\frac{l \cos \alpha x}{x^2}$$

für $x = 0$ zu suchen. Dieser Bruch hat für $x = 0$ die Form $\frac{0}{0}$, es ist daher die Regel anwendbar und gibt

$$\left[\frac{l \cos (\alpha x)}{x^2}\right]_{x=0} = \frac{\alpha}{2}\left[\frac{-\operatorname{tang} \alpha x}{x}\right]_{x=0} = \frac{0}{0},$$

$$\frac{\alpha}{2}\left[\frac{-\operatorname{tang} \alpha x}{x}\right]_{x=0} = \frac{\alpha}{2}\left[\frac{-\alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha x}}{1}\right]_{x=0} = -\frac{\alpha^2}{2}.$$

Mithin ist

$$\left[(\cos \alpha x)^{\frac{1}{x^2}}\right]_{x=0} = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}.$$

2. Der Ausdruck

$$(\sin x)^x$$

hat für $x = 0$ die unbestimmte Form $0^0$.

Da aber

$$(\sin x)^x = e^{x \, l \sin x},$$

so ist nur der Wert von $x \, l \sin x$, oder, was dasselbe ist, der Wert von $\frac{l \sin x}{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$ zu suchen.

Dieser Bruch nimmt die Form $\frac{\infty}{\infty}$ an, es ist also nach der Regel:

$$\left[\frac{l \sin x}{\frac{1}{x}}\right]_{x=0} = \left[\frac{\frac{1}{\sin x} \cos x}{-\frac{1}{x^2}}\right]_{x=0} = \left[\frac{-x^2}{\operatorname{tang} x}\right]_{x=0},$$

und weil sich jetzt wieder der unbestimmte Wert $\frac{0}{0}$ ergibt,

$$\left[\frac{-x^2}{\operatorname{tang} x}\right]_{x=0} = \left[\frac{-2x}{\frac{1}{\cos^2 x}}\right]_{x=0} = 0.$$

Man hat somit:

$$[(\sin x)^x]_{x=0} = e^0 = 1.$$

3. Der Ausdruck

$$\left(\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2a}\right)^{a-x}$$

hat für $x = a$ die unbestimmte Form $\infty^0$.

Es ist aber

$$\left(\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2a}\right)^{a-x} = e^{(a-x)\,l\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2a}},$$

somit nur der Wert des Ausdruckes

$$(a-x)\,l\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2a} -$$

für $x = a$ zu suchen.

Derselbe hat die Form $0 . \infty$, die Wertermittlung derselben wurde im § 32 gezeigt und wird hier nicht weiter ausgeführt. Man findet

$$\left[(a-x)\,l\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2a}\right]_{x=a} = 0,$$

demnach ist

$$\left[\left(\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2a}\right)^{a-x}\right]_{x=0} = e^0 = 1.$$

## 3. Abschnitt.

## Über complexe Größen.

### § 35. Allgemeines über complexe Größen und das Rechnen mit denselben.

Häufig führt schon die Auflösung einer quadratischen Gleichung auf imaginäre Wurzeln von der Form $a \pm \sqrt{-1} . b$.

Man nennt eine Größe von der Form.

$$a \pm b\sqrt{-1} \quad \text{oder} \quad a \pm b\,i,$$

in welcher a und b real vorausgesetzt werden, eine complexe Größe.

a heißt der reale Theil, b der Factor des imaginären Theiles derselben.

Ist der reale Theil einer complexen Größe Null, so nennt man sie rein imaginär.

Beim Rechnen mit complexen Größen sind dieselben Regeln wie für das Rechnen mit realen Größen anzuwenden. Die Berechtigung hiezu sei als erwiesen vorausgesetzt. Durch Anwendung dieser Regeln werden stets wieder Größen von der Form $A + B\,i$ erhalten, was an folgenden Beispielen gezeigt werden soll.

Durch Anwendung der Regeln für das Addieren, Subtrahieren und Multiplicieren auf die complexen Größen erhält man:

$$(a_1 + b_1\,i) + (a_2 + b_2\,i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i, \quad \text{also Form } A + B\,i:$$
$$(a_1 + b_1\,i) + (a_2 - b_2\,i) = (a_1 + a_2) + (b_1 - b_2)\,i, \quad \text{» » »}$$
$$(a_1 + b_1\,i)(a_2 + b_2\,i) = a_1\,a_2 + b_1\,a_2\,i + a_1\,b_2\,i + b_1\,b_2\,i^2 \quad (i^2 = -1):$$
$$= a_1\,a_2 - b_1\,b_2 + (b_1\,a_2 + a_1\,b_2)\,i, \text{ also Form } A + B\,i.$$

Zwei complexe Größen, deren reale Theile gleich, während die Factoren ihrer imaginären Theile entgegengesetzt gleich sind, also beispielsweise die Größen

$$a + b\,i \quad \text{und} \quad a - b\,i$$

werden conjugierte complexe Größen genannt.

Sie sind insbesondere dadurch ausgezeichnet, dass ihre Summe

$$(a + b\,i) + (a - b\,i) = 2\,a$$

real und ihre Differenz

$$(a + b\,i) - (a - b\,i) = 2\,b\,i$$

rein imaginär ist. Ferner ist das Product zweier conjugiert complexer Größen

$$(a + b\,i)(a - b\,i) = a^2 + b^2$$

real und positiv.

Dieses Product heißt nach Gauß die Norm der complexen Größe, und ist es sowohl für $a + b\,i$ als auch für $a - b\,i$.

Die positive Quadratwurzel aus der Norm

$$+\sqrt{a^2+b^2}$$

wird der absolute Betrag der complexen Größe genannt, er ist für beide Größen des conjugierten Paares derselbe

$$|a+bi| = |a-bi| = +\sqrt{a^2+b^2}.$$

Soll der Quotient zweier complexer Größen

$$\frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}$$

gebildet werden, so multipliciert man Zähler und Nenner mit der dem Nenner conjugierten Größe und erhält:

$$\frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{a_1 a_2+b_1 b_2+(a_2 b_1-a_1 b_2)i}{a_2^2+b_2^2} = \frac{a_1 a_2+b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2 b_1-a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2} i,$$

also wieder eine Größe von der Form $A+Bi$.

Da eine imaginäre Größe die Quadratwurzel aus einer wesentlich negativen Zahl ist, kann eine reale von 0 verschiedene Größe niemals einer rein imaginären Größe gleich sein. Ist also

$$a+bi=0,$$

so müssen a und b einzeln verschwinden.

Daraus folgt: Sind zwei complexe Größen einander gleich, so müssen die realen Theile und ebenso auch die Factoren der imaginären Theile einander gleich sein.

Denn aus

$$a_1+b_1 i = a_2+b_2 i$$

folgt:

$$(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i=0,$$

was nur möglich ist, wenn

$$a_1-a_2=0 \quad \text{und} \quad b_1-b_2=0 \quad \text{oder} \quad a_1=a_2, \quad b_1=b_2.$$

Für gewisse Untersuchungen und einzelne Operationen mit complexen Größen ist es zweckmäßig, dieselben auf eine andere, vortheilhaftere Form zu bringen.

Setzt man nämlich:

$$+\sqrt{a^2+b^2}=r,$$

so kann, weil r größer als a und als b ist, ein zwischen 0 und $2\pi$ gelegener Winkel $\varphi$ derart bestimmt werden, dass

$$\frac{a}{r} = \cos\varphi \qquad \frac{b}{r} = \sin\varphi.$$

Man nennt diesen Winkel $\varphi$ das Argument der complexen Größe $a \pm bi$.

Führt man das Argument in die complexe Größe ein, so erhält man:

$$a \pm bi = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi).$$

Die Form

$$r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi),$$

auf welche jede complexe Größe gebracht werden kann, eignet sich besonders für das Multiplicieren und Dividieren complexer Größen.

So ist das Product der complexen Größen

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{und} \quad r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

gegeben durch

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)]$$

$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

ihr Quotient durch:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Daraus folgen die Sätze:

Complexe Größen werden miteinander $\frac{\text{multipliciert}}{\text{dividiert}}$

wenn man ihre absoluten Beträge miteinander $\frac{\text{multipliciert}}{\text{dividiert}}$

und ihre Argumente $\frac{\text{addiert.}}{\text{subtrahiert}}$

## § 36. Eulers Formel.

Setzt man in der Exponentialreihe

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!},$$

welche für alle endlichen Werte von z convergiert, $z = x\,i$, so erhält man:

$$e^{ix} = 1 + \frac{i\,x}{1!} + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \ldots,$$

oder wenn man berücksichtigt, dass

$$i^2 = -1,\ i^3 = i^2 . i = -i,\ i^4 = i^2 . i^2 = +1,\ i^5 = i^4 . i = i,$$

$$i^6 = i^4 . i^2 = -1, \ldots$$

$$e^{ix} = \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right] + i\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right],$$

also

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133$$

Diese Gleichung wird Eulers Formel genannt und ist einer Erweiterung fähig.

Setzt man nämlich $2k\pi + x$ statt x, wobei k eine ganze Zahl bedeutet, so hat man

$$e^{(2k\pi + x)} = \cos(2k\pi + x) + i \sin(2k\pi + x),$$

oder, weil zufolge der bezüglich k gemachten Voraussetzung

$$\cos(2k\pi + x) = \cos x, \quad \sin(2k\pi + x) = \sin x,$$

$$e^{(2k\pi + x)} = \cos x + i \sin x.$$

Durch die Substitution $-x$ für x in die Euler'sche Gleichung

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

erhält man:

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

und aus beiden durch Addition, beziehungsweise Subtraction

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Diese zwei Formeln geben die analytische Definition trigonometrischer Functionen und gelten auch für imaginäre Bogen, z. B. für $x = iz$.

Dann ist

$$\cos iz = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2},$$

$$\sin iz = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} i$$

und

$$\operatorname{tang} iz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}} i,$$

$$\operatorname{cotg} iz = -\frac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}} i,$$

d. h. der Cosinus eines imaginären Bogens ist eine reale Zahl: der Sinus, die Tangente und Cotangente imaginärer Bögen sind imaginär.

Die realen Factoren auf der rechten Seite der Gleichungen heißen hyperbolische Functionen, ihre Werte sind in Tabellen zusammengestellt worden und finden manche zweckmäßige Anwendung.

So ist

$$\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \operatorname{Ch} x$$

der hyperbolische Cosinus von $x$,

$$\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \operatorname{Sh} x$$

der hyperbolische Sinus von $x$ u. s. w.

## § 37. Satz von Moivre.

*Mehrwertigkeit der Wurzelgrößen.*

Geht man von der Euler'schen Formel

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}$$

aus, und erhebt beiderseits vom Gleichheitszeichen auf die $n^{te}$ Potenz. so erhält man:

$$(\cos x + i \sin x)^{n} = e^{inx},$$

ersetzt man aber in Eulers Formel $x$ durch $nx$, so findet man

$$\cos nx + i \sin nx = e^{inx},$$

demnach ist

$$(\cos x + i \sin x)^{n} = \cos nx + i \sin nx \quad \ldots \quad (134$$

Diese Gleichung gilt für jeden endlichen Wert von n und wird die Formel von Moivre genannt.

Schreibt man $\varphi$ für x und multipliciert beiderseits des Gleichheitszeichens mit $r^n$, so erhält man:

$$r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Nun kann aber, wie bereits angeführt, jede complexe Größe auf die Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gebracht werden, es enthält also die letzte Gleichung den Satz:

Eine complexe Größe wird potenziert, indem ihr absoluter Betrag potenziert und ihr Argument mit dem Potenzexponenten multipliciert wird.

Die Gleichung von Moivre ist auch einer Erweiterung fähig.

Da

$$\cos x = \cos(2k\pi + x), \quad \sin x = \sin(2k\pi + x),$$

wenn k eine ganze Zahl, ist

$$\cos x + i\sin x = \cos(2k\pi + x) + i\sin(2k\pi + x)$$

und

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos n(2k\pi + x) + i\sin n(2k\pi + x).$$

Ist nun insbesondere $n = \frac{1}{m}$, wobei m eine ganze Zahl bedeutet, so hat man:

$$(\cos x + i\sin x)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\cos x + i\sin x},$$

also

$$\sqrt[m]{\cos x + i\sin x} = \cos\frac{2k\pi + x}{m} + i\,.\,\sin\frac{2\pi k + x}{m}.$$

Da für k jede beliebige ganze Zahl gesetzt werden kann, möchte es scheinen, dass hieraus unendlich viele Wurzelwerte resultieren, was indessen nicht zutrifft.

Es ist nämlich leicht einzusehen, dass nur für m unmittelbar aufeinander folgende ganze Zahlen verschiedene Werte der Wurzel erhalten werden und sich nach Überschreiten der $m^{ten}$ Zahl einfach wiederholen.

Setzt man nämlich für k nach und nach

$$p,\quad p+1,\quad p+2,\quad p+3,\ \ldots\ p+m-1,\quad p+m,$$

so erhält man für

$$\frac{2k\pi + x}{m} = \frac{x}{m} + \frac{2k\pi}{m}$$

folgende Werte:

$$\frac{x}{m} + \frac{2p\pi}{m},$$

$$\frac{x}{m} + \frac{2p\pi}{m} + \frac{2\pi}{m},$$

$$\frac{x}{m} + \frac{2p\pi}{m} + 2\frac{2\pi}{m},$$

$$\frac{x}{m} + \frac{2p\pi}{m} + 2\frac{3\pi}{m},$$

. . . . . .

$$\frac{x}{m} + \frac{2p\pi}{m} + 2\frac{(m-1)\pi}{m},$$

$$\frac{x}{m} + \frac{2p\pi}{m} + 2\frac{m\pi}{m},$$

$$\frac{x}{m} + \frac{2p\pi}{m} + 2\frac{(m+1)\pi}{m} = \frac{x}{m} + \frac{2p\pi}{m} + 2\frac{m\pi}{m} + 2\frac{\pi}{m}.$$

. . . . . .

Die Substitutionen $k = p$ und $k = p + m$, $k = p + 1$ und $k = p + m + 1$, $k = p + 2$ und $k = p + m + 2$ u. s. w. ergeben Bögen, welche sich um eine ganze Anzahl von Umdrehungen ($2\pi$) unterscheiden, daher dieselben Cosinus und Sinus haben.

Es hat also die $m^{te}$ Wurzel aus einem complexen reducierten Binom m Werte.

Die m-Wertigkeit der Wurzel pflegt man dort, wo dies nothwendig erscheint, durch ein doppeltes Wurzelzeichen anzudeuten und zu schreiben:

$$\sqrt[m]{\sqrt{\cos x + i \sin x}} = \cos\frac{2k\pi + x}{m} + i \sin\frac{2k\pi + x}{m}.$$

Setzt man speciell $x = 0$, so erhält man:

$$\sqrt[m]{\sqrt{1}} = \cos\frac{2k\pi}{m} + i \sin\frac{2k\pi}{m}$$

und durch Substitution von m aufeinander folgenden ganzen Zahlen für k die m $m^{ten}$ Wurzeln der Einheit.

Die drei Werte von $\sqrt[3]{1}$ z. B. sind ($k = 1, 2, 3, \quad m = 3$):

$$J_1 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}; \quad J_2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}; \quad J_3 = 1.^*)$$

Die m Werte der m^ten Wurzel einer Größe a werden erhalten, wenn man den numerischen Betrag dieser Wurzel mit den m Wurzelwerten der Einheit multipliciert.

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{1}\ \sqrt[m]{a}.$$

## § 38. Vielwertigkeit der natürlichen Logarithmen.

Logarithmiert man die erweiterte Euler'sche Gleichung

$$e^{(2k\pi+x)i} = \cos x + i \sin x,$$

so erhält man:

$$l(\cos x + i \sin x) = (2k\pi + x)\, i.$$

Daraus ist zu ersehen, dass der Logarithmus des complexen Ausdruckes

$$\cos x + i \sin x$$

unendlich viele Werte hat, da für k jede beliebige ganze Zahl gesetzt werden kann.

Setzt man $x = 0$, so erhält man:

$$l\,1 = 2k\pi i.$$

Der Logarithmus der positiven Einheit ist unendlich vieldeutig, man erhält alle seine Werte, wenn man für k nach und nach alle positiven und negativen ganzen Zahlen substituiert.

Der einzige reale Wert ergibt sich für $k = 0$ mit

$$l\,1 = 0,$$

alle anderen Logarithmen der positiven Einheit sind imaginär.

Setzt man in der Gleichung für den Logarithmus des reducierten complexen Binoms $x = \pi$, so erhält man:

$$l(-1) = (2k + 1)\,\pi i,$$

d. h. unter den unendlich vielen Logarithmen der negativen Einheit ist keiner real.

Man pflegt den vielwertigen Logarithmus durch Einschließen der Größe in doppelte Klammern zu bezeichnen l((a)), zum Unterschiede

*) $\cos\frac{\pi}{3} = -\cos\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

von dem einzigen realen, der einfach durch l a oder l(a) ausgedrückt wird.

Da jede Zahl durch das Product aus ihrem absoluten Betrag und der positiven oder negativen Einheit darstellbar ist, kann auch der vielwertige Logarithmus derselben angegeben werden.

Es ist:

$$l((a)) = l((a \,.\, 1)) = l\,a + l((1)) = l\,a + 2\,k\,\pi\,i,$$
$$l((-a)) = l((a \,.\, -1)) = l\,a + l((-1)) = l\,a + (2\,k + 1)\,\pi\,i.$$

Bringt man das complexe Binom

$$a + b\,i$$

auf die Form

$$r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

wobei

$$r = + \sqrt{a^2 + b^2} \quad \varphi = \text{arc tang}\,\frac{b}{a},$$

so ergibt sich

$$l((a + b\,i)) = l(r) + l((\cos\varphi + i \sin\varphi)),$$
$$= \frac{1}{2}\,l(a^2 + b^2) + (2\,k\,\pi + \varphi)\,i,$$
$$= \frac{1}{2}\,l(a^2 + b^2) + \left(2\,k\,\pi + \text{arc tang}\,\frac{b}{a}\right)i.$$

---

## 4. Abschnitt.

## Algebraische Gleichungen.

### § 39. Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten.

*1. Definition der algebraischen Formen und Gleichungen.*

Wenn eine algebraische ganze rationale, nach fallenden Potenzen von x geordnete Function $f(x)$ oder $X^n$ gleich Null gesetzt wird, ergibt sich die allgemeine Form

$$f(x) = A_0\,x^n + A_1\,x^{n-1} + A_2\,x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}\,x + A_n = 0$$

einer geordneten algebraischen Gleichung des $n^{ten}$ Grades mit einer Unbekannten.

Wird der Coefficient der höchsten Potenz des x durch Division mit $A_n$ auf die Einheit reduciert, so erhält man die einfachere Form der Gleichung:

$$X^n \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

welche den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegt werden wird.

Die Coefficienten $a_1$, $a_2$, $a_3$, . . . $a_n$ bedeuten bestimmte Buchstaben- oder Zahlengrößen, welche in der Folge stets als reale Größen vorausgesetzt werden.

Je nachdem die Coefficienten Buchstaben- oder Zahlengrößen bedeuten, nennt man die Gleichung literal oder numerisch.

Die Coefficienten $a_1$, $a_2$, . . . $a_n$ können positiv und negativ, ganz oder gebrochen, rational oder irrational und auch zum Theil gleich Null sein. Das von der Unbekannten freie Glied $a_n$ heißt das Absolutglied der Gleichung.

Die Normalgleichung möge abgekürzt mit $X^n = 0$ bezeichnet werden. Die Function $X^n$ ist das Polynom der Gleichung (Gleichungspolynom), und zwar eine rationale Function von x des $n^{ten}$ Grades.

*2. Begriff der Wurzel einer algebraischen Gleichung.*

Jede Größe von allgemeiner Beschaffenheit oder jeder Zahlenwert w, sei er real oder complex von der Form $\alpha + \beta i (i = \sqrt{-1})$. welcher für x substituiert das Gleichungspolynom $X^n$ zu Null macht, d. h. der Gleichung $X^n = 0$ Genüge leistet, heißt eine Wurzel der Gleichung.

Eine Gleichung auflösen bedeutet ihre Wurzeln aufsuchen, also alle Werte von x bestimmen, welche der gegebenen Gleichung genügen.

Die allgemeine Auflösung numerischer oder literaler Gleichungen ist nur bis inclusive der Gleichung 4. Grades immer, dagegen die Auflösung der vollständigen literalen Gleichungen höheren als 4. Grades im allgemeinen nicht mehr möglich, wohl aber ist man imstande die Wurzeln numerischer Gleichungen aller Grade durch Versuche oder Annäherung zu berechnen.

Die Näherungsmethoden zur Auflösung höherer Gleichungen setzen die Kenntnis einer Reihe von allgemeinen Eigenschaften derselben voraus, welche zunächst in folgendem besprochen werden sollen.

*3. Theilbarkeit des Gleichungspolynoms durch Binomialfactoren.*

Sind $w_1$, $w_2$, $w_3$, . . . $w_n$ Wurzeln der algebraischen Gleichung $X^n = 0$, so ist das Polynom $X^n$ durch jede der Diffe-

renzen $x - w_1$, $x - w_2$, $x - w_3$, . . ., welche man Wurzelfactoren nennt, ohne Rest theilbar.

Würde nämlich die Division durch $x - w_1$ nicht aufgehen, so müsste man einen Quotienten $X^{n-1}$ erhalten, welcher eine Function des x vom Grade $n - 1$ sein muss und einen Rest R, welcher kein x mehr enthält. Man hätte dann:

$$X^n = (x - w_1) X^{n-1} + R.$$

Laut Voraussetzung ist $w_1$ eine Wurzel der Gleichung, mithin muss für $x = w_1$, $X^n = 0$ werden, also auch

$$(w_1 - w_1) X_{w_1}^{n-1} + R = 0,$$

woraus nothwendig

$$R = 0$$

folgt.

Es kann also bei der Division kein Rest bleiben.

Ist daher $w_1$ eine Wurzel der Gleichung $X = 0$, so kann letztere auch in der Form

$$X^n = (x - w_1) X^{n-1} = 0.$$

dargestellt werden. Ist ferner $w_2$ eine zweite Wurzel der Gleichung $X^n = 0$, so ist $x - w_2$ ein Factor von $X^{n-1}$ und $w_2$ eine Wurzel der Gleichung $X^{n-1} = 0$, so dass man erhält:

$$X^n = (x - w_1)(x - w_2) X^{n-2} = 0.$$

Denn es kann der Ausdruck $X^n$ oder $(x - w_1) X^{n-1}$ durch die Substitution $x = w_2$ (weil die Wurzeln im allgemeinen verschieden sind) nur dann Null werden, wenn $X^{n-1} = 0$ wird, d. h. es muss $w_2$ eine Wurzel der Gleichung $X^{n-1} = 0$, also $x - w_2$ ein Factor von $X^{n-1}$ sein.

Durch Division von $X^{n-1}$ mit $x - w_2$ erhält man eine Function vom $(n-2)^{ten}$ Grade:

$$X^{n-2} = x^{n-2} + c_3 x^{n-3} + c_4 x^{n-4} + \ldots + c_n,$$

welche gleich Null gesetzt eine Wurzel $w_3$ haben kann u. s. w.

Die Division eines Polynoms

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

durch einen Binomialfactor $x - w$ kann sehr rasch ausgeführt werden durch folgendes Verfahren.

Das Resultat der Division ist ein Polynom von nächst niederem Grade, also von der Form

$$\varphi(x) = b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + b_3 x^{n-3} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$$

und ein kein x enthaltender Rest R; es besteht somit die Gleichung

$$f(x) = (x - w)\varphi(x) + R,$$

welche nach ausgeführter Multiplication

$$\begin{array}{rl|l|l|l|l} f(x) = b_1 x^n + & b_2 & x^{n-1} + & b_3 & x^{n-2} + \ldots + & b_n & x + R \\ & - w b_1 & & - w b_2 & & - w b_{n-1} & - w b_n \end{array}$$

gibt.

Da nun das Polynom rechts für alle Werte des x gleich $f(x)$ sein muss, müssen die Coefficienten gleicher Potenzen des x in beiden Polynomen gleich sein, also die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_1 \\ a_1 &= b_2 - w b_1 \\ a_2 &= b_3 - w b_2 \\ &\ldots\ldots \\ a_n &= R - w b_n, \end{aligned}$$

aus welchen die Coefficienten des Resultates der Division berechnet werden können.

$$\begin{aligned} b_1 &= a_0, \\ b_2 &= w b_1 + a_1, \\ b_3 &= w b_2 + a_2, \\ &\ldots\ldots \\ R &= w b_n + a_n. \end{aligned}$$

Ist speciell w eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so muss R verschwinden.

Aus dieser Entwicklung folgt ein sehr rasch zum Ziele führender Vorgang bei numerischen Aufgaben, welcher an zwei Beispielen demonstriert werden soll.

Das Polynom

$$2x^4 - 13x^3 + 10x^2 + 32x - 36$$

ist durch das Binom $x - 2$ zu dividieren.

Schema der Rechnung:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | +2 | −13 | +10 | +32 | −36 | Coefficienten des Polynoms |
| | | (2 . 2) | (2 . −9) | (2 . −8) | (2 . 16) | Coefficienten der nicht vorhandenen Potenzen sind mit 0 anzusetzen. |
| +2 | +0 | 4 | −18 | −16 | +32 | |
| | 2 | −9 | −8 | +16 | −4 | |

Das Resultat der Division ist

$$2x^3 - 9x^2 - 8x + 16$$

und $-4$ ist der Rest.

Das Polynom

$$x^5 - 2x^4 - 15x^3 - 2x^2 + 50$$

ist durch $x - 5$ zu dividieren.

Schema der Rechnung:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-2$ | $-15$ | $-2$ | 0 | $+50$ |
| 5 | $+0$ | $+5$ | $+15$ | 0 | $-10$ | $-50$ |
| | 1 | 3 | 0 | $-2$ | $-10$ | 0 |

Das Resultat der Division ist

$$x^4 + 3x^3 - 2x - 10.$$

Da sich hier der Rest Null ergibt, ist 5 eine Wurzel der Gleichung

$$x^5 - 2x^4 - 15x^3 - 2x^2 + 50 = 0.$$

*4. Die complexen Wurzeln und die trinomischen Factoren.*

Ist $x = \alpha + \beta i$ eine complexe Wurzel der Gleichung $X^n = 0$, so ist auch $\alpha - \beta i$ eine Wurzel der Gleichung.

Denn setzt man für x den Wert $\alpha + \beta i$ ein, so erhält man nach Vereinigung der realen und imaginären Glieder eine Gleichung von der Form:

$$X = P + Q\beta i = 0,$$

wobei P und Q nur gerade Potenzen von $\beta$ enthalten.

Diese Gleichung hat aber wegen der Heterogenität der Glieder (§ 35) die beiden Gleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0$$

zur Folge.

Setzt man für x den zweiten Wert $\alpha - \beta i$, so ändert sich offenbar nur das Vorzeichen von $Q\beta$ und es ist auch

$$X = P - Q\beta i = 0,$$

weil $P = 0$ und $Q = 0$ ist. Es genügt also auch der Wert $\alpha - \beta i$ der Gleichung $X = 0$, ist somit auch eine Wurzel derselben.

Man nennt zwei solche complexe Größen ein Paar conjugiert complexer Wurzeln der Gleichung.

Complexe Wurzeln treten nur paarweise auf.

Da nun das Gleichungspolynom durch jeden Wurzelfactor ohne Rest theilbar ist, muss es sowohl durch $x-(\alpha+\beta i)$ als auch durch $x-(\alpha-\beta i)$, mithin auch durch das Product $[x-\alpha-\beta i][x-\alpha+\beta i]$ theilbar sein. Dieses Product ist real und repräsentiert den trinomischen Factor:

$$(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)=(x-\alpha)^2+\beta^2=x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2).$$

**Anmerkung:** Sind die Coefficienten einer Gleichung durchwegs rational und $\alpha+\sqrt{\beta}$ eine Wurzel derselben, so ist, wenn $\alpha$ eine rationale Größe und $\beta$ kein vollständiges Quadrat, auch $\alpha-\sqrt{\beta}$ eine Wurzel der Gleichung.

Der Beweis dieses Satzes ist ganz analog zu führen, wie für complex conjugierte Wurzeln.

*5. Stetigkeit des Gleichungspolynoms.*

In der Gleichung $X^n=0$ ist das Polynom $X^n$ für alle realen und endlichen Werte von x eine stetige Function.

Denn ändert sich x um h, so geht $X^n=f(x)$ in $f(x+h)$ über und es ist

$$f(x+h)=(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+a_2(x+h)^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}(x+h)+a_n,$$

oder wenn man den Ausdruck nach den Potenzen von h ordnet und $f(x)$ auf die linke Seite der Gleichung schafft:

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)=h&\left[\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n-1}{1}a\,x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\right],\\&+h^2\left[\binom{n}{2}x^{n-2}+\binom{n-1}{2}a\,x^{n-3}+\ldots+a_{n-2}\right],\\&+h^3\left[\binom{n}{3}x^{n-3}+\binom{n-1}{3}a\,x^{n-4}+\ldots+a_{n-3}\right],\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+h^n.\end{aligned}$$

Für $h=0$ wird also, weil die Klammerausdrücke für alle endlichen realen Werte des x real und endlich bleiben, auch $f(x+h)-f(x)=0$, und $\lim_{h=0}[f(x+h)-f(x)=0]$ ist das Kennzeichen für eine stetige Function. (Siehe Einleitung.)

Wegen der Stetigkeit des Polynoms $X^n$ kann sich der Wert desselben nicht sprungweise ändern, kann also nicht von einem positiven endlichen Werte zu einem negativen übergehen, ohne hiebei die Scheide Null dieser Zahlengebiete zu passieren, sondern

das Gleichungspolynom wird für einen bestimmten Wert des x, z. B. $x = w$, Null und dieser ist offenbar eine Wurzel der Gleichung.

*6. Von den Grenzen der Wurzeln.*

Es lässt sich für jede Gleichung $X^n = 0$ ein solcher Wert von x angeben, dass für diesen und alle größeren Werte das erste Glied des Gleichungspolynoms dem absoluten Betrage nach größer wird als die Summe aller übrigen Glieder.

Ist nämlich $a_m$ dem absoluten Betrage nach der größte im Gleichungspolynom vorkommende Coefficient, so wird für $x \gtreqless a_m - 1$ das erste Glied $x^n$ größer als die Summe aller übrigen Glieder. Denn es ist unzweifelhaft

$$a_m(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + 1) > a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots \pm a_m x^{n-m} + \ldots + a_n$$

oder, was dasselbe ist:

$$a_m \frac{x^n - 1}{x - 1} > a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Weil nun $x - 1 \gtreqless a_m$ angenommen wurde, ist umsomehr

$$x^n - 1 > a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

und auch

$$x^n > a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Aus dieser Thatsache folgt der Satz:

Ist $a_m$ der dem absoluten Betrage nach größte Coefficient einer algebraischen Gleichung $X^n = 0$, so wird für $x \gtreqless a_m + 1$ das Gleichungspolynom positiv und für $x \lesseqgtr -(a_m + 1)$ positiv oder negativ, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Diese zwei Werte des x

$$x = a_m + 1, \quad x = -(a_m + 1)$$

geben daher die Grenzen für die Wurzeln an. Keine der Wurzeln kann nämlich einen größeren Wert haben als $a_m + 1$ und keine einen kleineren als $-(a_m + 1)$, weil für alle außerhalb derselben gelegenen Werte des x das Gleichungspolynom zeichenbeständig wird, und für jede Wurzel muss dasselbe einen Zeichenwechsel erfahren.

*7. Existenz der Wurzeln und Kennzeichen dafür.*

Setzt man in das Gleichungspolynom $X^n$ oder $f(x)$ für x nacheinander zwei reale Werte p und q ein und erhält dadurch Resultate $f(p)$ und $f(q)$ vom entgegengesetzten Vorzeichen, so muss das Gleichungspolynom $f(x)$ wenigstens für einen

zwischen p und q liegenden realen Wert des x verschwinden, also die Gleichung $X^n = 0$ zwischen p und q mindestens eine reale Wurzel haben.

Dieser Satz ist die unmittelbare Folge der Stetigkeit des Gleichungspolynoms.

Haben die Substitutionsresultate $f(p)$ und $f(q)$ verschiedene Vorzeichen, so können zwischen p und q auch mehrere Wurzeln der Gleichung, und zwar in ungerader Anzahl liegen. Sind hingegen die Substitutionsresultate $f(p)$ und $f(q)$ gleich bezeichnet, so kann sich zwischen den Werten p und q nur eine gerade Anzahl von Wurzeln befinden.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist direct einzusehen, wenn man bedenkt, dass jede Wurzel einen Zeichenwechsel hervorruft.

Lässt sich kein realer Wert von x angeben, für welchen das Gleichungspolynom $X^n$ verschwindet, so ist der Wert des Gleichungspolynoms für jeden beliebigen positiven oder negativen Wert des x positiv. Umgekehrt, wenn der Wert des Gleichungspolynoms für alle möglichen realen Werte des x positiv bleibt, so besitzt die Gleichung keine reale Wurzel.

Denn für $x \gtrless a_m + 1$, wo $a_m$ den absoluten Wert des größten Coefficienten des Gleichungspolynoms bedeutet, wird das Polynom positiv. Würde es einen anderen Wert des x geben, für welchen das Polynom negativ würde, so müsste zwischen diesem und $a_m + 1$ nothwendig eine reale Wurzel der Gleichung liegen, was der Annahme widerspricht. Die Umkehrung ist auch richtig, weil zur Existenz einer Wurzel erforderlich ist, dass das Gleichungspolynom das Vorzeichen wechseln könne.

**Anmerkung: Zufolge des zuletzt angeführten Satzes kann eine Gleichung mit durchwegs positiven Coefficienten, welche nur gerade Potenzen der Unbekannten enthält, keine reale Wurzel haben.**

Jede Gleichung von ungeradem Grade hat mindestens eine reale Wurzel, deren Vorzeichen jenem des Absolutgliedes $a_n$ entgegengesetzt ist.

Setzt man nämlich zunächst in das Gleichungspolynom $f(x)$ $x = 0$, so erhält man $f(0) = a_n$. Setzt man hierauf $x = \pm (a_m + 1)$ ($a_m$ ist der größte Coefficient), so nimmt das Gleichungspolynom einen Wert an, dessen Vorzeichen jenem vom ersten Gliede $x^n$ und, weil n ungerade vorausgesetzt ist, jenem vom substituierten Wert für x gleich ist. Möge also $a_n$ positiv oder negativ sein, jedenfalls wird durch eine der Substitutionen $x = a_m + 1$ oder $x = -(a_m + 1)$ das Vorzeichen

des Gleichungspolynoms geändert. Ist das letzte Glied $a_n$ speciell positiv. so ändert das Gleichungspolynom das Vorzeichen für einen realen Wert von x, welcher zwischen $x = 0$ und $x = -(a_m + 1)$ liegt, ist hingegen $a_n$ negativ für einen zwischen $x = 0$ und $x = a_m + 1$ gelegenen Wert des x. Die Gleichung hat somit mindestens eine reale Wurzel. welche im ersten Falle negativ, im zweiten positiv ist.

Jede Gleichung von geradem Grade hat wenigstens zwei reale Wurzeln von entgegengesetzten Vorzeichen, wenn das Absolutglied negativ ist.

Setzt man wieder zunächst $x = 0$, so geht das Gleichungspolynom in $a_n$ über; setzt man hierauf $x = \pm (a_m + 1)$, so wird in beiden Fällen das erste Glied $x^n$ des Gleichungspolynoms, also das ganze Gleichungspolynom positiv, mithin liegt zwischen 0 und $a_m + 1$ eine positive und zwischen 0 und $-(a_m + 1)$ eine negative reale Wurzel der Gleichung.

Da auch nachgewiesen werden kann, dass jede Gleichung vom geraden Grade, deren Absolutglied positiv ist, wenigstens eine reale oder complexe Wurzel hat (von dem Beweise soll hier abgesehen werden), kann man den Satz aussprechen:

Jede algebraische Gleichung von der angenommenen Form hat wenigstens eine Wurzel.

### *8. Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.*

Jede Gleichung $n^{ten}$ Grades hat mindestens n Wurzeln.

Ist $w_1$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung

$$X^n = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

welche sie nach dem zuvor Entwickelten haben muss, so ist $x - w_1$ ein Factor derselben, also

$$X^n = (x - w_1) X^{n-1} =$$

$$= (x - w_1)(x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + b_3 x^{n-3} + \ldots + b_n) = 0.$$

Diese Gleichung wird aber außer durch $x - w_1 = 0$, auch durch

$$X^{n-1} \equiv x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + b_3 x^{n-3} + \ldots + b_n = 0$$

befriedigt. Ist nun $w_2$ eine Wurzel der Gleichung $X^{n-1} = 0$, welche diese unbedingt haben muss, so ist

$$X^{n-1} = (x - w_2) X^{n-2} =$$

$$= (x - w_2)(x^{n-2} + c_3 x^{n-3} + c_4 x^{n-4} + \ldots + c_n) = 0$$

und

$$X^n = (x - w_1)(x - w_2) X^{n-2} = 0.$$

Fährt man in der Weise fort, so erniedrigt man den Grad des Polynoms bis auf $X^{n-(n-1)} = x + m_n$, so dass man erhält

$$X = (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3) \ldots (x - w_{n-1})(x + m_n) = 0$$

$x + m_n = 0$ liefert die Wurzel $w_n = -m_n$.

Da nun das Polynom für jede der Substitutionen $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ verschwindet, so folgt daraus, dass jeder dieser Werte w eine Wurzel der Gleichung ist, dass also die Gleichung mindestens n Wurzeln besitzt.

Jede Gleichung vom n^ten Grade hat nur n Wurzeln.

Sind $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ die n Wurzeln einer Gleichung n^ten Grades, so müsste, falls es noch eine $(n+1)^{te}$ Wurzel r gäbe, diese für x in das Gleichungspolynom substituiert, dasselbe zu Null machen. Es müsste also

$$X_r^n = (r - w_1)(r - w_2)(r - w_3) \ldots (r - w_n) = 0$$

sein, was nur möglich ist, wenn einer der Klammerausdrücke verschwindet, also r einer der n Wurzeln w gleich ist.

Dividiert man eine Gleichung des n^ten Grades durch einen Wurzelfactor $x - w$ derselben, so erhält man eine Gleichung vom $(n-1)^{ten}$ Grade, welche die übrigen $n - 1$ Wurzeln liefert.

Kennt man also eine Wurzel einer Gleichung, so kann man ihren Grad um eine Einheit erniedrigen.

### *9. Bildung des Gleichungspolynoms aus den Wurzelfactoren und Beziehung der Coefficienten zu den Wurzeln.*

Sind sämmtliche Wurzeln einer Gleichung bekannt, so lässt sich aus diesen wieder das Gleichungspolynom dadurch herstellen, dass man sämmtliche Wurzelfactoren $x - w_1$, $x - w_2$, $x - w_3$, $x - w_4 \ldots$ miteinander multipliciert.

$$(x - w_1)(x - w_2) = x^2 - w_1 \mid x - w_2 \mid + w_1 w_2$$

$$(x - w_1)(x - w_2)(x - w_3) = x^3 - w_1 \mid x^2 + w_1 w_2 \mid x - w_2 \mid + w_1 w_3 \mid - w_1 w_2 w_3 - w_3 \mid + w_2 w_3 \mid$$

$$(x - w_1)(x - w_2)(x - w_3)(x - w_4) =$$

$$= x^4 - w_1 x^3 + w_1 w_2 x^2 - w_1 w_2 w_3 x$$
$$- w_2 \quad w_1 w_3 \quad - w_1 w_2 w_4$$
$$- w_3 \quad w_2 w_3 \quad - w_1 w_3 w_4 \quad + w_1 w_2 w_3 w_4.$$
$$- w_4 \quad w_1 w_4 \quad - w_2 w_3 w_4$$
$$w_2 w_4$$
$$w_3 w_4$$

Für numerische Wurzeln ergibt sich hieraus ein einfaches Schema der Berechnung der Coefficienten der Gleichung.

**Beispiele:**

1. Die Wurzeln einer Gleichung 4. Grades sind $-2$, $+2$, $-1$, $+3$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $+2$ | | | |
| | | $(-2.1)$ | $(-2.2)$ | | |
| $-2$ | 1 | 0 | $-4$ | | |
| | | $(1.1)$ | $(1.0)$ | $(1.-4)$ | |
| $+1$ | 1 | 1 | $-4$ | $-4$ | |
| | | $(-3.1)$ | $(-3.1)$ | $(-3.-4)$ | $(-3.-4)$ |
| $-3$ | 1 | $-2$ | $-7$ | $+8$ | $+12$ |

Die Gleichung lautet somit

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0.$$

2. Die Wurzeln einer Gleichung vom 5. Grade seien $-1$, $2$, $3$, $-\frac{3}{4}$, $-5$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $+1$ | | | | |
| $-2$ | 1 | $-1$ | $-2$ | | | |
| $-3$ | 1 | $-4$ | $+1$ | $+6$ | | |
| $+\frac{3}{4}$ | $\left(1\right.$ | $\left.-\frac{13}{4}\right.$ | $\left.-\frac{8}{4}\right.$ | $\left.+\frac{27}{4}\right.$ | $\left.+\frac{18}{4}\right)$ | |
| | 4 | $-13$ | $-8$ | $+27$ | $+18$ | |
| $+5$ | 4 | $+7$ | $-73$ | $-13$ | $+153$ | $+90.$ |

Die Gleichung lautet sonach:

$$4x^5 + 7x^4 - 73x^3 - 13x^2 + 153x + 90 = 0.$$

Wie dem literalen Schema zu entnehmen, sind die Coefficienten der Gleichung Functionen ihrer Wurzeln, und zwar:

Der negative Coefficient des zweiten Gliedes ist die Summe aller Wurzeln.

Der Coefficient des dritten Gliedes ist die Summe aller Producte aus je zwei Wurzeln.

Der negative Coefficient des vierten Gliedes ist die Summe aller Producte von je drei Wurzeln, etc.

Das Absolutglied der Gleichung ist stets gleich dem Producte aller Wurzeln, und zwar positiv oder negativ genommen, je nachdem die Gleichung von geradem oder ungeradem Grade ist.

**Anmerkung**: Das Gesetz der Bildung der Coefficienten aus den Wurzelfactoren gibt n Gleichungen zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der Gleichung, diese sind aber im allgemeinen zur directen Bestimmung der Wurzeln ungeeignet, da sie bei der Elimination von n — 1 Wurzeln zur Bestimmung der $n^{ten}$ die ursprüngliche Gleichung wiedergeben.

## Kennzeichen der Wurzeln.

*10. Zeichenfolgen und Zeichenwechsel, Cartesischer oder Harriot'scher Lehrsatz.*

Sind sämmtliche Wurzeln einer Gleichung $X^n = 0$ positiv, so haben die Coefficienten der Gleichung abwechselnde Vorzeichen; sind alle Wurzeln negativ, so sind alle Coefficienten positiv.

Der erste Theil dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem bei der Bildung der Coefficienten aus den Wurzeln angesetzten Schema, wenn alle Wurzeln als positiv angenommen werden. Der zweite Theil des Satzes ist direct einzusehen, wenn man bedenkt, dass bei durchwegs negativen Wurzeln alle Wurzelfactoren die Form $x + w$ haben, also das Product derselben kein negatives Zeichen aufweisen kann.

Bei durchwegs positiven realen Wurzeln hat das Gleichungspolynom nur Zeichenwechsel, bei durchwegs negativen realen Wurzeln nur Zeichenfolgen.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht.

Ändert man in der Gleichung

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

das Vorzeichen des zweiten, vierten etc. . . . $2n^{ten}$ Gliedes. so sind die Wurzeln der so gebildeten neuen Gleichung

$$x^m - a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} - a_3 x^{m-3} + \ldots$$

$$\ldots (-1)^{m-1} a_{m-1} x + (-1)^m a_m = 0$$

jenen der ursprünglichen entgegengesetzt gleich.

Berücksichtigt man die Bildung der Coefficienten $a_1$, $a_2$, $a_3$, . . . aus den Wurzeln, so wird offenbar, wenn man die Zeichen sämmtlicher Wurzeln der ersten Gleichung in die entgegengesetzten verwandelt, die aus diesen gebildete Gleichung dieselben Coefficienten haben. nur

wird das Zeichen jener Coefficienten, welche aus Producten einer ungeraden Zahl von Wurzeln zusammengesetzt sind, wie $a_1$, $a_3$, ... $a_{2n-1}$. entgegengesetzt ausfallen, was die Richtigkeit des aufgestellten Satzes darlegt.

So hat beispielsweise die Gleichung

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

die Wurzeln 2, 3, 4 und die Gleichung

$$x^3 + 9x^2 + 26x + 24 = 0$$

die Wurzeln $-2$, $-3$, $-4$.

Dieser Satz gibt ein Mittel, die Bestimmung aller realen Wurzeln auf die Bestimmung der positiven zu reducieren. Um nämlich die realen negativen Wurzeln zu ermitteln, ändert man die Zeichen der Glieder an den geraden Stellen, sucht die positiven Wurzeln der so transformierten Gleichung, welche, negativ genommen, Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Eine Gleichung $X^n = 0$ kann nicht mehr reale positive Wurzeln haben als das Gleichungspolynom Zeichenwechsel und eine vollständige Gleichung nicht mehr reale negative Wurzeln als das Gleichungspolynom Zeichenfolgen aufweist.

Sind sämmtliche Wurzeln real, so ist die Zahl der positiven Wurzeln gleich der Zahl der Zeichenwechsel, und die Zahl der negativen gleich der Zahl der Zeichenfolgen. Der Beweis dieses unter dem Namen Cartesischer oder Harriot'scher Lehrsatz bekannten Satzes bereitet keine Schwierigkeiten.

Da eine Gleichung $n^{ten}$ Grades im allgemeinen $n+1$ Glieder. also n Aufeinanderfolgen von Zeichen hat, stimmt zunächst die Anzahl der Wurzeln mit jener der Aufeinanderfolgen von Vorzeichen überein.

Multipliciert man irgend ein Polynom $X^{n-1}$, welches als Product der übrigen binomischen und trinomischen Wurzelfactoren angesehen werden kann mit dem Factor $x - w$, so erhält man $w > 0$ vorausgesetzt ein Polynom $X^n$, mit mindestens einem Zeichenwechsel mehr wie das ursprüngliche.

So ergibt sich z. B. durch Multiplication des drei Zeichenwechsel aufweisenden Polynoms

$$x^5 - ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx - e,$$

worin a, b, c, d, e, positiv gedacht sind, mit $x - w$ das Polynom

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^6 - a$ | $x^5 - b$ | $x^4 + c$ | $x^3 - d$ | $x^2 - e$ | $x$ |
| $- w$ | $+ aw$ | $+ bw$ | $- cw$ | $+ dw$ | $- ew$ |

$$x^6 - (a+w)x^5 + (aw-b)x^4 + (c+bw)x^3 - (d+cw)x^2 + (dw-e)x + ew.$$

welches mindestens vier Zeichenwechsel besitzt, denn nebst den durch ‿‿ bezeichneten zweifellosen Zeichenwechseln hat das Polynom zwei bezüglich des Vorzeichens unentschiedene Glieder (die unterstrichenen), welche, wie immer ihre Vorzeichen ausfallen mögen, unbedingt entweder einen ihnen vorangehenden oder folgenden Zeichenwechsel hervorrufen.

Da nun unbedingt jeder einer realen positiven Wurzel entsprechende Wurzelfactor mindestens einen Zeichenwechsel mehr hervorruft. so kann thatsächlich eine Gleichung nicht mehr reale positive Wurzeln haben als ihr Polynom Zeichenwechsel aufweist.

Ändert man in der Gleichung $X^n = 0$ die Vorzeichen der an den geraden Stellen befindlichen Glieder, so erhält man eine Gleichung, die mit $(-X)^n = 0$ bezeichnet werden soll, deren Wurzeln jenen der ursprünglichen entgegengesetzt gleich sind. Die negativen Wurzeln der Gleichung $X^n = 0$ sind positive Wurzeln der Gleichung $(-X)^n = 0$. Nun kann die Gleichung $(-X)^n = 0$ höchstens so viele reale positive Wurzeln haben als in ihrem Polynom Zeichenwechsel vorkommen, mithin muss $(-X)^n$ mindestens so viel Zeichenwechsel haben als $X^n = 0$ negative Wurzeln besitzt. Ist die Gleichung $X^n = 0$ vollständig, d. h. ist kein Coefficient derselben Null, so hat ihr Polynom ebensoviele Zeichenfolgen wie $(-X)^n$ Zeichenwechsel, wodurch der Satz bezüglich der negativen Wurzeln auch nachgewiesen erscheint.

Eine unvollständige Gleichung $X^n = 0$ hat höchstens so viele reale negative Wurzeln, als ihr Polynom unmittelbare, und durch eine gerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochene Zeichenfolgen, und durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochene Zeichenwechsel aufweist.

Der Satz ist richtig, weil jeder unmittelbaren und durch eine gerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenfolge und jedem durch ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenwechsel in $X^n$ ein Zeichenwechsel in $(-X)^n$ entspricht.

Ist beispielsweise

$$X^n = x^{11} - x^9 + ax^8 - bx^4 - cx + d,$$

so ist

$$[-X]^n = x^{11} - x^9 - ax^8 + bx^4 - cx - d,$$

denn bezeichnet man die fehlenden Glieder des Polynoms durch Punkte, so ergibt sich für $X^n$ das Zeichenschema

$$+ . - + \ldots - .. - +,$$

hingegen erhält man, weil die Zeichen der Glieder an den geraden Stellen des vollständigen Polynoms geändert werden, für $[-X]^n$. das Schema

$$+ . - - \ldots + . . - -.$$

Hat eine Gleichung des $n^{ten}$ Grades zufolge des Cartesischen Satzes höchstens p positive und höchstens q negative Wurzeln, so hat sie mindestens $n - p - q$ complexe Wurzeln.

Jede unvollständige Gleichung $X^n = 0$, welcher eine gerade Anzahl p aufeinander folgender Glieder fehlt, hat mindestens p complexe Wurzeln. Fehlt dagegen in der Gleichung eine ungerade Anzahl p aufeinander folgender Glieder, so hat sie mindestens $p \pm 1$ complexe Wurzeln, je nachdem die fehlende Gruppe innerhalb einer Zeichenfolge oder innerhalb eines Zeichenwechsels liegt.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des Cartesischen. Jede Gleichung hat nämlich immer so viel Wurzeln als das vollständige Gleichungspolynom Aufeinanderfolgen von Zeichen aufweist. Fehlen aber p Glieder im Polynom, so fehlen $p + 1$ unmittelbare Aufeinanderfolgen von Zeichen. Die restierenden $n - (p + 1)$ unmittelbaren Aufeinanderfolgen von Zeichen lassen aber höchstens auf $n - (p + 1)$ reale Wurzeln schließen.

Die unterbrochene Aufeinanderfolge zeigt, wenn sie ein Zeichenwechsel ist, höchstens eine reale positive, und wenn die Zahl p der fehlenden Glieder ungerade ist, überdies noch höchstens eine reale negative Wurzel an. Ist diese unterbrochene Aufeinanderfolge eine Zeichenfolge, so deutet sie auf höchstens eine negative Wurzel, und zwar nur dann, wenn p gerade ist. Mithin ist die Gesammtzahl der realen Wurzeln für ein gerades p höchstens $n - (p + 1) + 1 = n - p$ und für ein ungerades p höchstens $n - (p + 1) + 2 = n - (p - 1)$ beziehungsweise $n - (p + 1)$, so dass also die Zahl der complexen Wurzeln, wie im Satze ausgesprochen, für gerades p mindestens p, für ungerades p mindestens $p \pm 1$ ist.

### *11. Mehrfache Wurzeln.*

Eine Gleichung des $n^{ten}$ Grades hat n Wurzeln; es ist aber nicht ausgeschlossen, dass mehrere derselben gleich sind, so dass es dann den Anschein hat, als ob die Gleichung weniger als n Wurzeln haben könnte.

Um die Ubereinstimmung herzustellen, ist man übereingekommen, in Fällen, in welchen ein Wurzelfactor $x - w$ im Gleichungspolynom

mehrmals enthalten ist, w unter den Wurzeln mehrfach zu zählen und also von einfachen, zweifachen, dreifachen, . . . rfachen Wurzeln zu sprechen.

Dass in dem Falle, wo $w_r$ eine rfache Wurzel der Gleichung ist, der Wurzelfactor $x - w_r$ im Gleichungspolynom rmal enthalten sein muss, ist an sich klar, denn das Gleichungspolynom ist das Product aller Wurzelfactoren, deren Anzahl bei einer Gleichung $n^{ten}$ Grades n sein muss. Sind nur $n - r$ Wurzeln von einander verschieden, so ist das Product aller von denselben herrührenden Wurzelfactoren vom $(n-r)^{ten}$ Grade, kann also durch die Multiplication mit dem von der rfachen Wurzel herrührenden Factor $x - w_r$ nur dann auf den $n^{ten}$ Grad gebracht werden, wenn derselbe in der $r^{ten}$ Potenz in Rechnung gezogen wird.

Weil die mehrfachen Wurzeln bei der angenäherten Ermittlung der Wurzelwerte Schwierigkeiten bereiten, sei das charakteristische Kennzeichen derselben gleich an dieser Stelle angeführt.

Wie bereits besprochen, ist das Gleichungspolynom $f(x)$ und alle Differentialquotienten desselben für alle endlichen Werte des x endlich und stetig, mithin besteht die Taylor'sche Gleichung (121a

$$f(x) = f(w) + (x-w)f'(w) + \frac{(x-w)^2}{2!}f''(w) + \frac{(x-w)^3}{3!}f'''(w) + \ldots,$$

worin w eine beliebige endliche Größe bedeutet.

Ist nun w eine Wurzel der Gleichung, so verschwindet $f(w)$ und es ist

$$f(x) = (x-w)f'(w) + \frac{(x-w)^2}{2!}f''(w) + \frac{(x-w)^3}{3!}f'''(w) + \ldots$$

Dividiert man beiderseits mit $x - w$, so erhält man:

$$\frac{f(x)}{x-w} = f'(w) + \frac{(x-w)}{2!}f''(w) + \frac{(x-w)^2}{3!}f'''(w) + \ldots$$

Verschwindet auch $f'(w)$, so sind auch beide Seiten dieser Gleichung durch $x - w$ theilbar und man erhält nach Division mit $x - w$

$$\frac{f(x)}{(x-w)^2} = \frac{1}{2!}f''(w) + \frac{x-w}{3!}f'''(x) + \ldots$$

Verschwindet also mit $f(w)$ gleichzeitig $f'(w)$, so ist das Gleichungspolynom durch $(x-w)^2$ theilbar, und es ist, aber auch nur dann, w eine zweifache Wurzel der Gleichung.

Diese Schlussweise kann weiter ausgedehnt werden und führt zu dem Satze:

Ist $w_r$ eine r fache Wurzel der Gleichung $f(x)=0$, so muss für $x=w_r$ nicht nur das Gleichungspolynom $f(x)$, sondern es müssen auch die $(r-1)$ ersten Differentialquotienten desselben verschwinden.

Gibt es umgekehrt einen Wert von x, für welchen das Gleichungspolynom und seine $r-1$ ersten Differentialquotienten verschwinden, so ist dieser eine r fache Wurzel der Gleichung.

Anmerkung: Ist $w_r$ eine r fache Wurzel der Gleichung $f(x)=0$, so ist es auch eine Wurzel von $f'(x)=0$, $f''(x)=0 \ldots f^{(r-1)}(x)=0$.

## § 40. Transformation der Gleichungen.

*1. Verkleinerung und Vergrößerung der Wurzeln durch Subtraction und Addition. — Lineare Variation.*

Aus einer gegebenen Gleichung

$$f(x) = X^n = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

kann stets eine andere hergeleitet werden, deren Wurzeln um z kleiner sind wie jene der ursprünglichen, d. h. man kann immer eine neue Gleichung

$$Y^n = y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \ldots + A_n$$

so bilden, dass ihre Wurzeln $y=x-z$ sind, wenn für x die Wurzelwerte der Gleichung $f(x)=0$ gesetzt werden.

Die Größe z pflegt man die Variation, die neue Gleichung in y die variierte Gleichung oder kurz Variierte zu nennen.

Um aus der Gleichung $f(x)=0$ die Variierte in y zu finden, hat man nur hierin $x=z+y$ zu setzen.

Die Substitution gibt

$$f(z+y)=0,$$

und wenn man die Function nach steigenden Potenzen von y entwickelt, was wegen der Stetigkeit zulässig ist,

$$f(z)+f'(z)y+\frac{f''(z)}{2!}y^2+\frac{f'''(z)}{3!}y^3+\ldots+\frac{f^{n-1}(z)}{(n-1)!}y^{n-1}+$$
$$+\frac{f^{(n)}(z)}{n!}y^n=0$$

als variierte Gleichung in y.

**Beispiel:**

Es ist die Variierte der Gleichung

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 3 = 0$$

anzugeben, welche um 1 kleinere Wurzeln besitzt.

Hier ist $z = 1$

$$\begin{aligned} f\ (x) &= x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 3, \quad \text{also} \quad f\ (z) = -2, \\ f'\ (x) &= 4x^3 - 9x^2 + 4x + 1, \qquad\qquad f'\ (z) = 0, \\ f''\ (x) &= 12x^2 - 18x + 4, \qquad\qquad f''\ (z) = -2, \\ f'''\ (x) &= 24x - 18, \qquad\qquad f'''\ (z) = 6, \\ f^{IV}(x) &= 24 \qquad\qquad f^{IV}(z) = 24. \end{aligned}$$

Die gesuchte Variierte ist somit

$$y^4 + y^3 - y^2 - 2 = 0.$$

Bei der Substitution der linearen Function $y + m$ an die Stelle der Wurzel $x$ einer numerischen Gleichung kann ein einfacheres Verfahren eingeschlagen werden.

Ist die gegebene Gleichung

$$X^n = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

so ist die Variierte

$$Y^n = y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \ldots + A_n = 0$$

bei der Substitution $x = y + m$ wegen $y = x - m$ identisch mit

$$\begin{aligned} Y^n = (x-m)^n + A_1 (x-m)^{n-1} + A_2 (x-m)^{n-2} + \ldots \\ \ldots + A_{n-1}(x-m) + A_n = 0. \end{aligned}$$

Da das Polynom $Y^n$ durch $x - m$ dividiert, den Rest $A_n$ und den Quotienten

$$Y^{n-1} = (x-m)^{n-1} + A_1 (x-m)^{n-2} + \ldots + A_{n-1}$$

gibt, so muss auch das Polynom $X^n$ durch $x - m$ dividiert, den Rest $A_n$ und den Quotienten $Y^{n-1}$ geben.

Dividiert man den Quotienten $Y^{n-1}$ abermals durch $x - m$, so erhält man den Rest $A_{n-1}$ und einen Quotienten $Y^{n-2}$ u. s. w.

Die Transformation der Gleichung kann also durch wiederholte Division des Polynoms mit $x - m$ ausgeführt werden, die hiebei auftretenden Reste sind die Coefficienten der neuen Gleichung. Die Ausführung der Division wurde bereits in § 39, Pkt. 2 gezeigt.

**Beispiele:**

Die Gleichung

$$x^4 - 3x^3 + 6x - 5 = 0$$

ist in eine andere umzuwandeln, deren Wurzeln um 2 kleiner sind.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | −3 | 0 | 6 | −5 |
| 2 | 1 | −1 | −2 | +2 | (−1) |
| | 1 | +1 | 0 | (+2) | |
| | 1 | +3 | (+6) | | |
| | 1 | (+5) | | | |

Die Variierte ist somit

$$y^4 + 5y^3 + 6y^2 + 2y - 1 = 0.$$

Ist der Coefficient des ersten Gliedes nicht 1, so ist das Verfahren ganz ähnlich und dem folgenden Beispiele zu entnehmen.

Die Gleichung

$$2x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 3x + 35 = 0$$

soll in eine andere verwandelt werden, deren Wurzeln um 3 größer sind. Hier ist $x = y - 3$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | − 9 | 6 | − 3 | + 35 |
| −3 | 2 | −15 | + 51 | −156 | (+503) |
| | 2 | −21 | +114 | (−498) | |
| | 2 | −27 | (+195) | | |
| | 2 | (−33) | | | |

Die Variierte ist

$$2y^4 - 33y^3 + 195y^2 - 498y + 503 = 0.$$

*2. Vergrößerung und Verkleinerung der Wurzeln durch Multiplication und Division.*

Jede gegebene Gleichung

$$X^n = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

kann in eine andere verwandelt werden, deren Wurzeln das m fache von denen der gegebenen betragen.

Man erhält die transformierte Gleichung, wenn man in der gegebenen $x = \frac{y}{m}$ setzt und dieselbe zur Wegschaffung der Quotienten mit $m^n$ multipliciert.

$$Y^n = y^n + m a_1 y^{n-1} + m^2 a_2 y^{n-2} + \ldots + m^{n-1} a_{n-1} y + m^n a_n = 0.$$

Diese Transformation wird angewendet, um den Coefficienten des ersten Gliedes auf die Einheit zu reducieren oder auftretende gebrochene Coefficienten wegzuschaffen.

Um den Coefficienten des ersten Gliedes in der Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

auf die Einheit zu reducieren, bildet man die Gleichung

$$a_0 y^n + a_0 a_1 y^{n-1} + a_0^2 a_2 y^{n-2} + \ldots + a_0^n a_n = 0$$

oder

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_0 a_2 y^{n-2} + a_0^2 a_3 y^{n-3} + \ldots + a_0^{n-1} a_n = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $a_0$ fache der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung.

**Beispiel:**

Die Gleichung

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

hat die Wurzeln $\frac{1}{2}$, 2 und $-1$, mithin hat die Gleichung

$$y^3 - 3y^2 - 2 \cdot 3y + 2^2 \cdot 2 = 0,$$

oder

$$y^3 - 3y^2 - 6y + 8 = 0$$

die Wurzeln 1, 4, $-2$, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Um in der Gleichung mit gebrochenen Coefficienten

$$x^n + \frac{a_1}{b_1} x^{n-1} + \frac{a_2}{b_2} x^{n-2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} = 0$$

die Nenner der Brüche wegzuschaffen, setze man $x = \frac{y}{m}$, wobei m das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner b bedeutet. Man erhält dann nach Multiplication mit $m^n$

$$y^n + \frac{m a_1}{b_1} y^{n-1} + \frac{m^2 a_2}{b_2} y^{n-2} + \ldots + \frac{m^n a_n}{b_n} = 0,$$

eine Gleichung, deren Coefficienten durchwegs ganze Zahlen sind, und deren Wurzeln das m fache von denen der ursprünglichen Gleichung betragen.

**Beispiel:**

Setzt man in der Gleichung

$$x^3 + \frac{29}{30} x^2 - \frac{11}{15} x + \frac{1}{10} = 0,$$

welche die Wurzeln $\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{5}$ hat, $x = \frac{y}{30}$, so erhält man die Gleichung

$$y^3+\frac{30\,.\,29}{30}y^2-\frac{30^2\,.\,11}{15}y+\frac{30^3}{10}=0,$$

oder

$$y^3+29\,y^2-660\,y+2700=0,$$

deren Wurzeln 10, $-45$ und 6 sind.

Auf diese Art erhält man häufig nicht diejenige Gleichung, welche die möglichst kleinsten Coefficienten hat, denn es genügt vollständig. m nur so groß zu bestimmen, dass die Quotienten

$$\frac{m}{b_1},\ \frac{m^2}{b_2},\ \frac{m^3}{b_3},\ \ldots\ \frac{m^n}{b_n}$$

ganze Zahlen sind.

So genügt beispielsweise, um die Gleichung

$$x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{9}x-216=0$$

in eine andere mit ganzen Coefficienten zu verwandeln, $m=12$ statt $m=36$ und die transformierte Gleichung ist

$$y^3-3\,x^2+20\,x-1=0,$$

deren Wurzeln zwölffache jener der ursprünglichen sind.

Anmerkung: Haben die Coefficienten einer numerischen Gleichung gemeinschaftliche Factoren in irgend welcher Potenz, so kann man unter Umständen die Wurzeln der Gleichung durch Division verkleinern.

So lassen sich beispielsweise die Wurzeln der Gleichung

$$y^3+18\,y^2-180\,y+4536=0,$$

oder

$$y^3+2^2\,.\,3^2\,y^2-2^2\,.\,3^2\,.\,5\,y+2^3\,.\,3^4\,.\,7=0$$

durch die Substitution $y=3\,.\,2\,.\,z=6\,z$ verkleinern, man erhält dann:

$$z^3+\frac{2^2\,.\,3^2}{2\,.\,3}z^2-\frac{2^2\,.\,3^2\,.\,5}{2^2\,.\,3^2}z+\frac{2^3\,.\,3^4\,.\,7}{2^3\,.\,3^3}=0,$$

oder

$$z^3+6\,z^2-5\,z+21=0,$$

eine Gleichung, deren Wurzeln der 6. Theil jener der ursprünglichen Gleichung sind.

### *3. Wegschaffung des zweiten oder eines anderen Gliedes der Gleichung.*

Durch die lineare Variation kann jedes beliebige Zwischenglied der Gleichung weggeschafft, d. h. der Coefficient desselben zu Null gemacht werden.

Zur Wegschaffung des zweiten Gliedes muss die Variation derart bestimmt werden, dass der Coefficient des zweiten Gliedes in der Variierten gleich Null werde.

Ist nun $f(x)=0$ die gegebene Gleichung des $n^{ten}$ Grades und z die nothwendige Variation, so ist der Coefficient des zweiten Gliedes der Variierten (siehe 1)

$$A_1 = \frac{f^{n-1}(z)}{(n-1)!}$$

Da nun dieser Coefficient Null werden soll, so wird die Variation z durch die Gleichung

$$\frac{f^{n-1}(z)}{(n-1)!} = 0,$$

oder was dasselbe ist,

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,z}{(n-1)\,(n-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1} + \frac{a_1\,(n-1)\,(n-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1}{(n-1)\,(n-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1} = 0,$$

also durch

$$n\,z + a_1 = 0$$

bestimmt.

Demzufolge ist $z = -\frac{a_1}{n}$ die erforderliche Variation, durch welche die Wurzeln der Gleichung um $\frac{a_1}{n}$ geändert werden.

**Beispiele:**

1. Aus der Gleichung

$$x^3 + 12\,x^2 - 2\,x + 5 = 0$$

ist das zweite Glied wegzuschaffen.

Hier ist $a_1 = 12$ $n = 3$, mithin die erforderliche Variation $z = -\frac{12}{3} = -4$, also $x = y - 4$ die auszuführende Substitution.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 12 | − 2 | 5 |
| − 4 | 1 | 8 | − 34 | (141) |
| | 1 | 4 | (− 50) | |
| | 1 | (0) | | |

Die reducierte Gleichung lautet sonach

$$x^3 - 50\,x + 141 = 0$$

und ihre Wurzeln sind um 4 größer als jene der gegebenen Gleichung.

2. Um aus der Gleichung

$$x^4 - 8\,x^3 + 3\,x^2 + 4\,x - 1 = 0$$

das zweite Glied wegzuschaffen, hat man, weil $z = -\frac{a_1}{n} = -\frac{-8}{4} = 2$ ist, $x = y + 2$ zu setzen und erhält:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | −8 | 3 | 4 | −1 |
| 2 | 1 | −6 | −9 | −14 | (−29) |
| | 1 | −4 | −17 | (−48) | |
| | 1 | −2 | (−21) | | |
| | 1 | (0) | | | |

$$x^4 - 21x^2 - 48x - 29 = 0$$

als reducierte Gleichung. Die Wurzeln derselben sind um 2 kleiner als jene der gegebenen Gleichung.

Soll irgend ein Zwischenglied der Gleichung, also beispielsweise das $r^{te}$ weggeschafft werden, so muss die Variation z so bestimmt werden, dass der Coefficient des $r^{ten}$ Gliedes der Variierten gleich Null wird.

Der Coefficient dieses Gliedes der Variierten ist aber

$$A_{r-1} = \frac{f^{(n-r+1)}(z)}{(n-r+1)!},$$

mithin gibt die Gleichung

$$\frac{f^{(n-r+1)}(z)}{(n-r+1)!} = 0$$

durch jede ihrer Wurzeln einen für die Transformation geeigneten Wert der Variation z.

Diese Gleichung ist vom $(r-1)^{ten}$ Grade, hat also, wenn r gerade, mindestens eine reale Wurzel. Ist aber r ungerade und hat die Gleichung

$$f^{(n-r+1)}(z) = 0$$

ausschließlich complexe Wurzeln, so kann aus der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ das $r^{te}$ Glied nicht weggeschafft werden, ohne dass unter den Coefficienten der reducierten Gleichung auch complexe Coefficienten auftreten.

Zur Fortschaffung des Absolutgliedes der Gleichung ist deren Auflösung selbst erforderlich.

**Beispiel:**

Aus der Gleichung

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 36x + 12 = 0$$

ist das vierte Glied fortzuschaffen. Die hiezu erforderliche Variation ergibt sich, weil $r = 4$ und $n = 4$ ist, aus der Gleichung $f'(z) = 0$, also aus

$$12\,z^3 + 12\,z^2 + 12\,z - 36 = 0$$

oder

$$z^3 + z^2 + z - 3 = 0.$$

Diese Gleichung hat eine reale Wurzel, nämlich $z = 1$, mithin ist die erforderliche Substitution $x = y + 1$, welche die gewünschte Reduction der Gleichung herbeiführt.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | + 4 | + 6 | − 36 | + 12 |
| 1 | 3 | + 7 | + 13 | − 23 | (− 11) |
| | 3 | + 10 | + 23 | (0) | |
| | 3 | + 13 | (+ 36) | | |
| | 3 | (+ 16) | | | |

Die reducierte Gleichung lautet:

$$3\,x^4 + 16\,x^3 + 36\,x^2 - 11 = 0,$$

und ihre Wurzeln sind um 1 kleiner als jene der gegebenen.

## § 41. Directe Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades.

Es gibt sehr viele Methoden der directen Auflösung algebraischer Gleichungen der ersten vier Grade, welche alle darauf abzielen, eine Function der Coefficienten der Gleichung so zu bestimmen, dass sie der gegebenen Gleichung genügt und alle Wurzeln repräsentiert.

Diese Auflösungsmethoden sind entweder Substitutionsmethoden oder Combinationsmethoden.

Die Substitutionsmethoden bestehen darin, dass man eine geeignete Function der Unbekannten x der Gleichung und einer oder mehrerer anderen Variablen y, z, u, ... also allgemein $F(x, y, z, u, \ldots) = 0$ in die gegebene Function $X^n$ einführt und von dieser so viele neue Gleichungen (Resolventen) $Y = 0$, $Z = 0$, $U = 0, \ldots$ absondert, als neue Variable eingeführt wurden, so, dass die nach der Absonderung erübrigte Gleichung $X_1 = 0$, welche Reducierte heißt, einfacher wird, d. h. leichter aufgelöst werden kann als die ursprünglich gegebene. Jede dieser Methoden setzt die Kenntnis der Substitution voraus und erfordert die Anwendung verschiedener Kunstgriffe.

Die Combinationsmethoden gründen sich auf etwas einfacherem, natürlicherem Verfahren. Sie bestehen darin, dass gewisse einfache Combinationen der noch unbekannten Wurzeln durch neue Variable ersetzt und für diese aus den Coefficienten der ursprünglichen Gleichung $X^n = 0$ eine oder mehrere Hilfsgleichungen (Resolventen) abgeleitet werden, welche von niedrigerem Grade sind als die ursprüngliche Gleichung, also leichter aufgelöst werden können.

Im Folgenden sollen zur allgemeinen Orientierung zwei Substitutionsmethoden und eine Combinationsmethode angedeutet werden.

*1. Auflösung der Gleichungen dritten Grades.*

*a*) Die Cardan'sche Formel.

Jede Gleichung vom dritten Grade hat die Form

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ,$$

und kann durch Wegschaffung des zweiten Gliedes (indem $x = y - \frac{1}{3} a_1$ gesetzt wird) auf die Form

$$y^3 + p y + q = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ,$$

gebracht werden. Die Wurzeln der Variierten, um $\frac{1}{3} a_1$ vermindert, sind Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Setzt man nun

$$y = u + v,$$

wo u und v noch unbestimmte Größen bedeuten, so erhält man

$$y^3 = u^3 + 3 u^2 v + 3 u v^2 + v^3 = 3 u v (u + v) + u^3 + v^3.$$

oder wenn man statt $u + v$ wieder y schreibt:

$$y^3 - 3 u v y - (u^3 + v^3) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma$$

eine Gleichung, welche dieselbe Form hat wie (β und von welcher eine Wurzel, nämlich $y = u + v$ bekannt ist.

Setzt man

$$3 u v = - p; \qquad u^3 + v^3 = - q, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta$$

so werden die Gleichungen (β und (γ identisch, wodurch $u + v$ auch eine Wurzel der Gleichung (β wird.

Aus der ersten der Gleichungen (δ folgt $v = - \frac{p}{3 u}$, welcher Wert, in die zweite substituiert,

$$u^6 + q u^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

gibt. Aus dieser Gleichung folgt

$$u^3 = \frac{- q \pm \sqrt{q^2 + 4 \frac{p^3}{27}}}{2},$$

also

$$u = \sqrt[3]{\frac{- q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4 p^3}{27}}}{2}}.$$

Führt man diesen Wert von u in die zweite der Gleichungen (δ ein, so findet man

$$v = \sqrt[3]{-q \mp \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}.$$

Es ist somit, mit Rücksicht auf die Gleichung $y = u + v$,

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}.$$

Diese unter dem Namen Cardan'sche Formel bekannte Lösung liefert infolge der Dreiwertigkeit der Cubikwurzeln alle drei Wurzeln der Gleichung.

Ist $q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$, so erscheinen alle drei Wurzeln der Gleichung in imaginärer Form. In diesem Falle ist die Formel unbrauchbar, weil jede Gleichung ungeraden Grades mindestens eine reale Wurzel haben muss.

*b*) Methode der falschen Substitution.

Diese Methode verdient besondere Beachtung, weil sie auch auf Gleichungen des 1. 2. und 4. Grades anwendbar ist.

Setzt man in die gegebene Gleichung dritten Grades

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

für die Unbekannte x die Größen y und z, welche keine Wurzeln der Gleichung sind, so wird durch diese Substitutionen die Gleichung nicht befriedigt und es nimmt das Gleichungspolynom von 0 verschiedene Werte $\varphi_1$ und $\varphi_2$ an:

$$a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = \varphi_1$$
$$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = \varphi_2.$$

Man nennt y und z die falschen Substitutionen, die Ausdrücke $x - y$ und $x - z$, in welchen x eine Wurzel der Gleichung bedeutet, die Fehler der Substitionen, $\varphi_1$ und $\varphi_2$ die Fehler der Gleichungen.

Ist man imstande, das Verhältnis u der Fehler der Substitution anzugeben, so sind die Wurzeln der Gleichung bereits bestimmt, denn aus

$$\frac{x - y}{x - z} = u \text{ erhält man } x = \frac{y - zu}{1 - u}.$$

Um u zu bestimmen, kann man in folgender Weise vorgehen: Man substituiert den Wert von x in die gegebene Gleichung und erhält, wenn man nach Potenzen von u ordnet,

$$(a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3) u^3 -$$
$$- [(3 a_0 z^2 + 2 a_1 z + a_2) y + (a_1 z^2 + 2 a_2 z + 3 a_3)] u^2 +$$
$$+ [(3 a_0 y^2 + 2 a_1 y + a_2) z + (a_1 y^2 + 2 a_2 y + 3 a_3)] u -$$
$$- (a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3) = 0,$$

eine Gleichung dritten Grades nach u, welche aber rein cubisch gemacht werden kann, indem man

$$\left.\begin{aligned}(3 a_0 z^2 + 2 a_1 z + a_2) y + (a_1 z^2 + 2 a_2 z + 3 a_3) = 0 \\ (3 a_0 y^2 + 2 a_1 y + a_2) z + (a_1 y^2 + 2 a_2 y + 3 a_3) = 0\end{aligned}\right\}, \quad \ldots (2)$$

setzt, weil die ganz willkürlichen Substitutionen y und z zwei Bedingungsgleichungen unterworfen werden können. Dadurch geht jene Gleichung über in

$$\varphi_2 u^3 - \varphi_1 = 0,$$

aus welcher

$$u = \sqrt[3]{1} \frac{\sqrt[3]{\varphi_1}}{\sqrt[3]{\varphi_2}}$$

resultiert.

Da nun

$$x = \frac{y - z u}{1 - u},$$

so werden die Wurzeln der gegebenen Gleichung durch den Ausdruck

$$x = \frac{z \sqrt[3]{\varphi_1} - y \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{\varphi_2}}{\sqrt[3]{\varphi_1} - \sqrt[3]{1} \sqrt[3]{\varphi_2}} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

dargestellt, vorausgesetzt dass y und z Werte sind, welche den Gleichungen (α genügen.

Die Größen y und z lassen sich leicht als Wurzeln einer quadratischen Gleichung darstellen.

Aus den Gleichungen (α folgt nämlich durch Subtraction und Division des Resultates mit $z - y$ die Gleichung

$$3 a_0 y z + a_1 (y + z) + a_2 = 0.$$

Aus dieser und der ersten Gleichung ($\alpha$ erhält man durch Multiplication mit z und Subtraction

$$a_1\, y\, z + a_2\,(y + z) + 3\, a_3 = 0.$$

Die gefundenen, nach $y\,z$ und $y + z$ linearen Gleichungen ergeben

$$y\,z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & 3\,a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3\,a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{3\,a_1\,a_3 - a_2^{\,2}}{3\,a_0\,a_2 - a_1^{\,2}},$$

$$y + z = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ 3\,a_3 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3\,a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_2^{\,2} - 3\,a_1\,a_3}{3\,a_0\,a_2 - a_1^{\,2}};$$

mithin sind die entsprechenden Werte von y und z Wurzeln der quadratischen Gleichung (siehe § 39, Pkt. 9):

$$(a_1^{\,2} - 3\,a_0\,a_2)\,v^2 + (a_1\,a_2 - 9\,a_0\,a_3)\,v + (a_2^{\,2} - 3\,a_1\,a_3) = 0 \quad \ldots \quad (\gamma$$

Aus der Beziehung

$$\frac{x - y}{x - z} = u = \sqrt[3]{1}\,\frac{\sqrt[3]{\varphi_1}}{\sqrt[3]{\varphi_2}},$$

folgt der Satz: Sind die falschen Substitutionen Wurzeln der quadratischen Gleichung ($\gamma$, so verhalten sich die Fehler der Substitutionen wie die dritten Wurzeln der Fehler der Gleichungen.



*2. Auflösung der Gleichungen vierten Grades.*

Methode von Ley (eine Combinationsmethode).
Um die Gleichung

$$x^4 + a_1\,x^3 + a_2\,x^2 + a_3\,x + a_4 = 0$$

aufzulösen, denke man sich das Biquadrat zerlegt in zwei quadratische Factoren.

$$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1\,x_2 = 0,$$

$$x^2 - (x_3 + x_4)\,x + x_3\,x_4 = 0,$$

in welchen $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ die 4 Wurzeln der gegebenen Gleichung bedeuten.

Die unbekannten Coefficienten der beiden Trinome können auf folgende Art bestimmt werden.

Multipliciert man die Trinome miteinander, so erhält man:

$$\begin{array}{l|l|l} x^4 - (x_1 + x_2)\,x^3 + & x_1\,x_2 & x^2 - x_1\,x_2(x_3 + x_4)\,x + x_1\,x_2\,x_3\,x_4. \\ (x_3 + x_4) & (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) & x_3\,x_4(x_1 + x_2) \\ & x_3\,x_1 & \end{array}$$

Sind also diese Trinome die beiden Factoren des Gleichungspolynoms, so muss ihr Product mit dem Gleichungspolynom identisch sein, es müssen also, wenn man

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = z$$

setzt, die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) &= z \\ (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) &= -a_1 \\ x_1\,x_2 \,.\, x_3\,x_4 &= a_4 \\ x_1\,x_2 + x_3\,x_4 &= a_2 - z. \end{aligned}$$

Die zwei ersten dieser Gleichungen bestimmen $x_1 + x_2$ und $x_3 + x_4$, die zwei letzten $x_1\,x_2$ und $x_3\,x_4$:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{1}{2}(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4z}); \\ x_3 + x_4 &= -\frac{1}{2}(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4z}); \\ x_1\,x_2 &= \frac{1}{2}(a_2 - z + \sqrt{(a_2 - z)^2 - 4a_4}); \\ x_3\,x_4 &= \frac{1}{2}(a_1 - z - \sqrt{(a_2 - z)^2 - 4a_4}). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{I}$$

Sobald nun z bekannt ist, können aus den Gleichungen (α die Wurzeln $x_1$, $x_2$, $x_3$ und $x_4$ gerechnet werden, da die erste und dritte derselben $x_1$ und $x_2$ die beiden anderen $x_3$ und $x_4$ bestimmen.

Zur Berechnung von z hat man nur zu berücksichtigen, dass

$$x_1\,x_2\,(x_3 + x_4) + (x_1 + x_2)\,x_3\,x_4 = -a_3$$

sein muss, woraus nach Einführung der Werte für die Verbindungen der Wurzeln $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, aus (α und Quadrierung eine cubische Gleichung in z

$$(a_1^2 - 4z)\,([a_2 - z]^2 - 4a_4) = (a_1\,[a_2 - e] - z\,a_3)^2.$$

oder

$$z^3 - 2a_2\,z^2 + (a_2^2 + a_1\,a_3 - 4a_4)\,z + (a_1^2\,a_4 - a_1\,a_2\,a_3 + a_3^2) = 0$$

folgt, aus welcher die Werte von z gerechnet werden können.

## § 42. Auflösung numerischer Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade.

*1. Allgemeines über numerische Gleichungen.*

Wie bereits angeführt, lassen Gleichungen von höherem als dem vierten Grade überhaupt keine allgemeine Auflösung zu. Die directen Methoden zur Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades empfehlen sich nicht zur Auflösung numerischer Gleichungen für praktische Zwecke, weil die durch ihre Anwendung gewonnenen, die Wurzeln darstellenden Ausdrücke derart compliciert sind, dass ihre thatsächliche Ausrechnung bei Zahlenaufgaben eine viel Zeit und Mühe erfordernde Arbeit ist, welche sich nicht lohnt, da man in der Praxis die irrationalen Wurzeln doch nur bis auf eine bestimmte Decimalstelle genau in Rechnung stellen kann, und complexe Wurzeln überhaupt nur ein theoretisches Interesse haben. Aus diesem Grunde war man bemüht, Näherungsmethoden zu finden, welche die rasche Berechnung angenäherter, für die Praxis hinreichend genauer Werte der realen Wurzeln numerischer Gleichungen ermöglichen.

Bei den folgenden Untersuchungen sollen die in Zahlenwerten gegebenen Coefficienten einer numerischen Gleichung als rationale ganze Zahlen, und der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten gleich 1 vorausgesetzt werden.

Diese Voraussetzung kann, wenn es sich nur um angenäherte Werte der Wurzeln handelt, immer gemacht werden, weil man die in der Gleichung eventuell vorkommenden irrationalen Zahlen mit beliebiger Genauigkeit durch rationale Brüche ersetzen kann.

Sind aber die Coefficienten rational, so kann die Gleichung durch Anwendung der im § 40 angegebenen Transformationen immer auf die Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

gebracht werden, in welcher alle Coefficienten rationale ganze Zahlen und der Coefficient des ersten Gliedes 1 ist.

Wäre beispielsweise die Gleichung

$$x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 2\sqrt{2}\, x - 2 = 0$$

gegeben, so könnte man zunächst, wenn man sich mit der Genauigkeit auf zwei Decimalstellen begnügt, $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$ setzen und hätte dann die Gleichung

$$x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{6}x - 2 = 0$$

mit durchwegs rationalen Coefficienten, welche nach Multiplication mit 6 in

$$6x^4 - 3x^3 + 9x^2 + 17x - 12 = 0$$

übergeht.

Diese Gleichung kann man nun durch die im § 40, Pkt. 2 angeführte Transformation in

$$y^4 - 4x^3 + 9.6x^2 + 17.6^2x - 12.6^3 = 0$$

oder

$$y^4 - 4x^3 + 54x^2 + 612x - 2592 = 0$$

überführen.

Kennt man die Wurzeln y, so sind auch jene der gegebenen Gleichung bekannt, weil sie ein Sechstel der Wurzeln y betragen.

Sind nun die Coefficienten einer numerischen Gleichung ganze Zahlen und jener des ersten Gliedes 1, so können die realen Wurzeln der Gleichung nur ganze oder irrationale Zahlen, nicht aber rationale Brüche sein.

Denn wäre $x = \frac{p}{q}$ eine Wurzel der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

wo p und q ganze Zahlen bedeuten, welche keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen, so müsste die Gleichung

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{m-1} + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^{m-2} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0$$

oder

$$\frac{p^m}{q} + a_1 p^{m-1} + a_2 p^{m-2} q + \ldots + a_{n-1} p q^{m-2} + a_n q^{m-1} = 0$$

bestehen, welche unsinnig wäre, weil sie ausdrücken würde, dass ein Bruch einer Summe ganzer Zahlen gleich ist.

*2. Grenzen der Wurzeln.*

Bei der Berechnung der realen Wurzeln numerischer Gleichungen ist es besonders wichtig, möglichst enge Grenzen, innerhalb welcher diese Wurzeln liegen, zu bestimmen, um viele unnütze und zeitraubende Substitutionen zu ersparen.

Die kleinste Zahl, welche für x eingesetzt das Gleichungspolynom und alle seine Differentialquotienten positiv macht, ist die obere Grenze der positiven Wurzeln.

Dieser Satz kann wie folgt bewiesen werden.

Transformiert man die Gleichung mittelst der Substitution $x = y + z$, wo z eine noch unbestimmte Zahl bedeutet, in eine andere

$$f(x) = f(y+z) \equiv f(z) + f'(z)\frac{y}{1} + f''(z)\frac{y^2}{1.2} + \ldots f^n(z)\frac{y^n}{n!} = 0$$

und ertheilt der Variation z einen solchen Wert, dass alle Coefficienten $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$ . . . positiv werden, so müssen alle realen Wurzeln y der transformierten Gleichung, d. h. alle Werte von $x - z$, weil sie durchaus positive Glieder hat, negativ werden. Mithin ist z größer als alle Wurzeln x, also die obere Grenze dieser Wurzeln.

Um die Grenze der negativen Wurzeln zu finden, braucht man nur durch Änderung der Vorzeichen der Glieder an geraden Stellen die Gleichung in eine mit entgegengesetzt gleichen Wurzeln zu transformieren und die obere Grenze der positiven Wurzeln derselben zu suchen. Diese mit entgegengesetztem Vorzeichen ist dann die Grenze der negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Die Annahme Null als untere Grenze der positiven sowohl als der negativen Wurzeln ist in der Regel hinreichend.

**Beispiel:**

$$f(x) \equiv x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0,$$

so ist

$$\begin{aligned} f\ (z) &= z^4 + 3z^3 - 7z^2 - 8z + 12, \\ f'\ (z) &= 4z^3 + 9z^2 - 14z - 8, \\ f''\ (z) &= 12z^2 + 18z - 14, \\ f'''(z) &= 24z + 18 \end{aligned}$$

und man findet, dass $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$ und $f'''(z)$ für $z = 2$ positiv werden, mithin ist 2 die obere Grenze der positiven Wurzeln der Gleichung.

Zur Auffindung der unteren Grenze der negativen Wurzeln hätte man analog die obere Grenze der positiven Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$$

zu suchen und würde 5 erhalten. Mithin ist die untere Grenze der negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung $-5$.

Um rasch den Wert zu erhalten, welchen ein Polynom annimmt, wenn man in demselben für die Variable einen bestimmten Wert substituiert, kann man sich des folgenden, für ein Zahlenbeispiel angegebenen Schemas bedienen.

Ist in

$$f(z) = z^4 + 3z^3 - 7z^2 - 8z + 12$$

für z die Zahl 2 zu setzen, so hat man wie folgt zu rechnen:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | — 7 | — 8 | 12 | Coefficienten des Polynoms, die Coefficienten der fehlenden Glieder sind mit 0 anzusetzen |
| (die zu substituierende Zahl) | | 2 . 1 | 2 . 5 | 2 . 3 | 2 . — 2 | |
| | 1 | 5 | 3 | — 2 | 8 | |

und erhält 8 als Substitutionsresultat.

Wäre

$$f(x) = 2z^5 - 9z^4 - 6z^3 + 2z - 33$$

und man hätte hierin $z = 3$ zu setzen, so würde man finden

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | — 9 | — 6 | 0 | + 2 | — 33 |
| 3 | 2 | — 3 | — 15 | — 45 | — 133 | — 432 |

$f(3) = -432.$

Der soeben ausgesprochene und bewiesene Satz kann auch in folgender Weise gedeutet werden:

»Diejenige Variation z, welche die Gleichung in eine mit durchaus positiven Gliedern transformiert, ist die obere Grenze der positiven Wurzeln der Gleichung.«

Aus dieser Deutung folgt ein zur Auffindung der oberen Grenze der positiven Wurzeln gut brauchbares Verfahren.

Man transformiert die Gleichung derart, dass man ihre Wurzeln successive um 1 vermindert, bis man auf eine Gleichung mit durchaus positiven Gliedern kommt. Die Anzahl der erforderlichen Transformationen ist die gesuchte obere Grenze der positiven Wurzeln.

Wendet man dieses Verfahren auf das frühere Beispiel an, so erhält man als transformierte Gleichungen der Reihe nach:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | — 7 | — 8 | 12 | |
| 1 | 1 | 4 | — 3 | — 11 | (1) | |
| | 1 | 5 | 2 | (— 9) | | $y^4 + 7x^3 + 8x^2 - 9x + 1;$ |
| | 1 | 6 | (8) | | | |
| | 1 | (7) | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 7 | 8 | — 9 | 1 | |
| 1 | 1 | 8 | 16 | 7 | (8) | |
| | 1 | 9 | 25 | (32) | | $y^4 + 11x^3 + 35x^2 + 32x + 8.$ |
| | 1 | 10 | (35) | | | |
| | 1 | (11) | | | | |

Die zweite Transformation gibt bereits eine Gleichung mit durchaus positiven Coefficienten, mithin ist 2 die obere Grenze der positiven Wurzeln.

Wendet man dasselbe Verfahren auf die Gleichung mit entgegengesetzt gleichen Wurzeln an, nämlich auf die Gleichung

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0,$$

so erhält man folgende Reihe der transformierten Gleichungen. von welchen nur die Coefficienten angesetzt sind:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + 1 | − 10 | − 11 | + 11 | (1); |
| 1 | + 5 | − 1 | − 24 | − 8 | (2); |
| 1 | + 9 | + 20 | − 7 | − 27 | (3); |
| 1 | + 13 | + 53 | + 64 | − 4 | (4); |
| 1 | + 17 | + 98 | + 213 | + 127 | (5). |

Da erst die fünfte Transformation eine Gleichung mit durchaus positiven Gliedern gibt, so ist 5 die obere Grenze der positiven Wurzeln der transformierten, mithin − 5 die untere Grenze der negativen Wurzeln der ursprünglich gegebenen Gleichung:

$$x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0.$$

Dieser Vorgang zur Berechnung der Grenzen der Wurzeln bietet gewisse Vortheile. Denn die Absolutglieder der transformierten Gleichungen sind Substitutionsresultate der Substitutionen der Zahlen 1, 2, 3, ... in das Gleichungspolynom. (Vergl. Schema der Berechnung des Substitutionsresultates mit jenem der Berechnung der Coefficienten bei der linearen Variation.) Wird also das Absolutglied der $k^{ten}$ Transformation $= 0$, so ist offenbar k eine Wurzel der Gleichung. Ebenso kann man mit Rücksicht auf den ersten im Pkt. 7, § 39 angeführten Satz aus dem Zeichenwechsel der Absolutglieder diejenigen aufeinander folgenden ganzen Zahlen erkennen, zwischen welchen mindestens eine reale Wurzel der Gleichung liegen muss.

So hat die Gleichung im obigen Beispiel eine negative Wurzel, welche zwischen − 1 und − 2, und eine andere, welche zwischen − 4 und − 5 liegt, weil die Gleichung mit entgegengesetzt gleichen Wurzeln mindestens eine positive Wurzel zwischen 1 und 2, eine zweite zwischen 4 und 5 haben muss, da ihr Polynom für $x = 1$ und für $x = 2$ die Werte 11 und − 8, für $x = 4$ und für $x = 5$ die Werte − 4 und + 127 annimmt.

*3. Das Aufsuchen der rationalen Wurzeln.*

Sind die Coefficienten einer numerischen Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

rationale ganze Zahlen und der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten $= 1$, so sind die rationalen Wurzeln derselben auch ganze Zahlen (siehe Pkt. 1 dieses Paragraphen.)

Da nun das Absolutglied $a_n$ der Gleichung das Product aller Wurzeln derselben ist, müssen sich die rationalen Wurzeln unter den Factoren von $a_n$ befinden.

Um also die rationalen Wurzeln der Gleichung zu finden, hat man das Absolutglied derselben in seine einfachen und zusammengesetzten Factoren zu zerlegen und diese, sowohl positiv als negativ genommen, in die Gleichung zu substituieren. Jene, welche die Gleichung befriedigen, sind Wurzeln derselben.

Von der Substitution werden natürlich jene Zahlen ausgeschlossen, welche außerhalb der Grenzen der Wurzeln liegen, weil sie keine Wurzeln sein können.

**Beispiel:**

Bei der Gleichung

$$x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 102x + 90 = 0,$$

sind 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 18, 30, 45, 90 Factoren des Absolutgliedes. Als obere Grenzen der positiven und negativen Wurzeln findet man $+7$ und $-3$, mithin sind von den Factoren nur 1, 2 und 3 mit beiden Vorzeichen und 5 und 6 mit positiven Vorzeichen zu versuchen.

Die Resultate der Substitution erhält man am einfachsten nach der im vorigen Punkte angegebenen Methode, wobei man, um Zeit zu ersparen, die Coefficienten der Gleichung nur einmal anschreibt und sich die Zwischenzeilen bei der Rechnung wegdenkt.

Man erhält:

| | 1 | − 8 | − 9 | + 102 | + 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| + 1 | 1 | − 7 | − 16 | + 86 | + 176 |
| − 1 | 1 | − 9 | 0 | 102 | − 12 |
| + 2 | 1 | − 6 | − 21 | + 60 | + 210 |
| − 2 | 1 | − 10 | 11 | + 80 | − 70 |
| + 3 | 1 | − 5 | − 24 | + 30 | 180 |
| − 3 | 1 | − 11 | + 24 | 30 | 0 |
| + 5 | 1 | − 3 | − 24 | − 18 | 0 |
| + 6 | 1 | − 2 | − 21 | − 24 | + 54 |

Nur 5 und $-3$ machen das Gleichungspolynom zu Null, mithin sind nur $+5$ und $-3$ Wurzeln der Gleichung.

Dividiert man nun durch $(x-5)(x-3)$, so erhält man eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln die zwei noch unbekannten Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Diese Division gibt:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-8$ | $-9$ | $+102$ | $+90$ |
| 5 | 1 | $-3$ | $-24$ | $-18$ | 0 |
| $-3$ | 1 | $-6$ | $-6$ | 0 | |

$$x^2 - 6x - 6 = 0,$$

woraus $x = 3 \pm \sqrt{15}$ folgt.

Die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung sind somit:

$$x_1 = 5; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = 3 + \sqrt{15}; \quad x_4 = 3 - \sqrt{15}$$

**Anmerkung:** Hat das Absolutglied der Gleichung viele Factoren, so wird es sich empfehlen, um überflüssige Versuche zu vermeiden, in folgender Weise solche Factoren im voraus auszuscheiden, welche keine Wurzeln sein können.

In die Gleichung $f(x) = 0$ substituiere man $+1$ und $-1$. Die Substitutionsresultate $f(+1)$ und $f(-1)$ sind die Absolutglieder der Gleichungen, deren Wurzeln um 1 kleiner, beziehungsweise 1 größer sind, als die Wurzeln der gegebenen Gleichung. Mithin können von den innerhalb der Wurzelgrenzen gelegenen Factoren des Absolutgliedes nur jene Wurzeln der Gleichung sein, welche, wenn sie positiv genommen werden, um 1 vermindert in $f(+1)$ und um 1 vermehrt in $f(-1)$ ohne Rest enthalten sind; und wenn sie negativ genommen werden sollen, um 1 vermehrt in $f(+1)$ und um 1 vermindert in $f(-1)$ ohne Rest enthalten sind.

Factoren, welche dieser Bedingung nicht entsprechen, sind nicht zu berücksichtigen, da sie keine Wurzeln sein können.

Im obigen Beispiele würden durch diese Untersuchung die Zahlen $-2$, $-5$ und 6 vom Versuche ausgeschieden werden.

Denn es ist $f(+1) = 176 \quad |f(-1)| = 12$ und es sind die Quotienten $\frac{176}{2+1}$, $\frac{176}{5+1}$, $\frac{176}{6-1}$, $\frac{176}{6+1}$ keine ganzen Zahlen

Die Versuche mit $+2$ und $+3$ müssten aber gemacht werden, weil $\frac{176}{2-1}$ und $\frac{12}{2+1}$, ferner $\frac{176}{3-1}$ und $\frac{12}{3+1}$ ganze Zahlen sind.

Sind die rationalen Wurzeln der Gleichung gefunden, so dividiert man das Gleichungspolynom durch das Product aller diesen Wurzeln entsprechenden Binomialfactoren (wie dies im Beispiel ausgeführt wurde) und erhält eine Gleichung niedereren Grades, welche nur mehr irrationale und complexe Wurzeln besitzt.

### *4. Das Aufsuchen der irrationalen Wurzeln.*

Zur Berechnung der irrationalen Wurzeln ist es zunächst nothwendig, diejenigen Stellen der Zahlenreihe aufzufinden, an welchen sie liegen, d. h. für jede dieser Wurzeln zwei möglichst wenig von einander verschiedene rationale Zahlen so zu bestimmen, dass eine derselben kleiner, die andere größer ist als die betreffende Wurzel der Gleichung.

Das einfachste Mittel, um diese Stellen der Zahlenreihe aufzusuchen, d. h. engere Grenzen der einzelnen Wurzeln zu bestimmen. bietet der im Pkt. 7, § 39 bewiesene Satz, welcher für die Anwendung auch wie folgt ausgesprochen werden kann:

Sind p und q zwei Zahlen, welche, in das Gleichungspolynom substituiert, entgegengesetzt bezeichnete Substitutionsresultate liefern, so liegt zwischen p und q mindestens eine reale Wurzel der Gleichung.

Setzt man nämlich in das Gleichungspolynom der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2, 3 .. $z_1$ [$z_1$ obere Grenze der positiven Wurzeln, und ebenso 0, $-1$, $-2$, $-3$, $- \ldots -z_2$ [$-z_2$ untere Grenze der negativen Wurzeln], so liegt zwischen irgend zwei aufeinander folgenden dieser Zahlen mindestens eine reale Wurzel der Gleichung, wenn die denselben entsprechenden Substitutionsresultate entgegengesetzt bezeichnet sind.

So sind beispielsweise die äußersten Grenzen der Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - 15x^2 + 20x - 3 = 0$$

$z_1 = 3$, $z_2 = -5$.

Substituiert man in die Gleichung für x nacheinander 1, 2. 3 (das Resultat der Substitution 0 ist $-3$), so erhält man:

| | 1 | 0 | $-15$ | 20 | $-3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $+1$ | $-14$ | $+6$ | $+3$ |
| 2 | 1 | $+2$ | $-11$ | $-2$ | $-7$ |
| 3 | 1 | $+3$ | $-6$ | $+2$ | $+3$ |

(Die unterstrichenen Zahlen sind die entsprechenden Substitutionsresultate.)

Es liegt also zwischen 0 und 1, 1 und 2, 2 und 3 mindestens je eine positive Wurzel der Gleichung.

Die Substitutionen von $-1$, $-2$, $-3$, $-4$, $-5$ in die Gleichung geben:

| | 1 | 0 | — 15 | + 20 | — 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| — 1 | 1 | — 1 | — 14 | + 34 | — 37 |
| — 2 | 1 | — 2 | — 11 | + 42 | — 87 |
| — 3 | 1 | — 3 | — 6 | + 38 | — 117 |
| — 4 | 1 | — 4 | + 1 | + 16 | — 67 |
| — 5 | 1 | — 5 | + 10 | — 30 | + 147, |

mithin liegt zwischen — 4 und — 5 auch mindestens eine reale Wurzel der Gleichung.

Da nun die Gleichung als Gleichung vierten Grades nur vier Wurzeln besitzt, so sind alle ihrer Lage nach bestimmt, sie liegen, und zwar je eine zwischen 0 und 1, 1 und 2, 2 und 3, — 4 und — 5.

Hat man die Grenzen der einzelnen Wurzeln bestimmt, so kann man durch fortgesetzte Substitution von Zwischenwerten dieselben beliebig nahe aneinander rücken und dadurch den Wert der Wurzel beliebig genau bestimmen.

Als Beispiel hiezu soll die zwischen 1 und 2 liegende Wurzel der obigen Gleichung auf zwei Decimalstellen genau berechnet werden.

Setzt man in die Gleichung $x = 1{\cdot}5$, so erhält man:

| | 1 | 0 | — 15 | + 20 | — 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1·5 | 1 | 1·5 | — 12·75 | + 0·875 | — 1·6875, |

ein negatives Substitutionsresultat, was darauf hinweist, dass die Wurzel zwischen 1 und 1·5 liegt, weil das Substitutionsresultat für $x = 1$ positiv war.

Um die Grenzen noch näher aneinander zu rücken, muss man also einen zwischen 1 und 1·5 liegenden Wert, beispielsweise 1·3 substituieren u. s. w.

| | 1 | 0 | — 15 | 20 | — 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1·3 | 1 | 1·3 | — 13·31 | 2·697 | + 0·5061 |
| 1·4 | 1 | 1·4 | — 13·04 | 1·744 | — 0·5584 |
| 1·35 | 1 | 1·35 | — 13·1775 | 2·210375 | — 0·01599375 |
| 1·34 | 1 | 1·34 | — 13·2044 | 2·306104 | + 0·09017936. |

Der Wert der Wurzel liegt also zwischen 1·34 und 1·35, ist somit auf zwei Decimalstellen genau 1·34.

Erkennt man durch das hier angegebene Verfahren nur die Lage einer Anzahl von Wurzeln, die geringer ist als jene, welche der Gleichung zufolge ihres Grades zukommt, so darf man sich nicht sofo

zu der Annahme verleiten lassen, dass alle nicht aufgefundenen Wurzeln, wenn ihre Anzahl gerade ist, complex sein müssen; denn es können zwischen zwei Zahlenwerten p und q, welche gleich bezeichnete Substitutionsresultate liefern, reale Wurzeln in gerader Anzahl und zwischen zwei Zahlenwerten, welche ungleich bezeichnete Substitutionsresultate geben, auch mehrere reale Wurzeln in ungerader Anzahl liegen.

In solchen Fällen müsste man, wenn nicht fehlende Glieder dafür sprechen, dass die Gleichung mindestens so viele complexe Wurzeln hat, als nicht aufgefunden wurden (Pkt. 10, § 39), etwa um 0·1, und falls auch dies nicht hinreichen sollte, um 0·01 verschiedene Werte für x in die Gleichung substituieren und auf diese Art die Wurzeln zu trennen versuchen.

Liegen die Wurzeln sehr nahe aneinander, so wird diese Rechnung, selbst wenn der Sturm'sche Lehrsatz angewendet wird, welcher etwas einfacher und sicherer zum Ziele führt, sehr mühsam und zeitraubend.

Da aber dieser Fall und jener mehrfacher Wurzeln in der Praxis äußerst selten vorkommt, so wird darauf nicht weiter eingegangen.

## § 43. Näherungsmethoden zur Berechnung der irrationalen Wurzeln.

Durch das im vorigen Punkte angegebene Verfahren kann man jede irrationale Wurzel der Gleichung zwischen zwei nahe aneinander liegende Grenzen einschließen, von welchen jede als angenäherter Wert der Wurzel angesehen werden kann.

Die Näherungsmethoden haben den Zweck, die engere Einschließung, oder was dasselbe ist, die genauere Ermittlung des Wurzelwertes zu vereinfachen und zu beschleunigen.

Die gebräuchlichsten und einfachsten derselben sollen im folgenden unter der Voraussetzung, dass die zu berechnende Wurzel positiv sei, entwickelt werden, weil die Berechnung der negativen Wurzeln stets auf die Berechnung von positiven Wurzeln der Gleichung mit entgegengesetzt gleichen Wurzeln zurückgeführt werden kann.

### *1. Näherungsmethode von Newton.*

Ist a ein hinreichend angenäherter Wert einer Wurzel der Gleichung

$$f(x) = 0,$$

so ist $x = a + y$ der genaue Wert derselben, wenn y den Unterschied zwischen diesem und dem angenäherten Wert der Wurzel bedeutet. Dieser Unterschied soll in der Folge kurz Fehler der Substitution genannt werden.

Da nun $a + y$ eine Wurzel der Gleichung ist, hat man

$$f(y + a) = 0$$

oder, wenn man die Function nach steigenden Potenzen von y entwickelt:

$$f(a) + yf'(a) + \frac{y^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{y^n}{n!}f^{(n)}(a) = 0.$$

Ist nun a ein hinreichend angenäherter Wert der Wurzel, so ist der Fehler y der Substitution eine kleine Größe. Man kann daher, wenn es sich nur um angenäherte Bestimmung von y handelt, in der letzten Gleichung die Glieder, welche höhere Potenzen von y enthalten, vernachlässigen und erhält:

$$f(a) + yf'(a) = 0,$$

woraus

$$y = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

folgt. Demnach ist

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a_1$$

ein genauerer Wert der gesuchten Wurzel als der zuerst angenommene a.

Betrachtet man nun diesen Wert $a_1$ als neuen Näherungswert und setzt $x = a_1 + z$, wobei z wieder den Fehler der Substitution repräsentiert, so kann man durch Wiederholung dieses Verfahrens einen noch genaueren Wert der Wurzel

$$x = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

erhalten u. s. w.

Hat man die Wurzel zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, deren Unterschied nur 0·1 beträgt, und nimmt für die erste Annäherung a das arithmetische Mittel derselben, so wird der erste nach dieser Methode berechnete Annäherungswert im allgemeinen schon in der 2. oder 3. Decimalstelle, der zweite in der 4. und 5., der dritte in der 9. und 10. Decimalstelle stimmen. Meistens wird die Annäher

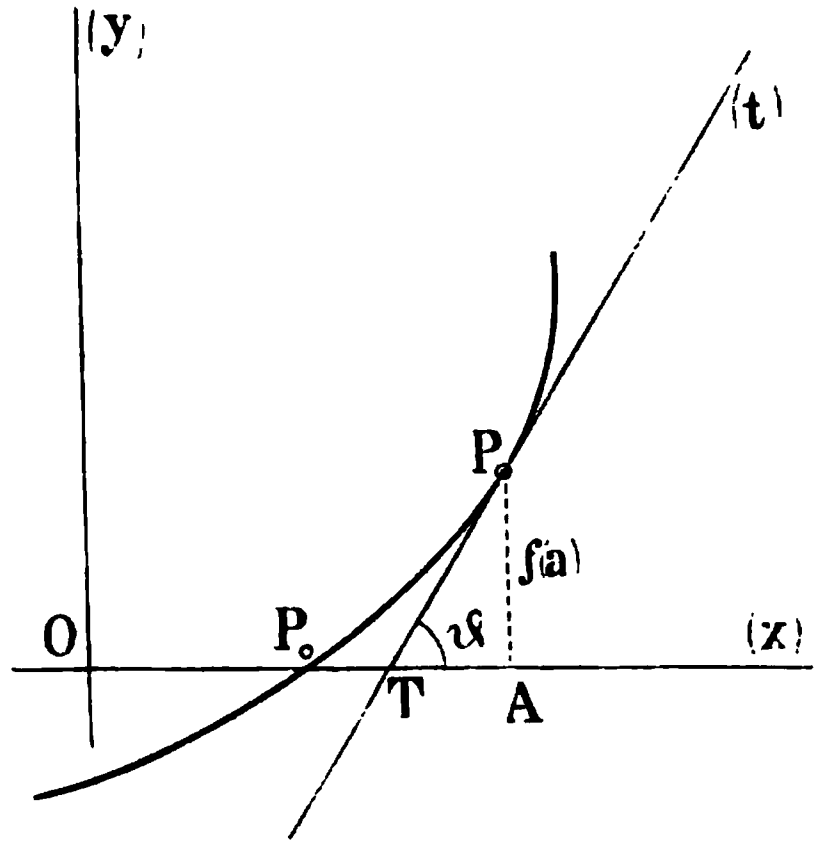
noch besser sein, und zwar insbesondere dann, wenn $f'(a)$ bedeutend größer ist, wie $f(a)$.

In einzelnen Fällen (sehr selten) kann es vorkommen, dass man sich durch die Anwendung dieser Methode vom wirklichen Werte der Wurzel statt sich zu nähern, immer mehr und mehr entfernt. Man kann sich aber jederzeit von dem Grade der erreichten Annäherung überzeugen. Soll nämlich der gefundene Wert der Wurzel noch in der $k^{ten}$ Decimalstelle stimmen, so muss man entgegengesetzt bezeichnete Substitutionsresultate erhalten, wenn man in das Gleichungspolynom den gefundenen Wurzelwert und den um die Einheit in der $k^{ten}$ Decimalstelle erhöhten substituiert.

Geometrisch kann diese Methode wie folgt gedeutet werden:

Trägt man die Werte der Variablen x als Abscissen, die ihnen entsprechenden Functionswerte $f(x)$ (Werte, welche das Gleichungspolynom annimmt) als Ordinaten auf, so erhält man eine Curve. Die Abscissen der Schnittpunkte dieser Curve mit der x-Axe entsprechen den Wurzeln der Gleichung, weil für dieselben $f(x) = 0$ wird.

Fig. 7.




Ist nun $OP_0 = x$ (Fig. 7) eine Wurzel der Gleichung und $OA = a$ ein angenäherter Wert derselben, so entspricht den Coordinaten a und $f(a) = AP$ ein in der Nähe von $P_0$ gelegener Punkt P der Curve. Führt man in diesem Punkte P eine Tangente (t) an die Curve, so schließt diese mit der x-Axe einen Winkel $\vartheta$ ein, dessen trigonometrische Tangente zufolge der Gleichg. (2 durch

$$\operatorname{tang} \vartheta = f'(a)$$

bestimmt ist. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke TPA findet man

$$\frac{AP}{TA} = \operatorname{tang} \vartheta,$$

mithin

$$\overline{TA} = \frac{\overline{AP}}{\operatorname{tang} \vartheta} = \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Die Methode von Newton gibt als genaueren Wert der Wurzel

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = \overline{OA} - \overline{TA} = \overline{OT},$$

also statt der Abscisse des Schnittpunktes $P_0$ der Curve mit der x-Axe die Abscisse des Schnittpunktes T der Tangente im Punkte P mit dieser Axe.

Es ist leicht einzusehen, dass bei gewissem Lauf der Curve und zu großem oder zu kleinem a der Punkt T weiter von $P_0$ entfernt sein kann als A.

**Beispiel:**

Es ist der Wert der zwischen 1·3 und 1·4 liegenden Wurzel der Gleichung

$$f(x) = x^4 - 15x^2 + 20x - 3 = 0$$

genauer zu berechnen (Beispiel im § 42, Pkt. 4).

Im gegebenen Falle ist $a = 1{\cdot}35$

$$f(x) = x^4 - 15x^2 + 20x - 3,$$
$$f'(x) = 4x^3 - 30x + 20,$$

mithin

| | 1 | 0 | − 15 | + 20 | − 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1·35 | 1 | 1·35 | − 13·1775 | 2·210375 | − 0·01599375 |

| | 4 | 0 | − 30 | + 20 |
|---|---|---|---|---|
| 1·35 | 4 | 5·40 | − 22·71 | − 10·6585 |

$$f(a) = -\ 0{\cdot}01599375,$$
$$f'(a) = -\ 10{\cdot}6585,$$
$$\frac{f(a)}{f'(a)} = 0{\cdot}0015.$$

Man findet also als nächste Annäherung an die Wurzel

$$x = 1{\cdot}35 - 0{\cdot}0015 = 1{\cdot}3485,$$

einen Wert, welcher noch in der 3. Decimalstelle richtig ist. Setzt man nämlich in das Gleichungspolynom einmal $x = 1{\cdot}348$, das anderemal 1·349, so erhält man verschieden bezeichnete Substitutionsresultate.

Setzt man nun $a_1 = 1{\cdot}3485$, so erhält man

$$f(a_1) = -\ 0{\cdot}00001516, \quad f'(a_1) = -\ 10{\cdot}64626856,$$
$$\frac{f(a)}{f'(a)} = 0{\cdot}000001425,$$

also

$$x = 1{\cdot}3485 - 0{\cdot}000001425 = 1{\cdot}348498575.$$

Dieser Wert der Wurzel ist noch in der 8. Decimalstelle richtig.

*2. Regula falsi.*

Sind $a_1$ und $a_2$ die nahe aneinander liegenden Grenzen einer Wurzel x der Gleichung

$$f(x) = 0,$$

so sind die Fehler der Substitutionen

$$z_1 = x - a_1 \quad \text{und} \quad z_2 = x - a_2.$$

Setzt man nun in die Gleichung für x einmal den We
$a_1 = x - z_1$ und das anderemal $a_2 = x - z_2$, so wird dieselbe dr

keine dieser Substitutionen befriedigt und das Gleichungspolynom nimmt beidemale einen von Null verschiedenen Wert an. Diese Werte $f(a_1) = \varphi_1$ und $f(a_2) = \varphi_2$ sollen **Fehler der Gleichung** genannt werden.

Zwischen den Fehlern der Gleichungen und den Fehlern der Substitutionen bestehen die Beziehungen

$$\varphi_1 = f(a_1) = f(x - z_1) = f(x) - z_1 f'(x) + \frac{z_1^2}{2!} f''(x) + \ldots \pm \frac{z_1^m}{m!} f^{(m)}(x$$

$$\varphi_2 = f(a_2) = f(x - z_2) = f(x) - z_2 f'(x) + \frac{z_2^2}{2!} f''(x) + \ldots \pm \frac{z_2^m}{m!} f^{(m)}(x$$

Wenn man die Glieder, welche höhere Potenzen von z enthalten. mit Rücksicht darauf vernachlässigt, dass $a_1$ und $a_2$ angenäherte Werte der Wurzel, also die Fehler $z_1$ und $z_2$ der Substitutionen kleine Größen sind, und bedenkt. dass $f(x) = 0$ ist, gehen diese Gleichungen in

$$f(a_1) = -z_1 f'(x),$$
$$f(a_2) = -z_2 f'(x)$$

über, so dass nun durch Division

$$\frac{f(a_1)}{f(a_2)} = \frac{z_1}{z_2},$$

also die Regel folgt:

**Die Fehler der Gleichungen verhalten sich zueinander wie die Fehler der Substitutionen.**

Diese Regel ist natürlich nur näherungsweise richtig und umso richtiger je kleiner die Fehler der Substitutionen sind.

Aus der Gleichung

$$\frac{f(a_1)}{f(a_2)} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x - a_1}{x - a_2}$$

findet man als genaueren Wert der Wurzel

$$x = \frac{a_2 f(a_1) - a_1 f(a_2)}{f(a_1) - f(a_2)}$$

oder

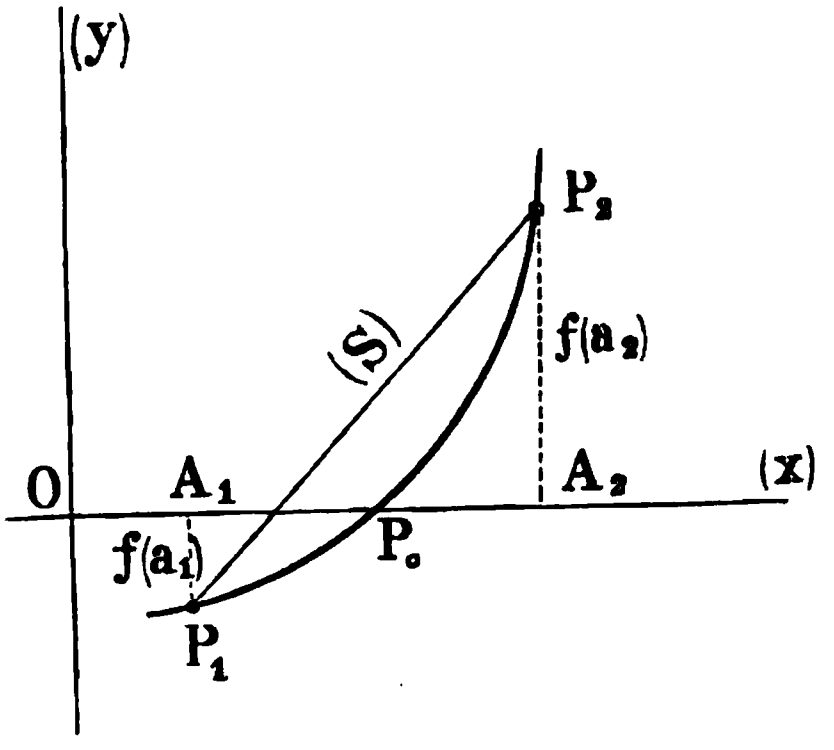
$$x = a_1 + \frac{(a_2 - a_1) f(a_1)}{f(a_1) - f(a_2)}.$$

Aus dem so erhaltenen in Verbindung mit einem der ursprünglichen Näherungswerte kann man durch Wiederholung des Verfahrens einen noch genaueren Wert der Wurzel finden u. s. w.

Geometrisch hat diese Methode folgenden Sinn:

Die Curve, welche erhalten wird, wenn man die Werte des x als Abscissen, die zugehörigen Functionswerte $f(x)$ als Ordinaten aufträgt, schneidet die x-Axe in Punkten, deren Abscissen Wurzeln der Gleichung sind.

Fig. 8.




Den Abscissen $a_1$ und $a_2$ (Fig. 8), welche angenäherte Werte der Wurzel $x = OP_0$ repräsentieren, entsprechen die Ordinaten $f(a_1) = A_1P_1$; $f(a_2) = A_2P_2$, also die Punkte der Curve $P_1$ und $P_2$. Verbindet man diese Punkte durch eine Gerade, so hat diese die Gleichung (I. Band, III Theil):

$$\begin{vmatrix} a_2 & f(a_2) & 1 \\ a_1 & f(a_1) & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Abscisse des Schnittpunktes dieser Geraden mit der x-Axe wird erhalten, wenn man in ihrer Gleichung $y = 0$ setzt, ist also gegeben durch

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ a_1 & f(a_1) & 1 \\ a_2 & f(a_2) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

woraus

$$x \begin{vmatrix} f(a_1) & 1 \\ f(a_2) & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & f(a_1) \\ a_2 & f(a_2) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$x = \frac{a_2 f(a_1) - a_1 f(a_2)}{f(a_1) - f(a_2)}$$

resultiert.

Die Regula falsi gibt somit statt der gesuchten Abscisse des Punktes $P_0$ (Wurzel der Gleichung) die Abscisse des Schnittpunktes der Sehne S mit der x-Axe.

## Beispiel:

Es ist der Wert der zwischen $-1$ und $-2$ liegenden Wurzel der Gleichung

$$x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$$

zu berechnen. (Beispiel zu Pkt. 2, § 42).

Zur Lösung dieser Aufgabe rechnet man die zwischen 1 und 2 liegende positive Wurzel der Gleichung

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0.$$

Man hat zunächst

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad f(a_1) = 11, \quad f(a_2) = -8,$$

mithin als erste Annäherung

$$x = a_1 + \frac{(a_2 - a_1) f(a_1)}{f(a_1) - f(a_2)} = 1 + 0{\cdot}5789 = 1{\cdot}5789 \sim 1{\cdot}6.$$

Setzt man nun:

$$a_1 = 1{\cdot}6, \quad a_2 = 2,$$

also

$$f(a_1) = 1{\cdot}1456, \quad f(a_2) = -8,$$

so findet man als bessere Annäherung

$$x = 1{\cdot}65.$$

Um einen noch genaueren Wert zu erhalten, hätte man zu setzen:

$$a_1 = 1{\cdot}65, \quad a_2 = 2,$$

also

$$f(a_1) = 0\,078 \quad f'(a_2) = -8,$$

und würde erhalten

$$x = 1{\cdot}65337$$

u. s. w.

Diese Methode ist wegen ihrer Einfachheit für die Praxis von großem Werte und kann auch zur Auflösung transcendenter Gleichungen benützt werden, weil auch jede transcendente Function nach der Taylor'schen Reihe entwickelt, also jede Gleichung in der für diese Methode charakteristischen Form dargestellt werden kann.

**Beispiel:**

Es ist die Wurzel der Gleichung

$$x^x - 7 = 0$$

aufzusuchen.

Man findet mit Hilfe der Logarithmentafeln, dass der Wert von x zwischen 2 und 2·5 liegen muss.

Setzt man also:

$$a_1 = 2 \qquad f(a_1) = -3,$$
$$a_2 = 2{\cdot}5 \qquad f(a_2) = 2{\cdot}8821,$$

so erhält man:

$$x = 2{\cdot}25.$$

Ferner für:

$$a_1 = 2{\cdot}2 \qquad f(a_1) = -\,1{\cdot}3334,$$
$$a_2 = 2{\cdot}5 \qquad f(a_2) = 2{\cdot}8821,$$
$$x = 2{\cdot}295;$$

$$a_1 = 2{\cdot}295 \qquad f(a_1) = -\,0{\cdot}2703,$$
$$a_2 = 2{\cdot}5 \qquad f(a_2) = 2{\cdot}8821,$$
$$x = 2{\cdot}312;$$

$$a_1 = 2{\cdot}312 \qquad f(a_1) = -\,0{\cdot}0572,$$
$$a_2 = 2{\cdot}5 \qquad f(a_2) = 2{\cdot}8821,$$
$$x = 2{\cdot}3156;$$

$$a_1 = 2{\cdot}3156 \qquad f(a_1) = -\,0{\cdot}0111,$$
$$a_2 = 2{\cdot}5 \qquad f(a_2) = 0{\cdot}8821,$$
$$x = 2{\cdot}3163;$$

$$a_1 = 2{\cdot}3163 \qquad f(a_1) = -\,0{\cdot}002,$$
$$a_2 = 2{\cdot}5 \qquad f(a_2) = 2{\cdot}8821,$$
$$x = 2{\cdot}31643$$

u. s. w.

Der letzte Wert von x ist schon ziemlich genau, weil sich durch seine Substitution $-\,0{\cdot}00032$ ergibt.

### 3. *Horners Methode.*

Ist

$$x = w_0 + \frac{w_1}{10} + \frac{w_2}{100} + \frac{w_3}{1000} + \cdots$$

eine Wurzel der Gleichung

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

und man transformiert die Gleichung durch lineare Variation derart, dass man die Wurzeln derselben um $w_0 + \frac{w_1}{10}$ vermindert, so hat die variierte Gleichung

$$b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + b_2 y^{m-2} + \ldots + b_{m-1} y + b_m = 0$$

unbedingt eine Wurzel

$$y = \frac{w_2}{100} + \frac{w_3}{1000} + \cdots$$

Auf dieser Thatsache basiert die von Horner herrührende Methode zur näherungsweisen Berechnung der irrationalen Wurzeln von algebraischen, numerischen Gleichungen.

Ist $w_0 + \frac{w_1}{10}$ ein auf die erste Decimalstelle genauer Wert der Wurzel, also die untere der zwei um 0·1 verschiedenen Grenzen der Wurzel, so transformiert man die Gleichung in eine andere,

$$b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + \ldots + b_{n-1} y + b_n = 0,$$

deren Wurzeln um $w_0 + \frac{w}{10}$ kleiner sind. Die transformierte Gleichung hat nun unbedingt eine Wurzel $y = \frac{w_2}{100} + \frac{w_3}{1000} + \frac{w_4}{10000} + \ldots$ (aber auch nur eine solche, wenn, was stets vorausgesetzt wird, alle realen Wurzeln voneinander getrennt wurden).

Da nun diese Wurzel kleiner ist als $\frac{1}{10}$, so wird man einen angenäherten Wert derselben $\frac{w_2}{100}$ erhalten, wenn man in der Gleichung alle höheren Potenzen des y vernachlässigt.

Auf diese Weise erhält man

$$b_{m-1} y + b_n = 0,$$

woraus

$$y = \frac{w_2}{100} = -\frac{b_n}{b_{m-1}}$$

folgt.

Man findet also die nächste auf $w_1$ folgende Decimalstelle der Wurzel, wenn man das Absolutglied der transformierten Gleichung durch den vorletzten Coefficienten dividiert und nur die erste von 0 verschiedene Decimalstelle dieses Quotienten sucht.

Vermindert man nun die Wurzeln der Gleichung in y um $\frac{w_2}{100}$, so besitzt die Variierte

$$b'_0 z^n + b'_1 z^{n-1} + \ldots + b'_{n-1} z + b'_n = 0$$

unbedingt eine Wurzel $z = \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \ldots$, welche kleiner ist als $\frac{1}{100}$. Einen angenäherten Wert derselben findet man analog aus

$$b'_{n-1} z + b'_n = 0,$$

$$z = \frac{w_3}{1000} = -\frac{b'_n}{b'_{n-1}}$$ (nur die erste von 0 verschiedene Decimalstelle zu rechnen)

und dieser ist die dritte Decimalstelle der Wurzel der gegebenen Gleichung u. s. w.

**Anmerkung**: Diese Methode hat für die Praxis den größten Wert, weil sie mit Sicherheit die Berechnung der Wurzeln bis zu beliebig vielen richtigen Decimalstellen gestattet.

Sollte sich, was zu Beginn der Rechnung möglich ist, wegen der vernachlässigten Glieder eine oder die andere Decimalstelle zu groß oder zu klein ergeben, so kann dies bei der Berechnung der nächstfolgenden gleich constatiert und corrigiert werden. Wäre nämlich eine Decimalstelle zu klein, so würde sich bei der Berechnung der folgenden ein größerer Wert als 9 ergeben. In diesem Falle hätte man die als zu klein erkannte Decimalstelle um 1 zu erhöhen und die Operation zu wiederholen. Wäre eine Decimalstelle zu groß, so müsste in der folgenden transformierten Gleichung das Absolutglied sein Vorzeichen ändern.

Die Art der Anwendung dieser Methode soll an dem bereits zum Theil gerechneten Beispiel (§ 42, Pkt. 4)

$$x^4 - 15x^2 + 20x - 3 = 0$$

erläutert werden.

Die gegebene Gleichung hat drei positive und eine negative Wurzel. Die positiven liegen zwischen 0 und 1, 1 und 2, 2 und 3, und es soll zunächst die zwischen 0 und 1 liegende bis zur 5. Decimalstelle genau gerechnet werden.

Man findet leicht, dass diese Wurzel zwischen 0·1 und 0·2 liegen muss, denn es ist das Resultat der Substitution von 0·2 positiv, jenes von 0·1 negativ, was dem folgenden Schema entnommen werden kann.

| | 1 | 0 | − 15 | 20 | − 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0·2 | 1 | 0·2 | − 14·96 | 17·008 | + 0·4016 |
| 0·1 | 1 | 0·1 | − 14·99 | 18·501 | − 1·1499 |

Hier ist also

$$x = 0{\cdot}1 = a_0 + \frac{a_1}{10}$$

ein angenäherter Wert der Wurzel. Vermindert man die Wurzeln der Gleichung um 0·1, so erhält man:

| | 1 | 0 | — 15 | 20 | — 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0·1 | 1 | 0·1 | — 14·99 | 18·501 | (— 1·1499) |
| | 1 | 0·2 | — 14·97 | (17·004) | |
| | 1 | 0·3 | (— 14·94) | | |
| | 1 | (0·4) | | | |

die erste transformierte Gleichung

$$x^4 + 0{\cdot}4\,x^3 - 14{\cdot}94\,x^2 + 17{\cdot}004\,x - 1{\cdot}1499 = 0,$$

aus welcher

$$\frac{a_2}{100} = \frac{1{\cdot}1499}{17{\cdot}004} = 0{\cdot}06$$

folgt. Somit ist

$$x = 0{\cdot}16\ldots$$

Vermindert man die Wurzeln der letzten Gleichung um 0·06, so findet man die beiden unterstrichenen Zahlen als Coefficienten des letzten und vorletzten Gliedes der transformierten Gleichung:

| | 1 | 0·4 | — 14·94 | 17·004 | — 1·1499 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0·06 | 1 | 0·46 | — 14·9124 | 16·109256 | (— 0·18334464) |
| | 1 | 0·52 | — 14·8812 | (15·216384) | |

Der Quotient derselben $\frac{0{\cdot}18334464}{15{\cdot}216384}$ ist größer als 0·009, was darauf hinweist, dass die zweite Decimalstelle des Wurzelwertes zu klein gefunden wurde. Man hat demnach diese mit 0·07, also $x = 0{\cdot}17$ zu setzen.

Vermindert man nun die Wurzeln der letzten Gleichung um 0·07. so erhält man

| | 1 | 0·4 | — 14·94 | 17·004 | — 1·1499 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0·07 | 1 | 0·47 | — 14·9071 | 15·96050 | (— 0·03266) |
| | 1 | 0·54 | — 14·8693 | (14·91965) | |
| | 1 | 0·61 | (— 14·8266) | | |
| | 1 | (0·68) | | | |

als zweite transformierte Gleichung:

$$x^4 + 0{\cdot}68\,x^3 - 14{\cdot}8266\,x^3 + 14{\cdot}91965\,x - 0{\cdot}03266 = 0.$$

woraus

$$\frac{a_3}{1000} = -\frac{0{\cdot}03266}{14{\cdot}91965} = 0{\cdot}002$$

erhalten wird.

Die Wurzeln dieser Gleichung sind jetzt um 0·002 zu vermindern:

| | 1 | 0·68 | — 14·8266 | 14·91965 | — 0·03266 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0·002 | 1 | 0·682 | — 14·82524 | 14·89 | (— 0·00288) |
| | 1 | 0·684 | — 14·82387 | (14·860352) | |
| | 1 | 0·686 | (— 14·82250) | | |
| | 1 | 0·688 | | | |

wodurch sie in die dritte transformierte Gleichung

$$x^4 + 0{\cdot}688\,x^3 - 14{\cdot}82250\,x^2 + 14{\cdot}860352\,x - 0{\cdot}00288.$$

übergeht.

Diese liefert die vierte Decimalstelle der Wurzel

$$\frac{a_4}{10000} = -\frac{0\,00288}{14{\cdot}860352} = -0{\cdot}0001,$$

also

$$x = 0{\cdot}1721.$$

Vermindert man ferner die Wurzeln dieser Gleichung um 0·0001, wobei nur die letzten zwei Glieder der transformierten Gleichung zu rechnen sind, weil man sich mit der 5. Decimalstelle begnügen will, so erhält man schließlich:

| | 1 | 0·688 | — 14·82250 | 14·860352 | — 0·00288 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0·0001 | 1 | 0·6881 | — 14·82243 | 14·85887 | (— 0·00139) |
| | 1 | 0·6882 | — 14·82236 | (14·85739) | |

$$\frac{a_5}{100000} = -\frac{0{\cdot}00139}{14{\cdot}85739} = 0\,00009.$$

Mithin den auf fünf Decimalstellen genauen Wert des x.

$$x = 0{\cdot}17219.$$

Zur Übung soll noch die zwischen 2 und 3 liegende Wurzel derselben Gleichung auf fünf Decimalstellen genau gerechnet werden.

Ist eine Wurzel größer als 1, so ist die Bestimmung der auf 0·1 verengten Grenzen derselben kaum nothwendig, weil sich diese zumeist sehr genau durch die Horner'sche Methode ergeben.

Bei dieser Aufgabe werden die auszuführenden Rechnungen ohne weitere Erklärung vorgeführt.

| | 1 | 0 | — 15 | 20 | — 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | — 11 | — 2 | (— 7) |
| | 1 | 4 | — 3 | (— 8) | |
| | 1 | 6 | (9) | | |
| | 1 | (8) | | | |

$$\frac{a_1}{10} = \frac{7}{8} = 0{\cdot}8$$

$$x = 2{\cdot}8\ldots$$

| | 1 | 8 | 9 | — 8 | — 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0·8 | 1 | 8·8 | 16·04 | 4·832 | (— 3·1344) |
| | 1 | 9·6 | 23·72 | (23·808) | |
| 0·9 | 1 | 8·9 | 17·01 | 7·309 | (— 0·4219) |
| | 1 | 9·8 | 25·83 | (30·556) | |
| | 1 | 10·7 | (35·46) | | |
| | 1 | (11·6) | | | |

$$\frac{a_2}{100} = -0{\cdot}1; \qquad \frac{a_2}{100} = -\frac{0{\cdot}4219}{30{\cdot}556} = -0{\cdot}01.$$

$$x = 2{\cdot}9; \qquad x = 2{\cdot}91.$$

| | 1 | 11·6 | 35·46 | 30·556 | — 0·4219 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0·01 | 1 | 11·61 | 35·5761 | 30·91176 | (— 0·11278) |
| | 1 | 11·62 | 35·6923 | (31·26868) | |
| | 1 | 11·63 | (35·8086) | | |
| | 1 | (11·64) | | | |

$$\frac{a_3}{1000} = -\frac{0{\cdot}11278}{31{\cdot}26868} = -0{\cdot}003;$$

$$x = 2{\cdot}913.$$

| | 1 | 11·64 | 35·8086 | 31·26868 | — 0·11278 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0·003 | 1 | 11·643 | 35·84353 | 31·37621 | (— 0·01865) |
| | 1 | 11·646 | 35·87847 | (31·48385) | |
| | 1 | 11·649 | (35·91342) | | |
| | 1 | (11·652) | | | |

$$\frac{a_4}{10000} = -\frac{0{\cdot}01865}{31{\cdot}48385} = -0{\cdot}0005;$$

$$x = 2{\cdot}9135.$$

| | 1 | 11·652 | 35·91342 | 31·48385 | — 0·01865 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0·0005 | 1 | 11·6525 | 35·91925 | 31·50181 | (— 0·0029) |
| | 1 | 11·653 | 35·92508 | (31·51977) | |

$$\frac{a_5}{10000} = -\frac{0{\cdot}0029}{31{\cdot}51977} = 0{\cdot}00009;$$

$$x = 2{\cdot}91359.$$

# 5. Abschnitt.

# Maxima Minima.

## § 44. Einleitung.

Jede Änderung des Wertes der unabhängigen Variablen x ruft im allgemeinen eine Änderung des Wertes einer Function $f(x)$ hervor.

Der Sinn dieser Änderung ist vom Bau der Function abhängig.

Die Function kann derart gebaut sein, dass ihr Functionswert mit zunehmendem x continuierlich zunimmt oder continuierlich abnimmt, sie kann aber auch so beschaffen sein, dass ihr Functionswert mit unausgesetzt wachsendem x aus dem Wachsen ins Abnehmen und umgekehrt übergeht.

So nimmt beispielsweise der Wert der Function $y = a\,x$ mit wachsendem x continuierlich zu, jener der Function $y = \frac{a}{1x}$ continuierlich ab und der Functionswert von $y = e^{-x^2}$ wächst mit dem aus negativem gegen Null wachsenden x, erreicht für $x = 0$ seinen größten Wert und nimmt dann beim weiteren Wachsen des x continuierlich ab.

Die Stellen, an welchen der Übergang vom Wachsen des Functionswertes zum Abnehmen, oder vom Abnehmen zum Wachsen erfolgt, sind besonders ausgezeichnet, und die diesen Stellen entsprechenden Functionswerte werden analytische Maxima, beziehungsweise Minima und beide Arten Extreme genannt.

Man versteht sonach unter einem analytischen Maximum einen solchen Wert der Function, welcher größer ist, unter einem analytischen Minimum, jeden welcher kleiner ist als die an ihn unmittelbar anschließenden Functionswerte.

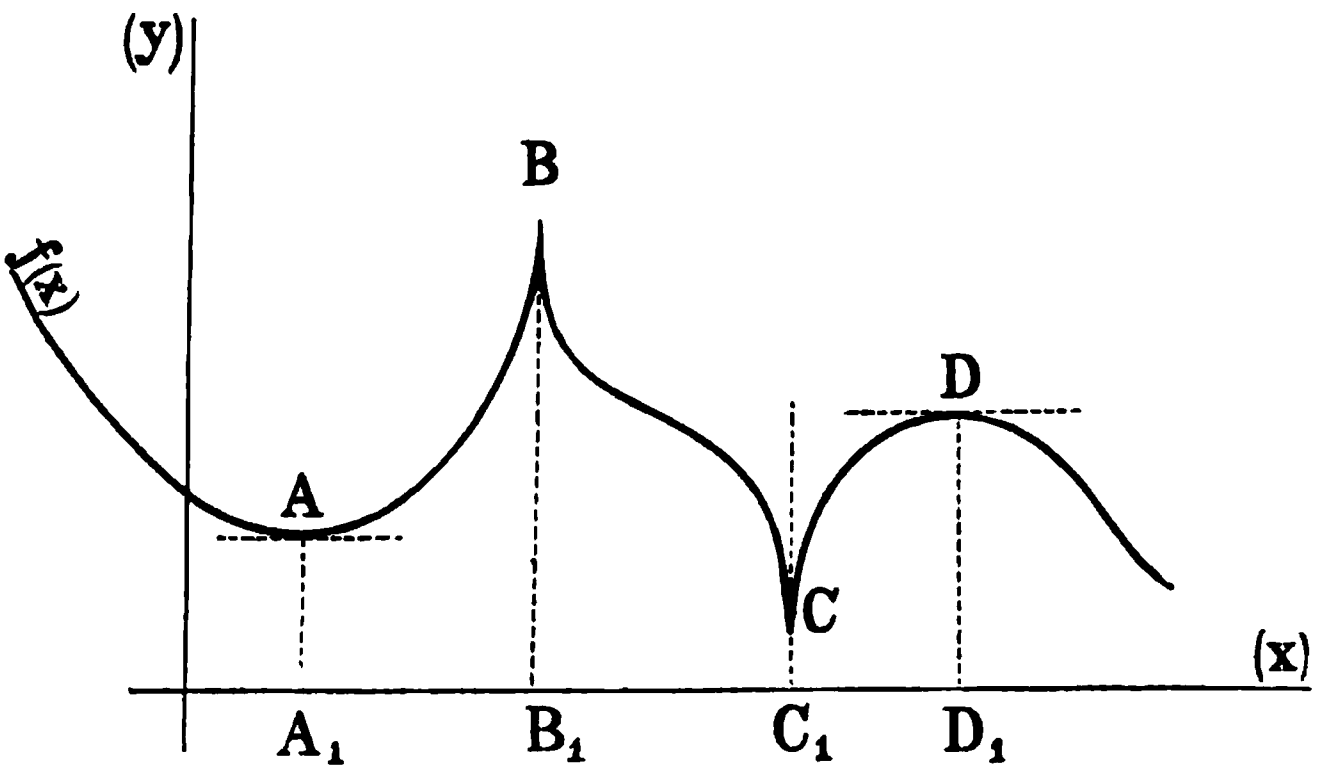
Ist die in der Fig. 9 gezeichnete Curve das geometrische Aequivalent der Gleichung

$$y = f(x),$$

so zeigt dieselbe durch ihren Verlauf genau die Stellen, an wel die Function $f(x)$ Extreme besitzt. Sie hat für $x = 0\,A$ $x = 0\,C_1$ analytische Minima, für $x = 0\,B_1$ und $x = 0\,D_1$ an

Maxima, deren Größe durch die Strecken $A_1 A$, $C_1 C$, $B_1 B$ und $D_1 D$ gegeben erscheint, da die Ordinaten die Functionswerte repräsentieren.

Fig. 9.




Unter Voraussetzung eines wachsenden x zeigt der Differentialquotient $f'(x)$ durch das positive Vorzeichen das Wachsen, durch das negative Vorzeichen das Abnehmen des Functionswertes an;*) daher muss an Stellen, für welche die Function ein Extrem besitzt, der Differentialquotient einen Zeichenwechsel erleiden.

Da nun eine Function, welche keine besonderen Unstetigkeitsstellen aufweist, von positiven Werten zu negativen nur durch das Null- oder Unendlichwerden übergehen kann, so folgt der Satz:

Die Function $f(x)$ kann im allgemeinen nur für solche Werte des x zu einem analytischen Maximum oder Minimum werden, für welche ihr erster Differentialquotient $f'(x)$ Null oder Unendlich wird.

## § 45. Maxima und Minima der Functionen einer unabhängigen Variablen.

*1.* Aus dem Begriffe eines analytischen Maximums folgt, dass die Function $f(x)$ an der Stelle $x = a$ dann ein Maximum besitzt, wenn

$$f(a) > f(a + h),$$

d. h.

$$f(a + h) - f(a) < 0,$$

*) Da beim zunehmenden x der Zuwachs d x wesentlich positiv ist, so ist das Zeichen der Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ vom Zuwachs des Functionswertes d y abhängig, welcher für wachsende Functionswerte wesentlich positiv, für abnehmende wesentlich negativ ist.

wobei h eine dem absoluten Betrage nach beliebig kleine von Null verschiedene, sowohl positive als negative Größe bedeutet.

Denn ist h hinreichend klein, so sind $f(a+h)$ und $f(a-h)$ die an $f(a)$ unmittelbar anschließenden Functionswerte.

Die Function $f(x)$ besitzt an derselben Stelle ein analytisches Minimum, wenn

$$f(a+h)-f(a)>0.$$

Sind in der Umgebung von $x=a$ die ersten zwei Differentialquotienten von $f(x)$ endlich und stetig, so kann $f(a+h)$ nach dem Taylor'schen Satze bis zum dritten Gliede entwickelt werden. Man erhält

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a+\varepsilon h),$$

oder

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a+\varepsilon h).$$

Die Änderung des Vorzeichens von h darf, wenn die Function $f(x)$ für $x=a$ einen ausgezeichneten Wert besitzt, keine Änderung des Vorzeichens der links vom Gleichheitszeichen stehenden Differenz hervorrufen.

Wäre $f'(a)$ von Null verschieden, so würde für entsprechend kleine Werte des h diese Differenz unbedingt mit dem Zeichenwechsel von h einen Zeichenwechsel erleiden. Denn für hinreichend kleine h wird das erste Glied rechts vom Gleichheitszeichen größer als das zweite, und entscheidet dann durch sein Vorzeichen, welches es mit h wechselt, das Vorzeichen der Differenz.

Demnach hat $f(x)$ nur dann für $x=a$ ein analytisches Maximum oder Minimum, wenn $f'(a)$ gleich Null ist, was bereits in der Einleitung gefunden wurde.

Ist nun

$$f'(a)=0,$$

dann ist

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^2}{2!}f''(a+\varepsilon h).$$

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $f''(x)$ in der Umgebung von $x=a$ kann $f''(x)$ in dem unbeschränkt kleinem Intervall $a-\varepsilon h$ und $a+\varepsilon h$ keinen Zeichenwechsel erleiden, wenn $f''(a)$ von Null verschieden ist, d. h. es hat $f''(a+\varepsilon h)$ sowohl, als auch $f''(a-\varepsilon h)$ dasselbe Vorzeichen wie $f''(a)$.

Die Änderung des Vorzeichens von h ruft also, wenn $f'(a) = 0$ ist, keine Änderung des Vorzeichens der charakteristischen Differenz hervor, sobald $f''(a)$ von Null verschieden ist, in diesem Falle ist also thatsächlich für $x = a$ ein analytisches Maximum oder Minimum vorhanden.

Da nun unter dieser Voraussetzung die Differenz

$$f(a + h) - f(a)$$

dasselbe Vorzeichen besitzt wie $f''(a)$, so tritt für $x = a$ ein analytisches Maximum ein, wenn $f''(a) < 0$, und ein Minimum, wenn $f''(a) > 0$ ist. Mithin kann der Satz ausgesprochen werden:

Die Function $f(x)$ wird für jeden aus der Gleichung $f'(x) = 0$ resultierenden Wert von $x = a$ zu einem analytischen Maximum oder Minimum, für welchen der zweite Differentialquotient negativ oder positiv wird.

Wenn aber für einen aus der Gleichung $f'(x) = 0$ resultierenden Wert von $x = a$ der zweite Differentialquotient gleich Null wird, dann muss zur Entscheidung, ob für diesen Wert von x die Function ein Maximum oder Minimum besitzt, auf höhere Differentialquotienten übergegangen werden.

Verschwinden beispielsweise für $x = a$ alle Differentialquotienten bis zum $n^{ten}$, dann gibt die bis zum $(n + 1)^{ten}$ Gliede ausgeführte Entwicklung von $f(a + h)$, [weil $(f'(a) = 0, f'(a) = 0 \ldots f^{(n-1)}(a) = 0$]

$$f(a + h) - f(a) = \frac{h^n}{n!} f^n(a) + R.$$

Nun kann h wieder so klein gewählt werden, dass das erste Glied rechts vom Gleichheitszeichen größer wird wie R, also durch sein Vorzeichen entscheidend für das Vorzeichen der Differenz ist.

Für ein ungerades n wechselt aber das erste Glied, also mit diesem die Differenz gleichzeitig mit h das Vorzeichen, was nicht eintreten darf, wenn $f(a)$ ein Extrem sein soll. Für ein gerades n hat die Differenz dasselbe von h unabhängige Vorzeichen wie $f^{(n)}(a)$, man hat also, wenn $f^{(n)}(a) < 0$ für $x = a$ ein Maximum, und wenn $f^{(n)}(a) > 0$ ein Minimum.

Demzufolge lautet der erweiterte Satz:

Die Function $f(x)$ wird für jeden aus der Gleichung $f'(x) = 0$ resultierenden Wert $x = a$ zu einem analytischen Maximum oder Minimum, für welchen der erste nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist.

Sie wird zum Maximum, wenn dieser Differentialquotient negativ, und zum Minimum, wenn er positiv ist.

Sollte also für einen aus der Gleichung $f'(x) = 0$ resultierenden Wert $x = a$ der zweite Differentialquotient $[f''(x)]_{x=a}$ Null werden, so müsste, wenn für $x = a$ die Function ein Extrem besitzt, unbedingt auch der dritte Differentialquotient $f'''(x)$ für $x = a$ verschwinden, worauf dann der vierte, durch sein Vorzeichen die Art des Extrems anzeigen würde u. s. w.

**Beispiele:**

1. Für welchen Wert von x wird die Function

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

zu einem analytischen Maximum oder Minimum? Man berechnet

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(-2x) - (1-x^2)\,2(x^2+1)\,2x}{(x^2+1)^4} = -\frac{3 - x^2}{(x^2+1)^3}\,2x.$$

Die Gleichung $f'(x) = 0$ lautet nun:

$$\frac{1 - x^2}{(1+x^2)^2} = 0,$$

oder

$$1 - x^2 = 0.$$

Die Auflösungen derselben sind

$$x_1 = +1, \quad x_2 = -1.$$

Für diese zwei Werte des x kann also ein analytisches Maximum und Minimum eintreten. Die Entscheidung hierüber gibt der zweite Differentialquotient.

Setzt man nämlich in

$$f''(x) = -\frac{3 - x^2}{(x^2+1)^3}\,2x,$$

$$x = +1,$$

so erhält man

$$f''(1) = -\frac{1}{2} < 0.$$

Durch die Substitution $x = -1$ hingegen

$$f''(-1) = +\frac{1}{2} > 0.$$

Die vorgelegte Function hat somit für

$$x = -1 \text{ ein analytisches Minimum,}$$
$$x = +1 \text{ ein analytisches Maximum.}$$

2. Eine Zahl a ist in zwei Theile so zu zerlegen, dass das Product dieser Theile und ihrer Differenz ein Maximum werde.

Bezeichnet man den einen Theil mit x, so ist der andere $a - x$ und die Differenz der beiden Theile $a - 2x$

Die zu untersuchende Function wird sonach durch das Product dieser drei Größen repräsentiert:

$$f(x) = x(a - x)(a - 2x) = 2x^3 - 3ax^2 + a^2x.$$

Zur Bestimmung des Wertes von x, für welchen $f(x)$ zu einem Maximum wird, dient nach der Regel die Gleichung

$$f'(x) = 6x^2 - 6ax + a^2 = 0.$$

Ihre Auflösungen sind:

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{12}}.$$

Setzt man nun in

$$f''(x) = 12x - 6a$$

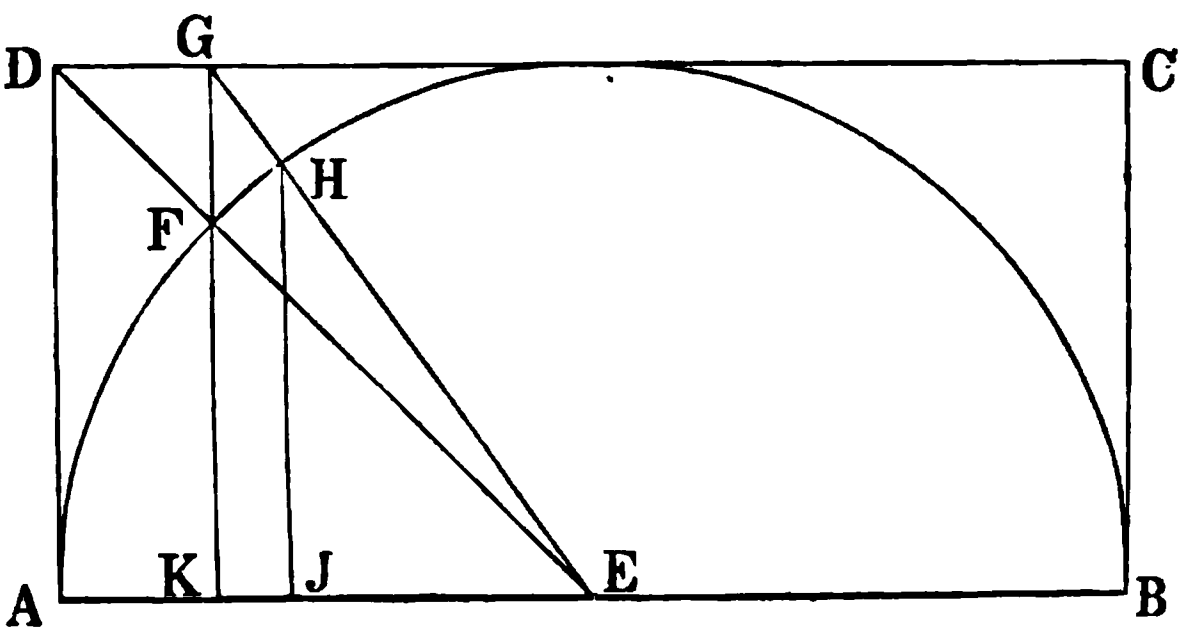
für x, $x_1 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{12}}$, so wird $f''(x) = -12\sqrt{\frac{a^2}{12}}$, was das Maximum der Function charakterisiert.

Die Zahl a ist somit derart zu theilen, dass ein Theil derselben $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{12}}$

wodurch der andere $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{12}}$ wird.

Die graphische Theilung kann der Fig. 10 entnommen werden.

Fig. 10.




$$AB = a \qquad AD = \frac{a}{2},$$

$$AE = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2},$$

AJ ist der eine Theil,

JB ist der zweite Theil.

Denn es ist

$$EA = AD, \quad EK = KF,$$

$$2\,\overline{KE}^2 = \overline{KE}^2 + \overline{KF}^2 = \overline{EF}^2 = \frac{a^2}{4},$$

also

$$\overline{KE}^2 = \frac{a^2}{8};$$

ferner

$$\overline{EG}^2 = \overline{KE}^2 + \overline{KG}^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} = 3\,\frac{a^2}{8},$$

$$EJ : EK = EH : EG,$$

$$EJ : \frac{a}{\sqrt{8}} = \frac{a}{2} : a\sqrt{\frac{3}{8}},$$

$$EJ = \frac{a^2}{2\sqrt{8}} : a\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{a^2}{12}},$$

somit

$$AJ = AE - EJ = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{12}}$$

und

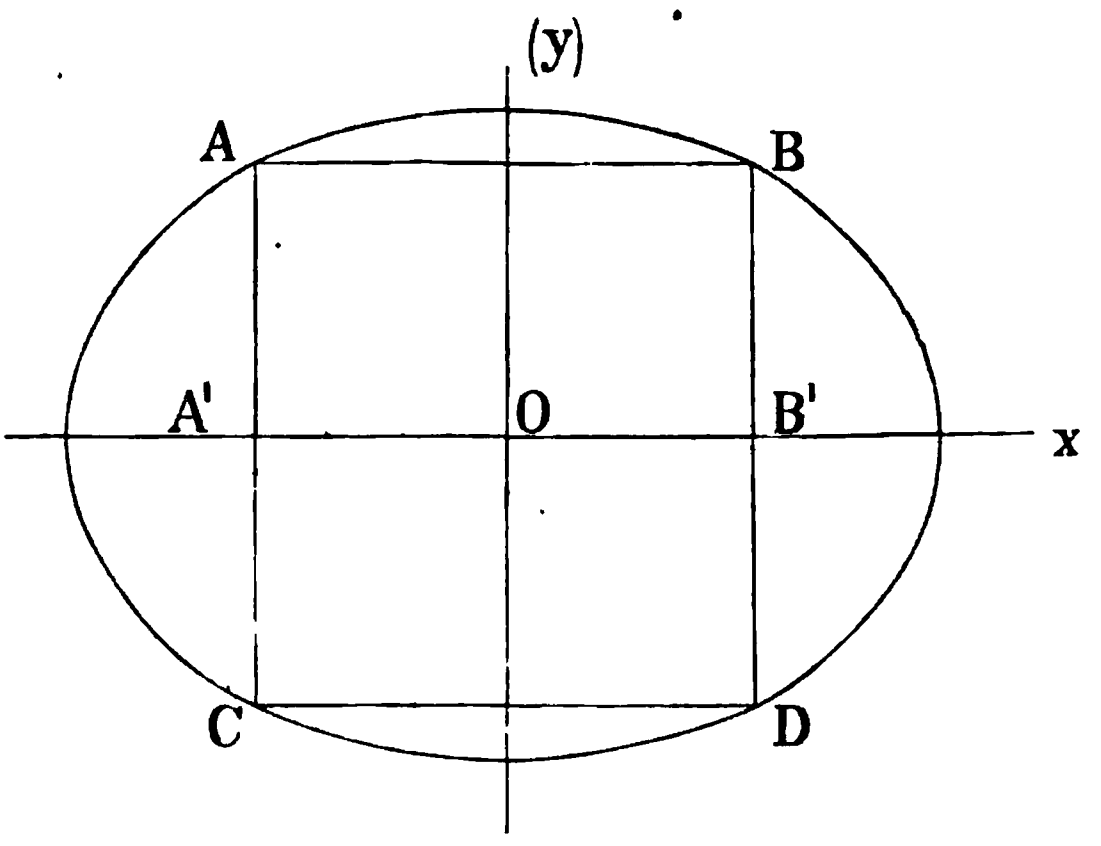
$$JB = AB - AJ = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{12}}.$$

3. In eine Ellipse von den Halbaxen a und b ist ein Rechteck von der größtmöglichen Fläche einzuzeichnen.

Bezeichnet man OB′ mit x und B′B mit y, so hat das in der Fig. 11 gezeichnete Rechteck die Fläche

$$F = 4\,x\,y.$$

Fig. 11.




Diese Fläche kann durch x allein ausgedrückt werden, wenn berücksichtigt wird, dass B ein Punkt der Ellipse ist, demnach seine Coordinaten der Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

genügen müssen.

Aus dieser Gleichung folgt nämlich

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

so dass

$$F = 4\frac{b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2} = 4\frac{b}{a}\sqrt{a^2x^2 - x^4}$$

wird.

Zufolge der gestellten Aufgabe ist x so zu bestimmen, dass F zu einem Maximum wird, dieses tritt aber ein, wenn

$$f(x) = a^2x^2 - x^4$$

ein Maximum wird.

Die Gleichung

$$f'(x) = 2a^2x - 4x^3 = 0$$

gibt für x die beiden Werte $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Setzt man diese beiden Werte in

$$f''(x) = 2a^2 - 12x^2,$$

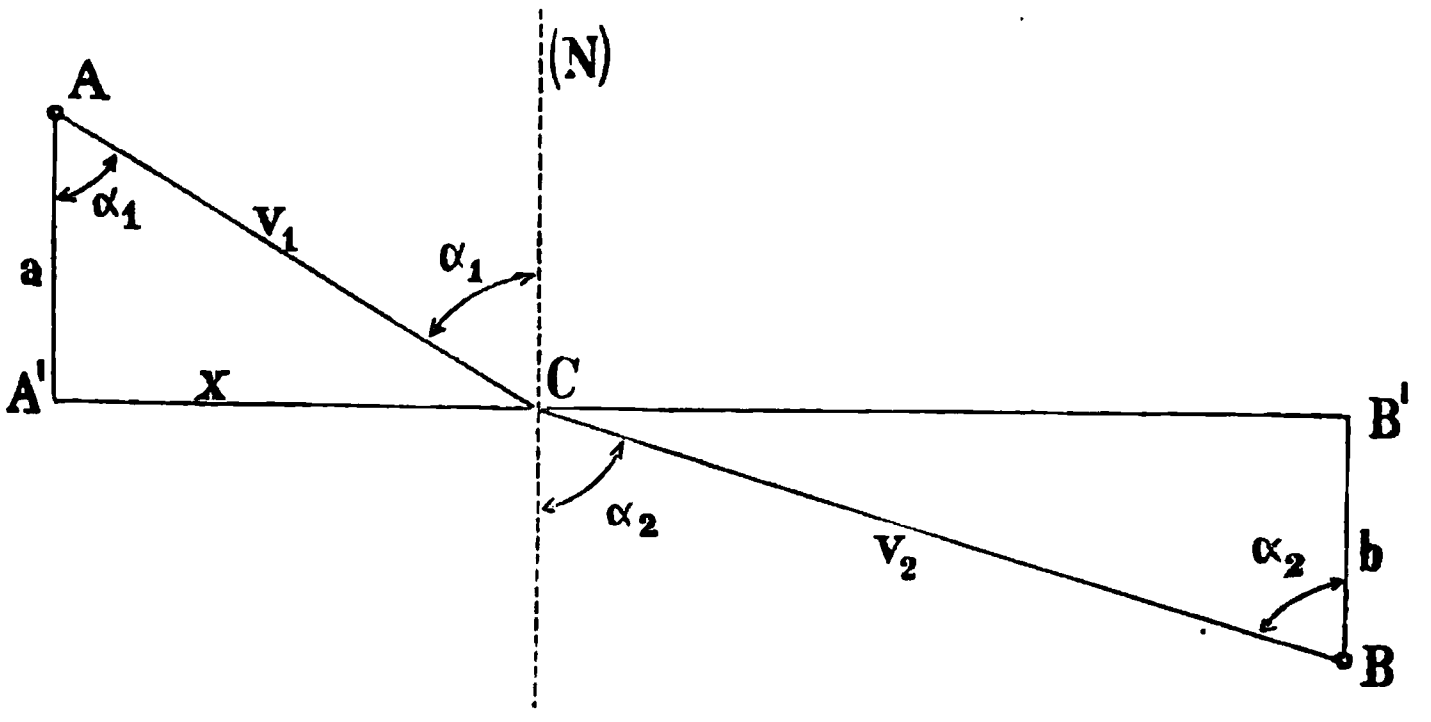
so findet man, dass die Function für $x_1 = 0$ zu einem Minimum und für $x_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ weil $f''(x) = 2a^2 - 6a^2 < 0$ zu einem Maximum wird.

Ist also $OB' = \frac{a}{\sqrt{2}}$, dann hat das Rechteck die größte Fläche, dieselbe ist

$$F = 4\frac{b}{a}\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = 2ab.$$

4. Ein Eisenbahnzug bewegt sich von dem Orte A zum Orte B, und zwar von A in gerader Linie bis zum Orte C, welcher in der Linie A' B' liegt, mit der Geschwindigkeit $v_1$ und von da an wieder in gerader Linie bis B mit der Geschwindigkeit $v_2$. Wie muss C liegen, damit die Fahrzeit ein Minimum wird? (Fig. 12.)

Fig. 12.




Die zum Zurücklegen des Weges A C erforderliche Fahrzeit ist $\frac{AC}{v_1}$, jene zum Zurücklegen des Weges CB, $\frac{CB}{v_2}$, mithin ist die Gesammtfahrzeit

$$t = \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2}.$$

Bezeichnet man die bekannten Abstände der Orte A und B von der Linie A′B′ mit a und b, die Länge A′B′ mit c, dann die zu bestimmende Entfernung A′C mit x, so ist

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad CB = \sqrt{b^2 + (c - x)^2},$$

demzufolge:

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}.$$

Die vorgelegte Aufgabe ist also gelöst, wenn ermittelt wird, für welchen Wert des x die Function

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}$$

zu einem Minimum wird.

Die Gleichung

$$f'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0$$

bestimmt die gesuchte Lage des Punktes C; von der Auflösung derselben kann abgesehen werden, denn aus ihr folgt unmittelbar:

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

d. h.

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2},$$

oder

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

wenn $\alpha_1$ und $\alpha_2$ die Winkel bedeuten, welche die Strecken AC und CB mit der Normalen von A′B′ bilden (Einfallswinkel).

Das Minimum an Fahrzeit tritt demnach ein, wenn sich die Sinus der Einfallswinkel der Wege so verhalten, wie die Geschwindigkeiten auf denselben.

## Aufgaben:

1. Aus einer Kugel von gegebenem Halbmesser R ist ein gerader Kegel, dessen Spitze S in der Oberfläche liegt, so auszuschneiden, dass seine Mantelfläche ein Maximum ist.

Lösung: Basis im Abstande $\frac{R}{3}$ vom Mittelpunkt der Kugel senkrecht zu dem Durchmesser durch S.

2. In einen geraden Kreiskegel vom Radius r und der Höhe h ist ein Cylinder von größtmöglicher Mantelfläche einzubeschreiben.

Lösung: Halbmesser des Cylinders $\frac{r}{2}$.

3. Von einem Dreieck ist gegeben die Grundlinie c und die Höhe h, wie groß müssen die anderen Seiten sein, damit der Winkel $\gamma$, welcher c gegenüberliegt, ein Maximum wird?

Lösung: Gleichschenkliges Dreieck.

4. Von einem Dreieck ist die Basis c und der gegenüberliegende Winkel $\gamma$ gegeben, wie groß müssen die anderen Winkel sein, damit die Dreieckfläche ein Maximum wird?

2. Wie bereits im § 43 gezeigt wurde, kann die Function auch in dem Falle ein Extrem haben, in welchem für einen Wert $x = a$, $f'(x) = \infty$ wird, sobald sich für keine der Substitutionen $f(a - h)$ und $f(a + h)$ imaginäre oder mehrfache Werte ergeben, die zum Theil größer. zum Theil kleiner sind als $f(a)$, und $f(a)$ zur Grenze für $h = 0$ haben.

Die Entscheidung, ob Maximum oder Minimum, gibt das Verhalten des Differentialquotienten vor und nach dieser Stelle $x = a$.

Da die Function bei Annäherung an ein Maximum wächst, nach Passieren desselben abnimmt, muss der erste Differentialquotient für $x = a - h$ positiv und für $x = a + h$ negativ sein.

Umgekehrt ist das Verhalten des Differentialquotienten, wenn an der Unstetigkeitsstelle $x = a$, ein Minimum vorhanden ist.

**Beispiel:**

Der Differentialquotient der Function

$$f(x) = c + (x - a)^{\frac{2}{3}},$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x - a}}$$

verschwindet für keinen endlichen Wert von x, wird aber an der Stelle $x = a$ unendlich.

Setzt man in diesem Differentialquotienten einmal $x = a - h$, das anderemal $x = a + h$, so erhält man:

$$f'(a - h) = \frac{2}{3\sqrt[3]{-h}} < 0,$$

$$f'(a + h) = \frac{2}{3\sqrt[3]{h}} > 0,$$

und erkennt daraus, dass die Function an der Stelle $x = a$ ein Minimum (Spitze) hat. denn sie nimmt bei Annäherung an die Stelle a ab, was der negative Differentialquotient anzeigt, und nach Passierung derselben zu, weil der Differentialquotient positiv wird.

3. Ist die zu untersuchende Function in unentwickelter Form durch die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

gegeben, so ist es am vortheilhaftesten, wenn möglich durch Auflösen nach y die entwickelte Form herzustellen.

Ist diese Operation nicht ausführbar oder mit zu großen Schwierigkeiten verbunden, so kann in folgender Weise vorgegangen werden:

Die für ein Extrem einer Function gegebenen Kennzeichen gelten ganz allgemein, es muss also für ein Maximum oder Minimum der erste Differentialquotient der Function verschwinden oder unendlich werden.

Hier kann aber

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

auf zwei Arten Null werden, und zwar erstens, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

oder zweitens, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \infty$$

wird.

Das Verschwinden des ersten Differentialquotienten erfolgt in der Regel nach der ersten Art, also dadurch, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

wird. In diesem Falle ergeben sich die Extreme als gemeinschaftliche Auflösungen der beiden Gleichungen

$$F(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Den aus diesen Gleichungen resultierenden Wertsystemen von x und y müssen aber keinesfalls durchwegs Extreme entsprechen; die Entscheidung diesbezüglich gibt wieder das Verhalten des zweiten Differentialquotienten.

Zur Bildung des letzteren ist die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

zweimal nacheinander zu differenzieren.

Durch die erste Differentiation erhält man:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

und durch die darauffolgende zweite

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \ldots (\alpha$$

Die letzte Gleichung, welche den zweiten Differentialquotienten bestimmt, vereinfacht sich wesentlich für alle Wertepaare von x und y, welche Extremen entsprechen können, weil für diese der erste Differentialquotient verschwindet, sie geht also in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

über, woraus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

folgt.

Ist nun dieser im vorliegenden Falle den zweiten Differentialquotienten darstellende Ausdruck für einen der in Rede stehenden Wertsysteme von x und y positiv, so entspricht dasselbe einem Minimum, ist er hingegen negativ, einem Maximum.

Bringt ein aus den Gleichungen

$$F(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

resultierendes Wertepaar von x und y auch den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial F}{\partial y}$ auf Null, so nimmt $\frac{dy}{dx}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an und es wird eine besondere Untersuchung erforderlich.

Die zur Bestimmung des zweiten Differentialquotienten dienende Gleichung ($\alpha$ reduciert sich auf

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \ldots (\beta,$$

und gibt durch ihre Auflösung die wahren Werte des Differentialquotienten, welche für ein Extrem beide 0, oder beide $\infty$ sein müssen.

Die Fälle, in welchem der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ dadurch verschwindet, dass $\frac{\partial F}{\partial y} = \infty$ oder der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ selbst unendlich wird, gehören zu Ausnahmen, und müssen separat behandelt werden, worauf aber nicht eingegangen wird.

**Beispiel:**

Es sind die Extreme der Function

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

aufzusuchen.

Hier ist

$$F(x,y) \equiv x^3 - 3axy + y^3,$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3(x^2 - ay); \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3(y^2 - ax).$$

Setzt man nun:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3(x^2 - ay) = 0$$

und bestimmt diejenigen Werte von x und y, welche dieser Gleichung

$$x^2 - ay = 0$$

und der gegebenen

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

gleichzeitig genügen, so findet man Wertepaare, welche Extremen entsprechen können.

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$y = \frac{x^2}{a},$$

dadurch geht die zweite in

$$x^3 - 3x^3 + \frac{x^6}{a^3} = 0,$$

$$x^6 = 2a^3x^3$$

über, woraus zwei Werte von x, nämlich

$$x_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = a\sqrt[3]{2},$$

resultieren. Diesen entsprechen wegen $y = \frac{x^2}{a}$ die Werte

$$y_1 = 0; \quad y_2 = a\sqrt[3]{4}.$$

Für das Wertepaar $x_2 = a\sqrt[3]{2}$, $y_2 = a\sqrt[3]{4}$ ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{6x}{3(y^2 - ax)} = -\frac{2x}{y^2 - ax} = -\frac{2a\sqrt[3]{2}}{a^2\sqrt[3]{2}} = -\frac{2}{a}$$

positiv, wenn a negativ, und negativ, wenn a positiv ist.

Demnach entspricht diesem Wertepaar ein analytisches Maximum oder Minimum, je nachdem a positiv oder negativ ist.

Für das Wertepaar $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ wird auch $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ und man erhält aus der Gleichung (β

$$x - a\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0; \quad \frac{dy}{dy} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4xy}}{2y}.$$

zwei Werte, nämlich 0 und $\infty$, was zwei durch den Ursprung gehende, die Coordinatenaxen berührende Curvenäste anzeigt.

## § 46. Maxima und Minima der entwickelten Functionen zweier unabhängigen Variablen.

Die Function z der beiden unabhängigen Variablen x und y

$$z = f(x, y)$$

wird analog wie die Function einer unabhängigen Variablen für das Wertsystem

$$x = a; \quad y = b$$

zu einem analytischen Maximum, wenn

$$f(a, b) > f(a + h, b + k),$$

und zu einem Minimum, wenn

$$f(a, b) < f(a + h, b + k)$$

ist, wobei unter h und k hinreichend kleine von einander unabhängige positive oder negative Größen zu verstehen sind.

Entwickelt man die Function $f(x+h, y+k)$ nach Taylor in eine Reihe (Stetigkeit vorausgesetzt),

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]^2 f + \dots$$

und setzt $x = a$ und $y = b$, so erhält man:

$$f(a+h, b+k) =$$

$$= f(a, b) + h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a,b} + k\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,b} + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]^2_{a,b} f + \dots$$

oder

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) =$$

$$= h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a,b} + k\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,b} + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]^2_{a,b} f + \dots$$

Für ein Extrem der Function $z = f(x, y)$ muss diese Differenz ein beständiges Vorzeichen haben, d. h. sie darf dasselbe nicht wechseln, wenn Werte und Vorzeichen von h oder von k oder von beiden geändert werden.

Dies ist aus demselben Grunde wie im früher behandelten Falle nur dann möglich, wenn auf der rechten Seite der letzten Gleichung die Glieder, welche h und k in der ersten Potenz enthalten, verschwinden, und zwar müssen, da h und k ganz willkürlich sind, die partiellen Differentialquotienten einzeln Null werden.

Daraus folgt:

Die Function z

$$z = f(x, y)$$

kann nur dann für das Wertepaar $x = a$, $y = b$ ein Extrem haben, wenn für dasselbe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

wird.

Ist dies der Fall, dann wird

$$f(a+h, b+k) - f(a\,b) = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right]_{a,b} + \dots$$

und der eingeklammerte Ausdruck entscheidet durch sein Vorzeichen, das Vorzeichen der charakteristischen Differenz.

Da aber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 =$$

$$= \frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} \left[ \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h k + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} \left[ \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} k \right)^2 + k^2 \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \, d y} \right)^2 \right\} \right];$$

ist zu erkennen, dass der das Vorzeichen entscheidende Ausdruck nur dann zeichenbeständig sein kann, wenn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0.$$

Diese Bedingung ist hinreichend, weil in diesem Falle in der eckigen Klammer zwei wesentlich positive Größen stehen; sie ist aber auch nothwendig, denn, wäre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) < 0$, so stünde in dieser Klammer eine Differenz, welche man durch entsprechende Wahl von h und k positiv oder negativ machen könnte. Würde diese Differenz verschwinden, so könnte man den ganzen Klammerausdruck auf Null bringen, ohne dass h und k gleichzeitig Null werden, und in diesem Falle wäre zur Entscheidung über das Vorzeichen der charakteristischen Differenz die Untersuchung höherer Differentialquotienten erforderlich. Auf diesen Fall wird aber, da er zu den Ausnahmen zählt, nicht eingegangen.

Nach dem Angeführten ist also die Differenz

$$f(a + h,\ b + k) - f(a, b)$$

dann zeichenbeständig, wenn

$$\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\}_{a, b} > 0,$$

und zwar negativ, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ negativ, und positiv, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ positiv ist.

Da aber in dem Ausdrucke in der geschlungenen Klammer der Subtrahend ein Quadrat, also eine wesentlich positive Zahl ist, so muss auch der Minuend $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ positiv sein, damit die, dem Ausdrucke auferlegte Bedingung (dass er positiv ist) erfüllt wird. Mithin müssen

für ein beständiges Vorzeichen der charakteristischen Differenz, also für ein Extrem die beiden partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

dasselbe Vorzeichen haben.

Aus dieser Betrachtung folgt der Schluss:

Eine Function

$$z = f(x, y)$$

wird für jedes aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

resultierende Wertsystem von x und y zu einem analytischen Maximum oder Minimum, für welches

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0$$

wird, und zwar zu einem Maximum, wenn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \text{ oder } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$$

und zu einem Minimum, wenn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \text{ oder } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$$

ist.

**Beispiele:**

1. Der Umfang eines Dreieckes sei $2s$, es sollen die Seiten desselben so bestimmt werden, dass sein Flächeninhalt ein Maximum wird.

Berücksichtigt man, dass der Flächeninhalt eines Dreieckes durch

$$F = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

gegeben ist, wenn s der halbe Umfang und a, b, c die Seiten desselben sind und setzt

$$s - a = x, \qquad s - b = y,$$

so folgt, weil

$$c = x + y,$$

$$s - c = s - x - y,$$

$$F = \sqrt{s\,x\,y\,(s-x-y)}.$$

Die Fläche F wird offenbar dann zu einem Maximum, wenn die Function

$$f(x, y) = x\,y\,(s - x - y)$$

zu einem Maximum wird.

Die Untersuchung ist nun in der angegebenen Weise durchzuführen.

Man hat hier:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,(s - x - y) - x\,y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,(s - x - y) - x\,y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = s - 2(x + y).$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,(s - x - y) - x\,y = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,(s - x - y) - x\,y = 0,$$

oder

$$2x + y = s,$$

$$2y + x = s,$$

folgt

$$x = \frac{s}{3}; \quad y = \frac{s}{3}.$$

Die Function hat für diese Werte thatsächlich ein Maximum, denn es ist für dieselben:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 4xy - [s^2 - 4s(x + y) + 4(x + y)^2] =$$

$$= 4\frac{s^2}{9} - \left[s^2 - \frac{8s^2}{3} + \frac{16s^2}{9}\right] = \frac{s^2}{3} > 0$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2s}{3} < 0.$$

Von allen Dreiecken mit gleichem Umfang hat demzufolge das gleichseitige den größten Flächeninhalt.

2. Das Volumen v eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gegeben, es sind die Seitenkanten desselben so zu bestimmen, dass seine Oberfläche ein Minimum wird.

Bezeichnet man die zu bestimmenden Seitenkanten mit x, y und z, so besteht die Beziehung:

$$v = x \cdot y \cdot z,$$

aus welcher

$$z = \frac{v}{xy}$$

folgt.

Die Oberfläche ist dann

$$\Omega = 2(xy + xz + yz),$$

oder mit Rücksicht auf

$$z = \frac{v}{xy},$$

$$\Omega = 2\left(xy + \frac{v}{y} + \frac{v}{x}\right).$$

Diese wird zu einem Minimum, wenn

$$f(x,y) \equiv xy + \frac{v}{y} + \frac{v}{x}$$

ein Minimum wird.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{v}{x^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{v}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2v}{x^3}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2v}{y^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$$

Aus den Gleichungen

$$y - \frac{v}{x^2} = 0,$$

$$x - \frac{v}{y^2} = 0$$

folgt:

$$x = \sqrt[3]{v}; \qquad y = \sqrt[3]{v},$$

mithin aus

$$xyz = v$$

auch:

$$z = \sqrt[3]{v}.$$

Diesen Werten entspricht thatsächlich ein Minimum, denn es ist für dieselben

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2=\frac{4v^2}{x^3y^3}-1=\frac{4v^2}{v^2}-1=3>0$$

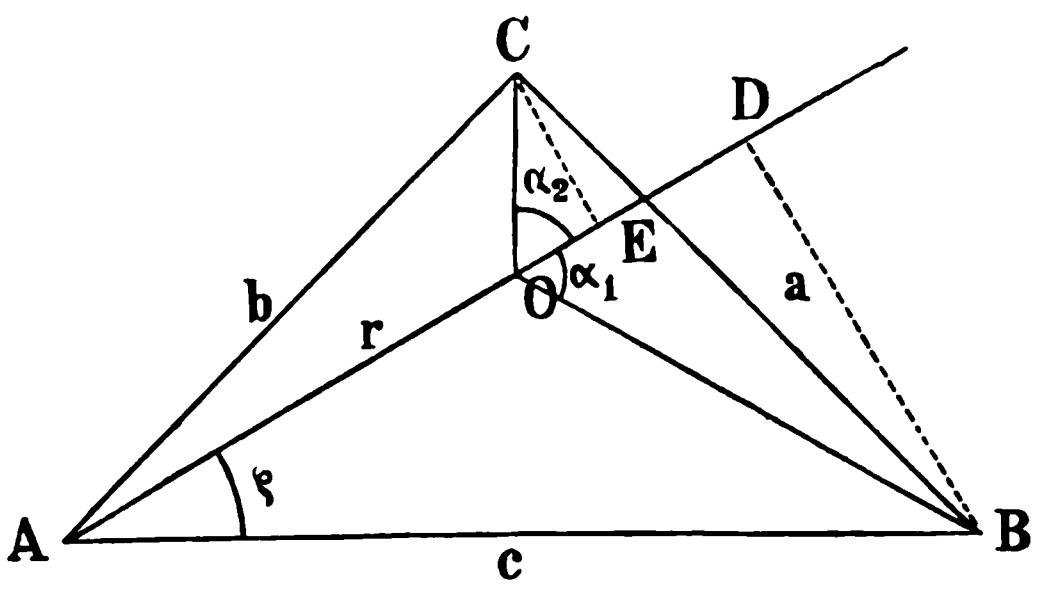
und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2>0.$$

Diese Untersuchung hat gezeigt, dass von allen Parallelepipeden gleichen Volumens der Würfel die kleinste Oberfläche hat.

3. In der Ebene eines gegebenen Dreieckes ist ein Punkt so zu bestimmen, dass die Summe seiner Entfernungen von den Eckpunkten möglichst klein werde.

Fig. 13.




Wählt man eine Seite des Dreieckes AB (Fig. 13) zur Polaraxe und den Eckpunkt A auf derselben zum Ursprung eines Polarcoordinatensystems, so ist der zu bestimmende Punkt 0 durch seine Coordinaten $r = AO$ und $\varphi = \sphericalangle BAO$ gegeben. Seine Abstände von den Eckpunkten des Dreieckes sind:

$$AO = r,$$

$$OB = \sqrt{c^2 + r^2 - 2cr\cos\varphi},$$

$$OC = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos(A-\varphi)}.$$

Die Summe dieser drei Abstände ist:

$$S = r + \sqrt{c^2 + r^2 - 2rc\cos\varphi} + \sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos(A-\varphi)}$$

und soll zu einem Minimum werden.

Sie ist eine Function der beiden Variablen r und $\varphi$, wird somit zu einem Minimum (Maximum ist in der Aufgabe ganz ausgeschlossen) für jene Werte von r und $\varphi$, welche aus den Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial r}=0;\quad \frac{\partial S}{\partial \varphi}=0$$

resultieren.

$$1+\frac{r-c\cos\varphi}{\sqrt{r^2+c^2-2rc\cos\varphi}}+\frac{r-b\cos(A-\varphi)}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos(A-\varphi)}}=0.$$

$$\frac{c\sin\varphi}{\sqrt{c^2+r^2\,2cr\cos\varphi}}-\frac{b\sin(A-\varphi)}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos(A-\varphi)}}=0.$$

Diese zwei Gleichungen wären nun aufzulösen und würden diejenigen Werte von r und $\varphi$ ergeben, welche der gewünschten Lage des Punktes O entsprechen.

Da sich die Auflösung der Gleichungen sehr compliciert gestalten würde, ist es vortheilhafter, durch geometrische Deutung der in den Gleichungen enthaltenen Größen einen Schluss auf die Lage des Punktes O zu ziehen.

Führt man aus B und C Senkrechte zu A O, so schneiden sie diesen Strahl in den Punkten D und E, und es ist:

$$\begin{aligned} AD &= c\cos\varphi && \text{also} && r - c\cos\varphi = -OD,\\ AE &= b\cos(A-\varphi) && \text{»} && r - b\cos(A-\varphi) = -OE,\\ BD &= c\sin\varphi,\\ CE &= b\sin(A-\varphi). \end{aligned}$$

mithin bestehen die Beziehungen

$$1 - \frac{OD}{OB} - \frac{OE}{OC} = 0,$$

$$\frac{BD}{OB} - \frac{CE}{OC} = 0,$$

welche, wenn die Winkel BOD und COD mit $\alpha_1$ und $\alpha_2$ bezeichnet werden, auch in der Form geschrieben werden können:

$$1 - \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 = 0,$$

$$\sin\alpha - \sin\alpha_2 = 0.$$

Aus diesen folgt:

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2,$$

also

$$\alpha_1 = \alpha_2,$$

ferner

$$2\cos\alpha_1 = 1,$$

mithin

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{2},$$

d. h.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 60^0.$$

Wenn also der Punkt O die gewünschte Lage hat, so ist der Winkel $BOC = 120^0$, was auch für die Winkel COA und AOB Geltung hat.

Der gesuchte Punkt liegt derart, dass von ihm aus alle drei Seiten unter demselben Winkel gesehen werden.

Zur Construction des Punktes beschreibe man über jede Seite ein gleichseitiges Dreieck nach außen und verbinde die äußeren Eckpunkte dieser Dreiecke mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des gegebenen Dreieckes. Diese drei Verbindungslinien schneiden sich in einem Punkte, welcher die gesuchte Lage hat.

Die Lösung dieser Aufgabe ist nur so lange möglich als kein Winkel des Dreieckes $120^0$ erreicht oder gar überschreitet. Ist dies der Fall, so ist der Scheitel dieses Winkels der gesuchte Punkt, wovon man sich durch die Construction leicht überzeugen kann.

**Aufgaben:**

1. Eine Strecke 2s ist so in drei Theile zu theilen, dass das aus diesen construierte Dreieck möglichst große Fläche hat.

Lösung: Alle drei Theile gleich, also jeder $\frac{2s}{3}$.

2. Gegeben sind zwei Gerade im Raume durch die Gleichungen

$$y = m_1 x + p_1 \qquad y = m_2 x + p_2,$$
$$z = n_1 x + q_1 \qquad z = n_2 x + q_2$$

und es soll die kürzeste Entfernung derselben berechnet werden.

Lösung:

$$\frac{(n_1 - n_2)(p_1 - p_2) - (m_1 - m_2)(q_1 - q_2)}{\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (n_1 - n_2)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}} \text{ (Normalabstand).}$$

## § 46a. Maxima und Minima der Functionen mehrerer Variablen.

Soll eine Function von n unabhängigen Variablen

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

für ein Wertsystem $x = a$, $y = b$, $z = c \ldots$ dieser Variablen zu einem Extrem werden, so muss wieder die Differenz

$$f(a + h,\ b + k,\ c + l, \ldots) - f(a, b\ c, \ldots)$$

stets dasselbe Vorzeichen behalten, wie immer auch die hinreichend klein zu denkenden Größen h, k, l . . . beschaffen sein mögen.

Unter Voraussetzung der Stetigkeit kann die Function $f(x + h, y + k, z + l, \ldots)$, ähnlich wie die Function von zwei unabhängigen Variablen, in eine Reihe nach Taylor entwickelt werden, und man erhält:

$$f(x + h, y + k, z + l, \ldots) - f(x, y, z, \ldots) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \frac{\partial f}{\partial l} l + \ldots\right) + R.$$

Nun kann man wieder die Größen h, k, l . . . derart wählen, dass die rechts vom Gleichheitszeichen in der Klammer angesetzte Summe größer werde wie R, wodurch sie für das Vorzeichen der links vom Gleichheitszeichen stehenden Differenz maßgebend wird.

Hätten also die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \ldots$ oder wenigstens einige davon von Null verschiedene Werte, so wäre es möglich, dieser Summe, mithin auch der linksstehenden Differenz ein beliebiges Vorzeichen zu geben.

Da nun für das einem Extrem entsprechende Wertsystem a, b, c . . . die linksstehende Differenz zeichenbeständig sein muss, so müssen für dieses Wertsystem alle ersten partiellen Differentialquotienten verschwinden.

Dieses Wertsystem ergibt sich demnach durch Auflösen des Gleichungssystems

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

. . . .

Verschwinden die partiellen Differentialquotienten, so verschwindet auch das totale Differential der Function. Für ein Extrem besteht somit auch die Gleichung

$$d u = 0.$$

Verschwinden alle ersten Differentialquotienten, so ist die bis zum zweiten Gliede durchgeführte Entwicklung nach Taylor:

$$f(x+h, y+k, z+l, \ldots) - f(x, y, z, \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k + \frac{\partial}{\partial z}l + \ldots\right)^2 f + R'$$

und nun können h, k, l, . . . wieder so klein gemacht werden, dass der erste Theil rechts vom Gleichheitszeichen größer wird wie R'.

Es wird somit die Function für das Wertesystem a, b, c, . . . für welches die ersten partiellen Differentialquotienten verschwinden, dann zu einem Maximum, wenn der nach h, k, l . . . vom zweiten Grade homogene Ausdruck

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k + \frac{\partial}{\partial z}l + \ldots\right)^2 f(x, y, z \ldots)$$

für alle Verbindungen von h, k, l . . . negativ wird und nur dann verschwindet, wenn h, k, l, . . . gleichzeitig verschwinden. Wird dieser Ausdruck positiv, so hat die Function für dasselbe Wertesystem ein Minimum.

Sollten für das in Rede stehende Wertesystem auch alle zweiten partiellen Differentialquotienten verschwinden, so muss auf die Untersuchung höherer Differentialquotienten eingegangen werden.

## § 47. Relative oder bedingte Maxima und Minima.

Gegeben sei eine Function von n Variablen

$$u = f(x, y, z, \ldots), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha$$

welche aber nicht von einander unabhängig, sondern an r bestimmte Bedingungsgleichungen ($r < n$)

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, y, z, \ldots) &= 0 \\ \psi(x, y, z, \ldots) &= 0 \\ \chi(x, y, z, \ldots) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta$$

. . . . . .

gebunden sind.

Diejenigen Maxima und Minima dieser Function (α), welche unter der Bedingung aufgesucht werden, dass die Variablen den r Gleichungen (β genügen, heißen bedingte oder relative Maxima, beziehungsweise Minima.

Da $r < n$, so können aus den Gleichungen (β ausgewählte r Variable durch die übrigen $n - r$ Variablen ausgedrückt und in die Function (α gesetzt werden. Hiedurch wird diese zu einer Function von $n - r$ von einander unabhängigen Variablen, und es können ihre Extreme in der zuvor angegebenen Weise aufgesucht werden.

Sind die Bedingungsgleichungen (β nicht auflösbar, dann muss zur Ermittlung der bedingten Extreme ein anderer Vorgang eingeschlagen werden, welcher überhaupt für alle Fälle zu empfehlen ist, weil er die Auflösung der Bedingungsgleichungen überflüssig macht.

Damit die Function

$$u = f(x, y, z, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

für ein bestimmtes Wertsystem von x, y, z, ... zu einem Extrem wird, ist zunächst unbedingt erforderlich, dass ihr totales Differential für dieses Wertsystem verschwindet.

Für ein Maximum oder Minimum muss somit zunächst die Gleichung bestehen:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \ldots = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Wären x, y, z ... von einander ganz unabhängig, so wären es auch die Differentiale dx, dy, dz ..., und es könnte der Gleichung nur durch das Verschwinden der partiellen Differentialquotienten genügt werden.

Nun sind aber die Variablen x, y, z, ... an die r Bedingungsgleichungen (β gebunden, mithin ihre Differentiale an die aus (β folgenden

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \ldots &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \ldots &= 0 \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial z} dz + \ldots &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

Aus den r Bedingungsgleichungen (δ, welche bezüglich der Differentiale linear sind, kann man r derselben durch die $n - r$ übrigen ausdrücken und in (γ setzen. Dann enthält (γ nur $n - r$ Diff-

rentiale, welche von einander unabhängig sind, kann also nur befriedigt werden durch das Verschwinden der Coefficienten dieser Differentiale.

Würde man thatsächlich diese n — r Coefficienten gleich Null setzen, so würde man n — r Gleichungen erhalten, zu welchen die r Bedingungsgleichungen (β treten. Aus den n — r + r, also n Gleichungen könnte man nun die Werte der n Variablen ermitteln, welche einem Extrem der Function entsprechen.

Vortheilhafter ist aber folgender Vorgang.

Multipliciert man jede der Gleichungen (δ mit einem unbestimmten Multiplicator, also beispielsweise die erste mit λ, die zweite mit μ, die dritte mit ρ u. s. w. und addiert die Gleichungen (γ und (δ, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \rho \frac{\partial \chi}{\partial x} + \ldots\right) dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} + \rho \frac{\partial \chi}{\partial y} + \ldots\right) dy +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} + \rho \frac{\partial \chi}{\partial z} + \ldots\right) dz + \ldots = 0.$$

Die r unbestimmten Multiplicatoren können nun r freigewählten Gleichungen unterworfen werden, und man wählt diese so, dass r der eingeklammerten Coefficienten in der letzten Gleichung verschwinden. Dadurch fallen r Differentiale aus der Gleichung heraus und die n — r verbleibenden sind dann von einander unabhängig.

Wegen der Unabhängigkeit dieser Differentiale müssen aber, damit die Gleichung befriedigt werde, auch ihre Coefficienten verschwinden.

Demzufolge müssen alle Coefficienten der Differentiale in der letzten Gleichung Null werden, wodurch n Gleichungen resultieren:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \rho \dfrac{\partial \chi}{\partial x} + \ldots = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \rho \dfrac{\partial \chi}{\partial y} + \ldots = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial z} + \rho \dfrac{\partial \chi}{\partial z} + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (\varepsilon$$

Zur Lösung der Aufgabe hat man nun n Gleichungen (ε und r Gleichungen (β, um die n Variablen und r unbestimmten Multiplicatoren zu berechnen, d. h. n + r Gleichungen und n + r Unbekannte, so dass die Aufgabe völlig bestimmt ist.

Die Gleichungen (ε werden erhalten, wenn die partiellen Differentialquotienten der Function

$$f(x, y, z, \ldots) + \lambda\varphi(x, y, z, \ldots) + \mu\psi(x, y, z, \ldots) + \ldots$$

gleich Null gesetzt werden, mithin geben die Auflösungen dieser Gleichungen diejenigen Werte von x, y, z, . . ., für welche die angeschriebene zusammengesetzte Function, in welcher die Variablen als von einander unabhängig angesehen werden können, ihre Extreme erlangt. Daher der Satz:

Das relative Maximum oder Minimum einer Function $u = f(x, y, z, \ldots)$, unter Einhaltung der Bedingungsgleichungen $\varphi(x, y, z, \ldots) = 0$, $\psi(x, y, z, \ldots) = 0 \ldots$ tritt für jenes Wertesystem der Variablen ein, für welches die Function

$$f(x, y, z, \ldots) + \lambda\varphi(x, y, z, \ldots) + \mu\psi(x, y, z, \ldots) + \ldots$$

zu einem Maximum oder Minimum wird.

Zur Bestimmung des relativen Maximums oder Minimums der Function u hat man somit das Maximum oder Minimum der zusammengesetzteu Function zu suchen.

**Beispiele:**

1. Ein rechtwinkliges Parallelepiped von gegebener Oberfläche w ist so zu gestalten, dass sein Volumen das möglichst größte wird.

Bezeichnet man die Längen der Seitenkanten dieses Parallelepipeds mit x, y, z, so ist sein Volumen:

$$V = x \,.\, y \,.\, z.$$

Dieses soll zu einem Maximum werden unter der Bedingung. dass

$$w = 2(xy + yz + xz),$$

was für diejenigen Werte von x, y und z eintritt, für welche die Function

$$xyz + 2\lambda(xy + yz + xz)$$

zu einem absoluten Maximum wird.

Setzt man die drei ersten partiellen Differentialquotienten dieser Function gleich Null, so erhält man die Gleichungen

$$yz + \lambda(y + z) = 0,$$
$$xz + \lambda(x + z) = 0,$$
$$xy + \lambda(x + y) = 0,$$

zu welchen noch die Bedingungsgleichung

$$2\,(x\,y + x\,z + y\,z) = w$$

hinzutritt. Aus den vier Gleichungen können nun die zu bestimmenden Werte von x, y und z gerechnet werden, ebenso auch der Wert des unbestimmten Multiplicators λ.

Multipliciert man die erste der Gleichungen mit x, die zweite mit y, die dritte mit z, so erhält man nach Addition derselben und Berücksichtigung der vierten:

$$3\,x\,y\,z + \lambda\,w = 0$$

$$\lambda = -\frac{3\,x\,y\,z}{w}.$$

Setzt man nun diesen Wert von λ in die unveränderten drei ersten Gleichungen, so erhält man nach leicht einzusehender Transformation:

$$3\,(x\,y + x\,z) = w,$$
$$3\,(x\,y + y\,z) = w,$$
$$3\,(x\,z + y\,z) = w.$$

Aus diesen Gleichungen findet man, wenn man die zweite von der ersten und von der dritten subtrahiert:

$$x\,z - y\,z = 0,$$
$$x\,y - x\,z = 0,$$

aus welchen schließlich

$$x = y = z$$

folgt.

Das Parallelepiped, welches bei gegebener Oberfläche das größte Volumen besitzt, ist demnach der Würfel.

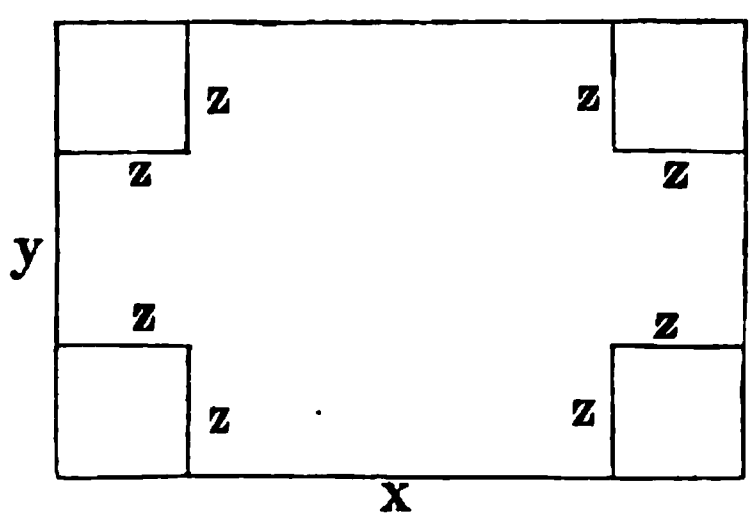
Dass es sich hier um kein Minimum handeln kann, ist ganz klar, denn dieses wäre Null.

2. Aus einer rechteckigen Tafel von gegebenem Verhältnis beider Dimensionen und gegebener Fläche sollen an den vier Ecken quadratische Ausschnitte derart gemacht werden, dass der aus dem Rest der Tafel gebildete parallelepipedische Hohlraum ein Maximum wird.

Bezeichnet man die Seitenlängen der Tafel mit x und y (Fig. 14) und die Seitenlänge eines quadratischen Ausschnittes mit z, so ist das Volumen des aus dem Rest der Tafel zu bildenden parallelepipedischen Körpers:

$$(x - 2\,z)\,(y - 2\,z)\,z.$$

Fig. 14.



Ist nun das Verhältnis der Seiten der Tafel $x : y = a : b$ und die Fläche derselben $\omega^2$, so sind die Größen x und y an die Bedingungen gebunden

$$b\,x - a\,y = 0,$$

$$x\,y = \omega^2.$$

Die gestellte Aufgabe erfordert das Auffinden des Maximums der Function

$$(x - 2\,z)\,(y - 2\,z)\,z$$

unter der Bedingung, dass

$$b\,x - a\,y = 0,$$

$$x\,y = \omega^2$$

ist, also das Auffinden des absoluten Maximums der Function

$$(x - 2\,z)\,(y - 2\,z)\,z + \lambda\,(b\,x - a\,y) + \mu\,(x\,y - \omega^2).$$

Bildet man die drei ersten partiellen Differentialquotienten dieser Function und setzt diese Null, so erhält man:

$$(y - 2\,z)\,z + b\,\lambda + y\,\mu = 0,$$

$$(x - 2\,z)\,z - a\,\lambda + x\,\mu = 0,$$

$$(x - 2\,z)\,(y - 2\,z) - 2\,z\,[x + y - 4\,z] = 0.$$

Zu diesen drei Gleichungen treten die beiden Bedingungsgleichungen hinzu:

$$b\,x - a\,y = 0,$$

$$x\,y - \omega^2 = 0,$$

so dass nun fünf Gleichungen vorhanden sind, aus welchen die fünf Unbekannten x, y, z, $\lambda$ und $\mu$ bestimmt werden können.

In dem hier vorliegenden Falle ist die Bestimmung von $\lambda$ und $\mu$ überflüssig, denn man findet aus den Bedingungsgleichungen

$$x = \omega \sqrt{\frac{a}{b}}; \qquad y = \omega \sqrt{\frac{b}{a}}$$

und erhält, wenn man diese Werte in die dritte Gleichung einführt:

$$12\,z^2 - 4\,z\,\omega \left[\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right] + \omega^2 = 0,$$

woraus:

$$z = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\,\omega\,\frac{a+b}{\sqrt{a\,b}} \pm \sqrt{\frac{1}{9}\,\omega^2\,\frac{(a+b)^2}{a\,b} - \frac{\omega^2}{3}}\right],$$

oder

$$z = \frac{1}{6}\,\omega\left[\frac{a+b}{\sqrt{a\,b}} \pm \sqrt{\frac{a^2 - a\,b + b^2}{a\,b}}\right]$$

folgt.

Nur für das negative Vorzeichen der Wurzel ist ein Maximum vorhanden; die Lösung mit dem positiven Zeichen ist unbrauchbar, denn das Volumen wird dann negativ.

**Aufgaben:**

1. Über der Hypotenuse c ist das größte rechtwinklige Dreieck zu construieren.

Lösung: Rechtwinkliggleichschenkliges Dreieck mit den Katheten $\frac{c}{2}\sqrt{2}$.

2. Auf einer Ellipse mit der Gleichung

$$b\,x^2 + a^2\,y - a^2\,b^2 = 0$$

sind 2 Punkte $P_1\,(x_1, y_1)$ und $P_2\,(x_2, y_2)$ gegeben, es ist ein dritter Punkt P der Ellipse so zu bestimmen, dass das Dreieck $P_1\,P_2\,P$ den möglichst größten Flächeninhalt hat.

Lösung: Punkt P muss Endpunkt des Durchmessers sein, welcher die Sehne $P_1\,P_2$ halbiert.

---

# II. Abtheilung.

## Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Aufgaben der Geometrie.

### 1. Abschnitt.

### Untersuchung des Laufes ebener Curven.

Der Lauf einer ebenen Curve ist bekannt, wenn man jeden ihrer Punkte (wenigstens mit hinreichender Genauigkeit) zu construieren und die Richtung der Tangente in demselben anzugeben vermag.

Ferner gehört hiezu die Kenntnis aller jener Punkte der Curve, die besondere Eigenschaften besitzen und unter dem Namen besondere Punkte zusammengefasst werden.

Die Tangenten in besonderen Punkten sind auch als besondere Tangenten zu betrachten.

Je nach Beschaffenheit der Curven bieten Parallel- oder Polarcoordinaten für die Untersuchung besondere Vortheile.

**§ 48. Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten und der Gleichung der Curve in der entwickelten Form:**

$$y = f(x).$$

I. Die Coordinaten einzelner Punkte einer durch ihre Gleichung gegebenen Curve werden aus ihrer Gleichung berechnet.

Man findet nämlich aus

$$y = f(x)$$

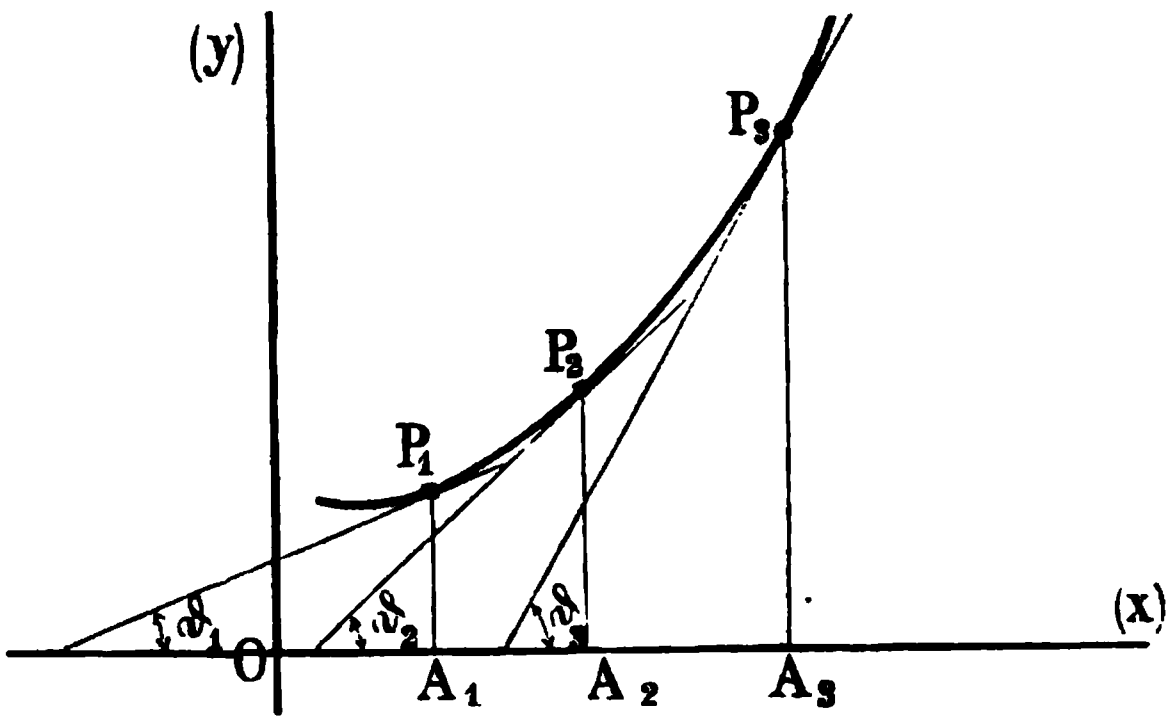
die den Abscissen $x_1$, $x_2$, $x_3$, . . . entsprechenden Ordinatenwerte $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$ . . .

Durch Auftragen dieser Größen construiert man die Punkte $P_1$ $P_2$, $P_3$, . . . der Curve (Fig. 15).

Die Richtung der Tangente in irgend einem Punkte der Curve ist durch den Winkel $\vartheta$ (Tangentenwinkel), den sie mit der Abscissenaxe einschließt, bestimmt. Da nun bekanntlich

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{dy}{dx} = f'(x),$$

Fig. 15.




genügt die Gleichung der Curve auch zur Angabe der Richtung der Tangente in den einzelnen Punkten derselben.

Man hat:

$$\operatorname{tang}\vartheta_1 = f'(x_1),\ \operatorname{tang}\vartheta_2 = f'(x_2),\ \operatorname{tang}\vartheta_3 = f'(x_3)\ldots^{*})$$

Ist $\vartheta = 0$, so ist die Tangente im betreffenden Punkte parallel zur Abscissenaxe (x), der Punkt selbst ist dann ein höchster oder tiefster Punkt seiner Umgebung. Umgekehrt findet man durch Auflösen der Gleichung $f'(x) = 0$ die Abscissen aller Punkte dieser Art, die meistens schon als besondere Punkte anzusehen sind.

Welche von diesen Punkten höchste, und welche tiefste Punkte sind, kann nach der Theorie der Maxima und Minima entschieden werden. da für die ersteren $f''(x)$ einen negativen, für die letzteren

*) $f'(x_i)$ wird erhalten, wenn man in $f'(x)$ $x_i$ für x substituiert.

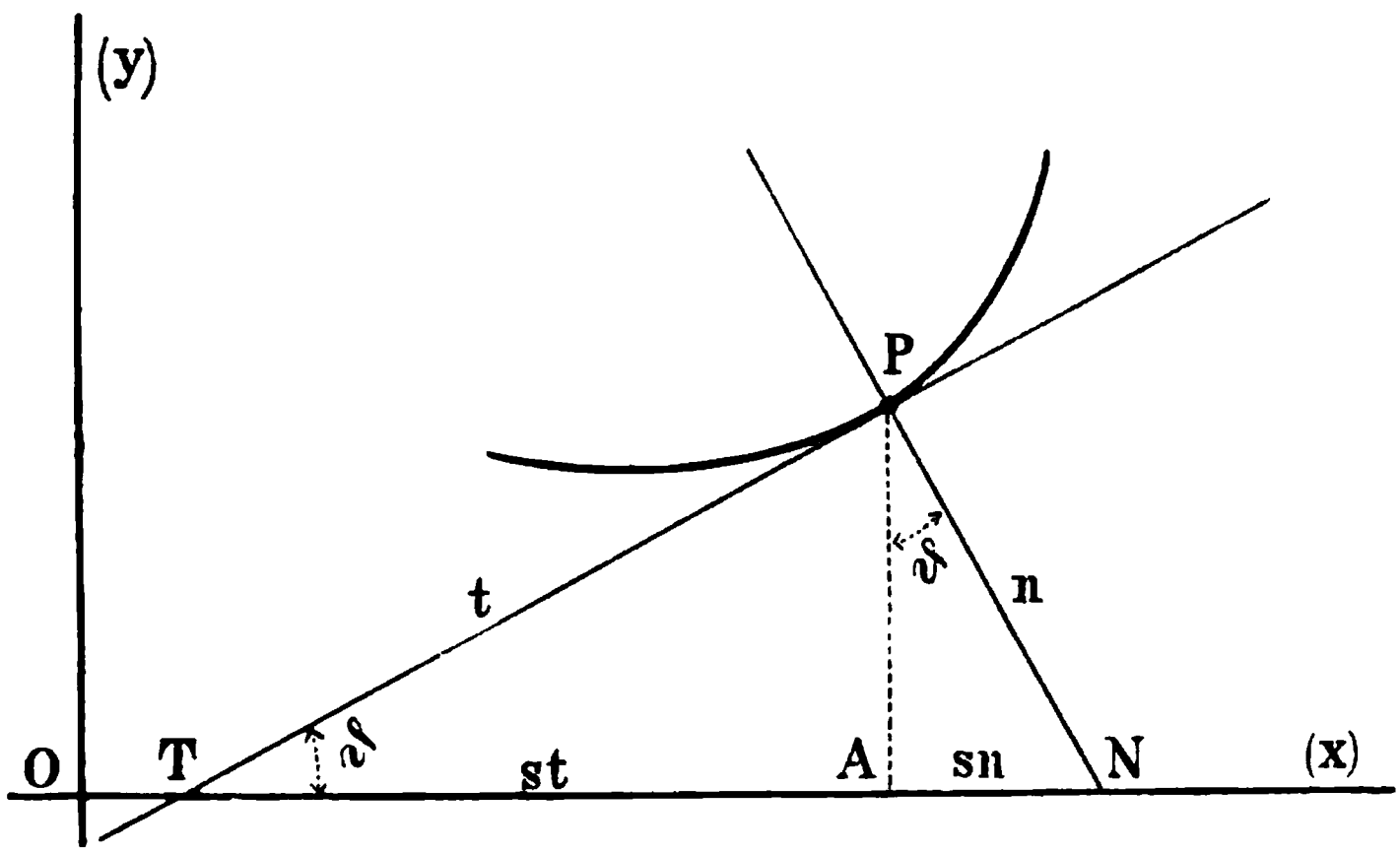
einen positiven Wert besitzt. Meistens wird man dies direct aus der Lage der bereits construierten Punkte erkennen.

Durch den Winkel $\vartheta$ ist wohl die Tangente genau bestimmt, für die Construction derselben eignen sich aber in vielen Fällen andere Bestimmungsstücke derselben besser, es sind dies: das Tangentenstück, das Normalenstück, die Subtangente und die Subnormale.

Wird auf die Tangente im Punkte P einer Curve die Senkrechte errichtet, so nennt man die letztere die Normale der Curve in diesem Punkte; durch die Tangente ist also die Normale der Curve bestimmt, und umgekehrt.

Verlängert man die Tangente und die Normale bis zu ihren Schnittpunkten T und N (Fig. 16) mit der Abscissenaxe, so werden

Fig. 16.




dadurch die Strecken T P und P N abgeschnitten, welche Tangentenstück, beziehungsweise Normalstück genannt werden; die Projectionen dieser Strecken auf die Abscissenaxe A T und A N heißen Subtangente und Subnormale.

Diese vier Bestimmungsstücke sollen mit t, n, st und sn bezeichnet werden. Eines derselben genügt für die Construction der Tangente und der Normale.

Da

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{dy}{dx} = f'(x) = y',$$

so ist

$$st = \frac{y}{\operatorname{tang}\vartheta} = -\frac{y}{y'},$$

$$sn = y \operatorname{tang}\vartheta = y\,y',$$

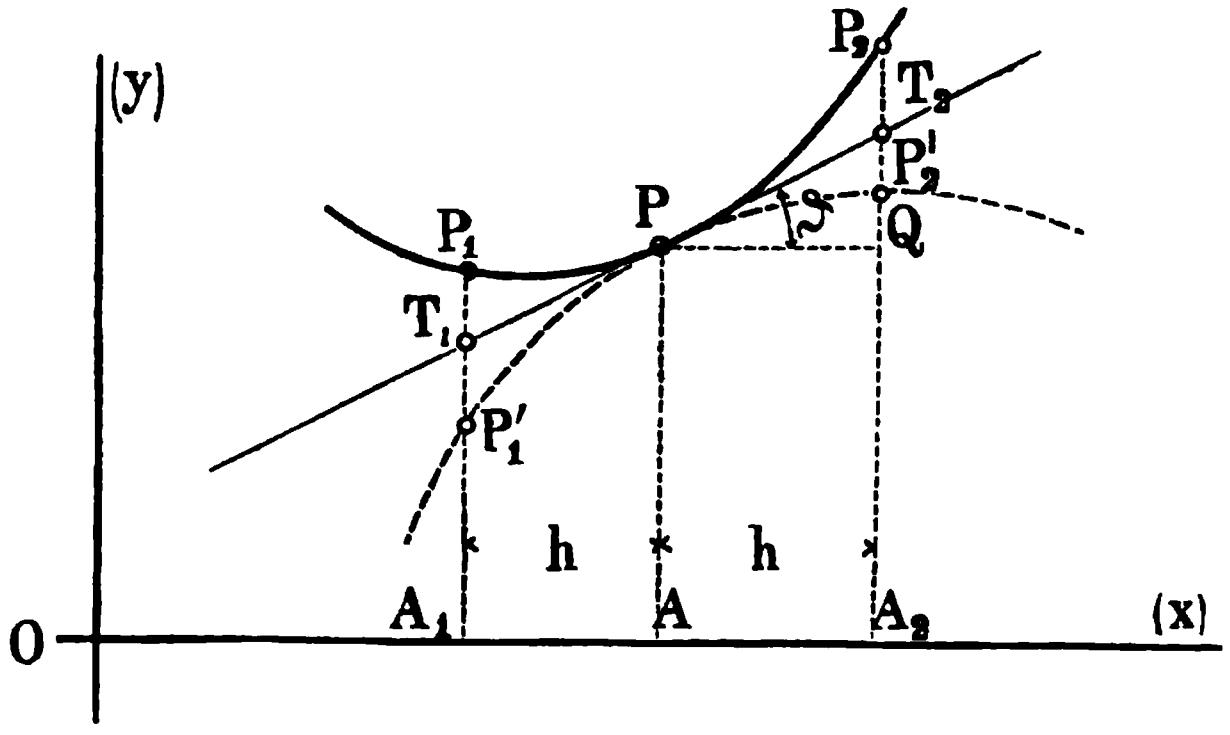
$$t = \sqrt{y^2 + st^2} = \sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2},$$

$$n = \sqrt{y^2 + sn^2} = \sqrt{y^2 + (yy')^2} = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Um Fehler bei der Verbindung der einzelnen aufgetragenen Curvenpunkte zu vermeiden, wird es häufig nothwendig, den Sinn der Krümmung der Curve in diesen Punkten zu bestimmen.

Eine Curve soll nach aufwärts oder abwärts gekrümmt (concav oder convex) heißen, je nachdem sie ihre Öffnung in der Richtung der positiven oder negativen Ordinatenaxe gewendet hat. So ist die in der Fig. 17 voll ausgezogene Curve nach aufwärts, die gestrichelte nach abwärts gekrümmt.

Fig. 17.




Demgemäß ist eine Curve in einem Punkte P nach aufwärts gekrümmt, wenn sie sich in der Umgebung dieses Punktes oberhalb der Tangente in demselben befindet, sie ist in diesem Punkte nach abwärts gekrümmt, wenn sie in der Umgebung beiderseits dieses Punktes unterhalb der Tangente liegt.

Dann müssen aber die in der Richtung der Ordinatenaxe gemessenen Abstände $T_1 P_1$, $T_2 P_2$ der dem P benachbarten Curvenpunkte $P_1$ und $P_2$ von den Punkten der Tangente $T_1$ und $T_2$, welche dieselben Abscissen haben, wie die ersteren, im ersten Falle positiv. im zweiten aber negativ sein.

Durch die Berechnung dieser Abstände erlangt man ein Mittel, um den Sinn der Krümmung in dem Punkte P zu erkennen. Da

$$T_2P_2 = A_2P_2 - A_2T_2 = A_2P_2 - (A_2Q + QT_2);$$

zufolge der Curvengleichung aber

$$A_2Q = AP = f(x),$$
$$A_2P_2 = f(x+h),$$
$$QT_2 = h \operatorname{tang} \vartheta = h f'(x),$$

findet man

$$T_2P_2 = f(x+h) - f(x) - h f'(x),$$

oder, wenn $f(x+h)$ nach Taylor entwickelt wird,

$$T_2P_2 = \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \ldots$$

Wie bereits bei der Theorie der Maxima und Minima angeführt, kann h immer so klein angenommen werden, dass das Vorzeichen der Entwicklung rechts durch das Vorzeichen des ersten Gliedes bestimmt wird, in welchem h in der zweiten Potenz auftritt.

Demnach ergibt sich für $T_2P_2$ dasjenige Vorzeichen, welches $f''(x)$ im Punkte P hat, und zwar ohne Rücksicht darauf, ob h positiv oder negativ ist, d. h. ob ein Punkt $P_1$ links oder ein Punkt $P_2$ rechts von P betrachtet wird.

Eine Curve ist somit in einem Punkte nach aufwärts gekrümmt, wenn der zweite Differentialquotient $f''(x)$ in demselben positiv ist, sie ist nach abwärts gekrümmt, wenn dieser Differentialquotient einen negativen Wert besitzt.

Ein besonderer Fall tritt ein für

$$f''(x) = 0.$$

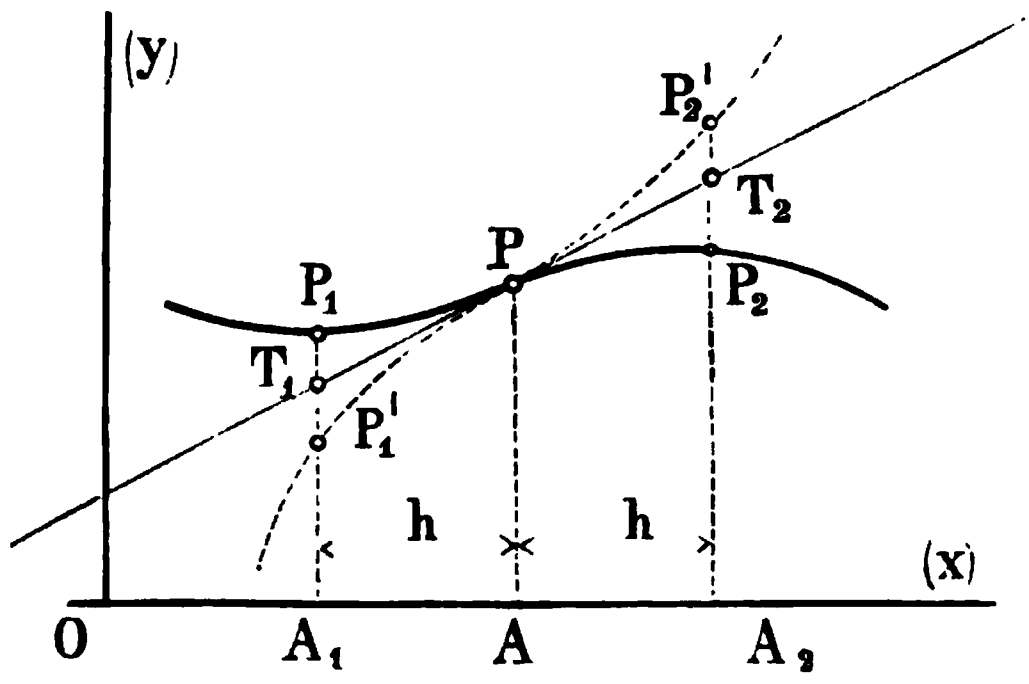
Dann hat man nämlich

$$T_2P_2 = \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(IV)}(x) + \ldots$$

und das Vorzeichen von $T_2P_2$ (Fig. 18) wird für hinreichend kleine h vom ersten Gliede rechts, also sowohl von h als auch von $f'''(x)$ abhängig.

Der Abstand TP wechselt mit h das Vorzeichen, es müssen somit die Abstände $T_1P_1$ und $T_2P_2$ verschieden bezeichnet sein. Die Curve übergeht von einer Seite der Tangente auf die andere, also von der Krümmung nach aufwärts in jene nach abwärts oder umgekehrt.

Fig. 18.

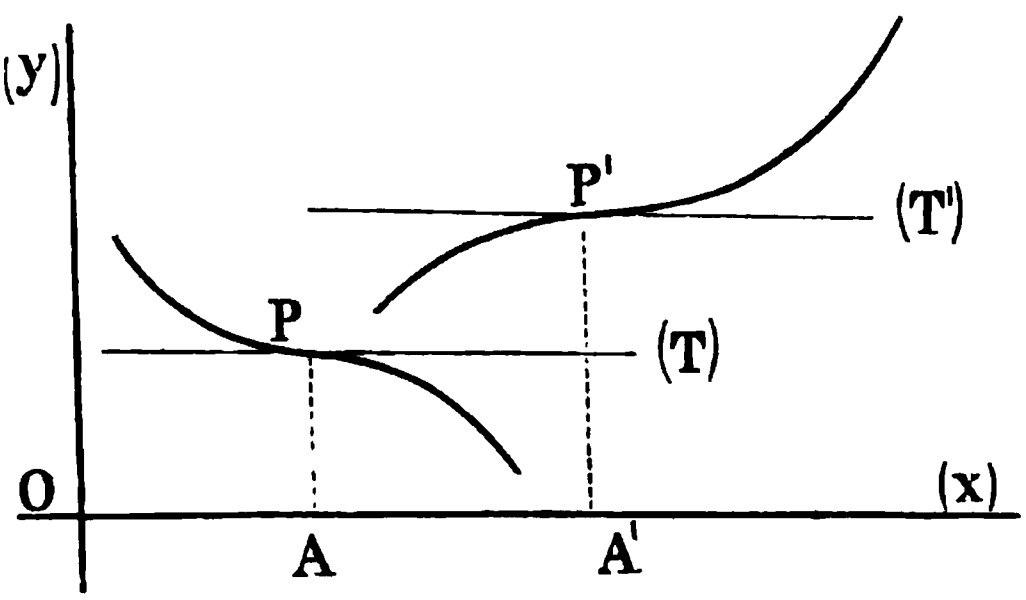


Der Punkt P wird in diesem Falle **Wendepunkt** oder **Inflexionspunkt** genannt. Die Tangente in demselben heißt **Wende-** oder **Inflexionstangente.**

Ist $f'''(x) > 0$, dann ist $\overline{T_1 P_1}' < 0$; $\overline{T_2 P_2}' > 0$, die Curve geht von der Krümmung nach abwärts in jene nach aufwärts über (in der Figur gestrichelt). Ist hingegen $f'''(x) < 0$, so hat man $\overline{T_1 P_1} > 0$ und $\overline{T_2 P_2} < 0$. die Curve geht aus der Krümmung nach aufwärts in jene nach abwärts über (in der Figur voll gezogen).

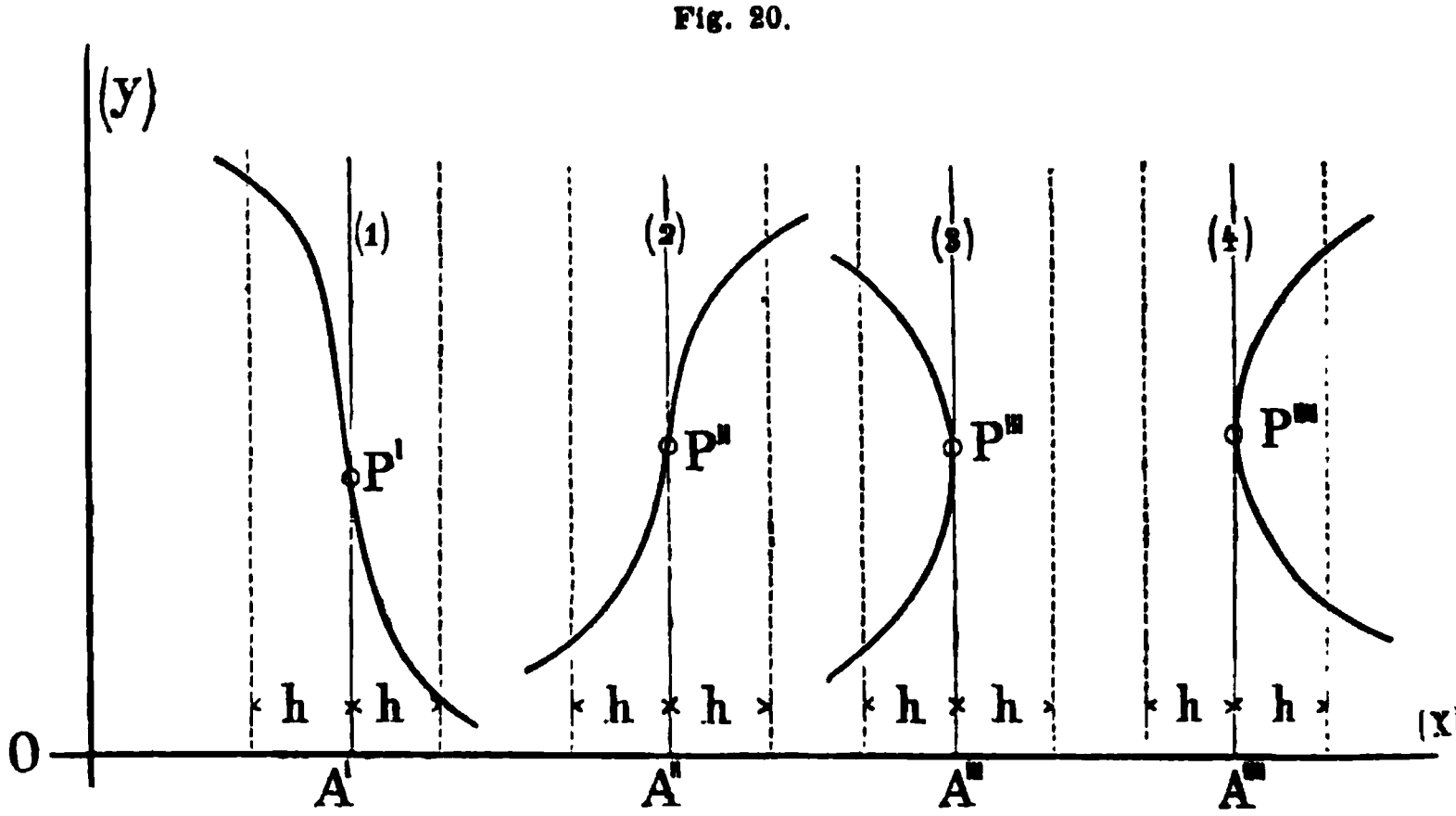
Selbstverständlich kann die Wendetangente jede beliebige Richtung haben, also auch zur Abscissenaxe oder zur Ordinatenaxe parallel sein. Im ersten Falle ist $\text{tang}\,\vartheta = 0$, d. h. $f'(x) = 0$ und man sieht. dass die aus der Gleichung $f'(x) = 0$ berechneten Werte von x nicht immer höchste oder tiefste Punkte geben, denn verschwindet für einen derselben auch $f''(x)$, ohne dass gleichzeitig $f'''(x)$ Null wird, dann hat man in diesen Punkten eine zur Abscissenaxe parallele Wendetangente, also einen der in der nebenstehenden Fig. 19 gezeichneten Fälle.

Fig. 19.




Ist die Tangente im Punkte P zur Ordinatenaxe parallel, also zur Abscissenaxe senkrecht, so ist $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, also $\text{tang}\,\vartheta = \infty$. d. h. $f'(x) = \infty$ und man hat dann zumeist mit einem der vier in der Fig. 20 gezeichneten Fälle

Fig. 20.



zu thun. Welcher dieser Fälle eintritt, muss durch eine besondere Untersuchung ermittelt werden.

Diese Untersuchung erstreckt sich auf $f(x+h)$ und $f(x-h)$, wobei für x jener Wert zu setzen ist, für welchen $f'(x)$ unendlich wird. Ergeben sich sowohl für $f(x+h)$ als auch $f(x-h)$ reale Werte, von welchen der eine größer und der andere kleiner ist als $f(x)$, so ist der Punkt ein Wendepunkt (Fig. 20, Fall 1, 2). Resultieren hingegen für $f(x+h)$ oder $f(x-h)$ imaginäre Werte, so tritt der Fall 4 oder 3 ein. Sind die Werte $f(x+h)$ und $f(x-h)$ beide größer oder kleiner als $f(x)$, dann ist der Punkt eine Spitze wie C und B in Fig. 9. Ergeben sich aber sowohl für $f(x+h)$ als $f(x-h)$ je zwei reale Werte, so stoßen in dem Punkte zwei Curvenäste zusammen und haben in demselben eine gemeinschaftliche zur y-Axe parallele Tangente.

Sollen alle Inflexionspunkte einer durch ihre Gleichung gegebenen Curve ermittelt werden, so wird die Gleichung $f''(x)=0$ aufgestellt, deren Auflösungen die Abscissen solcher Punkte geben, wenn sie nicht $f'''(x)$ gleichzeitig zu Null machen. Im letzteren Falle ist nur dann eiu Inflexionspunkt vorhanden, wenn auch $f^{IV}(x)=0$, oder wenn bei mehreren aufeinander folgenden verschwindenden Differentialquotienten der erste nicht verschwindende von ungerader Ordnung ist. Gibt es einen Wert des x, für welchen $f'(x)=\infty$ wird, so muss der Fall, wie angeführt, besonders untersucht werden.

Die Inflexionspunkte sind auch als besondere Punkte anzusehen.

Andere Arten von besonderen Punkten werden in einem späteren Paragraphen besprochen werden.

**Beispiele:**

*1. Logarithmische Linie.*

Die Gleichung dieser Curve ist

$$y = m\, e^{\frac{x}{m}}.$$

Man hat also:

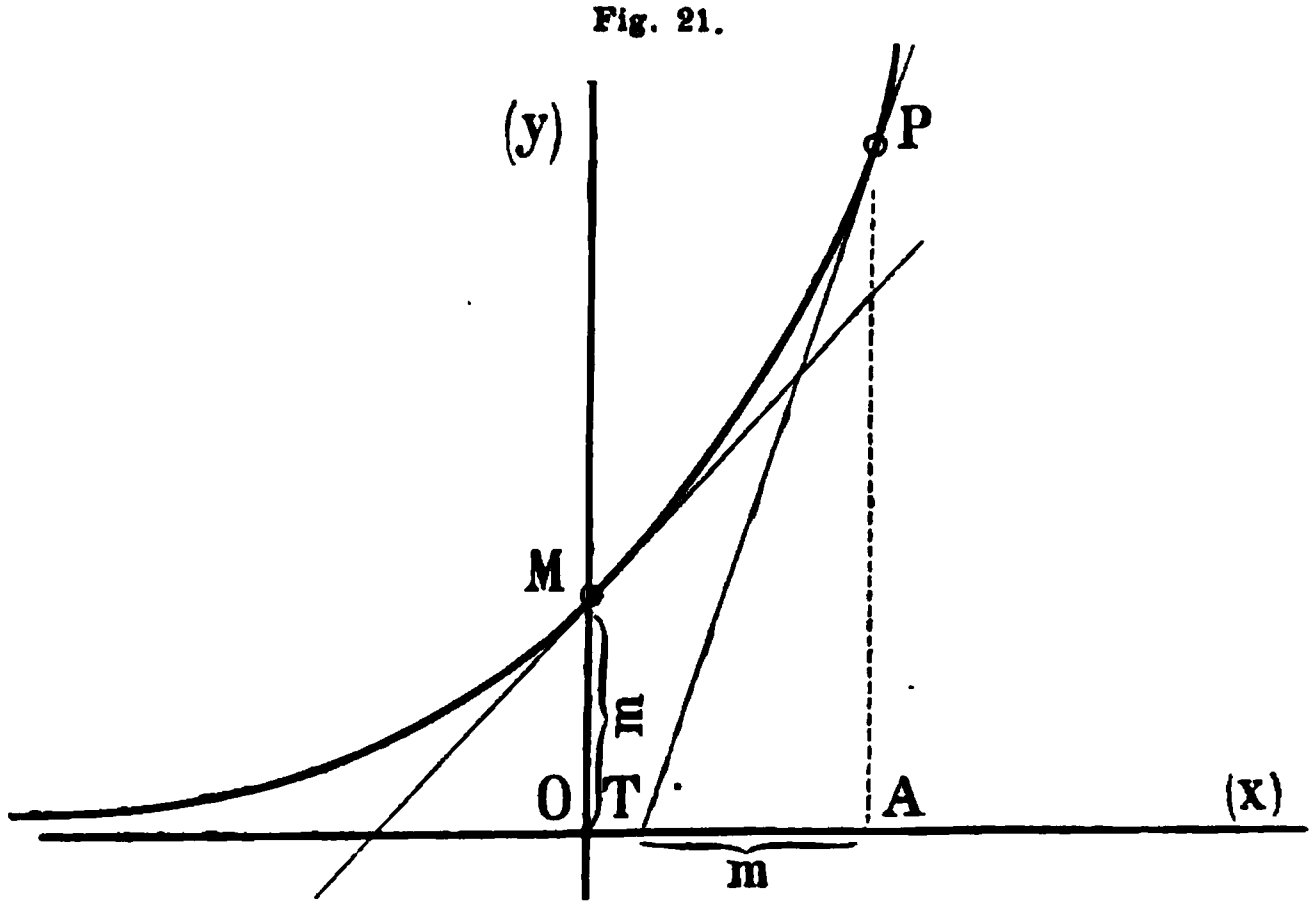
$$y' = e^{\frac{x}{m}},$$

$$y'' = \frac{1}{m} e^{\frac{x}{m}}$$

und ersieht daraus, dass y' und y'' für endliche Werte des x weder Null noch unendlich werden können. Daraus folgt, dass die Curve keine höchsten und tiefsten Punkte besitzt und keine Inflexionspunkte

aufweist. Weil y'' für jeden Wert des x positiv bleibt, ist die Curve in ihrem ganzen Verlaufe nach aufwärts gekrümmt. (Fig. 21.)

Fig. 21.




Aus der Gleichung der Curve findet man für

$$x = -\infty, \quad y = 0,$$
$$x = 0, \quad y = m,$$
$$x = \infty, \quad y = \infty.$$

Während also x die Werte von $-\infty$ bis 0 und dann bis $+\infty$ durchläuft, nimmt y von 0 bis m und dann unbeschränkt zu. Die Curve nähert sich der negativen x-Axe asymptotisch, schneidet die Ordinatenaxe im Abstande m vom Ursprunge und hat, weil $y' = \tang \tau$ für $x = 0$ den Wert 1 annimmt, in diesem Schnittpunkte eine unter $\frac{\pi}{4}$ gegen die Abscissenaxe geneigte Tangente.

Für die Subtangente erhält man:

$$st = -\frac{y}{y'} = -\frac{m\, e^{\frac{x}{m}}}{e^{\frac{x}{m}}} = m.$$

Die Subtangente der logarithmischen Linie ist somit constant und gleich dem Stücke, das die Curve auf der Ordinatenaxe abschneidet. Man construiert daher die Tangente in einem Punkte P der logarithmischen Linie, indem man die Strecke $m = \overline{OM}$ vom Fußpunkte der Ordinate auf der x-Axe entsprechend aufträgt und den so erhaltenen Punkt T mit P verbindet.

*2. Die Parabel.*

Die gegebene Curvengleichung sei

$$y^2 = 2px.$$

Aus dieser folgt:

$$2\,y\,dy = 2\,p\,dx,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{p}{\sqrt{2\,p\,x}} = \sqrt{\frac{p}{2x}},$$

$$y'' = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{2x^3}} = -\sqrt{\frac{p}{8x^3}}.$$

Weil weder $y'$ noch $y''$ für endliche x Null werden können, hat die Curve keine höchsten und tiefsten Punkte und keine Inflexionspunkte.

Für $x = 0$ wird $y' = \infty$, also besondere Untersuchung nothwendig. Lässt man an dieser Stelle x in $x - h$ übergehen, so erhält man $y^2 = -2\,p\,h$, somit für y imaginäre Werte. Die Curve hat also für $x = 0$, d. h. im Ursprung (weil für $x = 0$ auch $y = 0$ ist) einen Scheitelpunkt, in welchem die Tangente wegen $y' = \infty$ senkrecht zur x-Axe steht, also die y-Axe ist.

Für jeden positiven Wert des x folgen aus der Gleichung zwei entgegengesetzt gleiche Werte von y, die Curve ist somit bezüglich der x-Axe symmetrisch. Mit wachsendem x wächst auch y beständig.

Bestimmt man die Subtangente und die Subnormale, so findet man:

$$-st = \frac{y}{y'} = \frac{y}{\frac{p}{y}} = \frac{y^2}{p} = \frac{2\,p\,x}{p} = 2x,$$

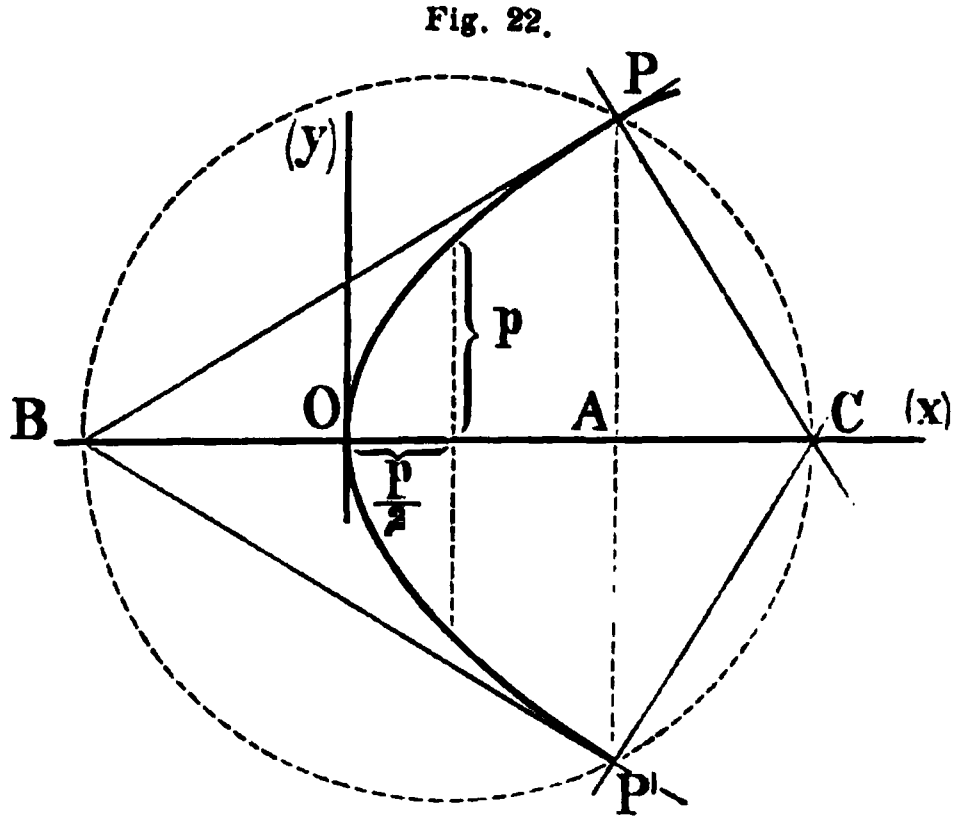
$$sn = y\,y' = y \cdot \frac{p}{y} = p,$$

dass die Subtangente gleich der doppelten Abscisse des Punktes, die Subnormale constant und gleich dem Parameter p ist.

Dies gibt eine einfache Construction für Tangente oder Normale und auch für die Punkte der Parabel.

Will man nämlich die zur Abscisse $x = OA$ (Fig. 22) zugehörigen Punkte der Parabel finden, so trägt man von A aus nach der positiven Seite der x-Axe den Parameter p und nach der negativen Seite die doppelte Abscisse $2x$ auf. Dadurch erhält man die Strecke BC. Beschreibt man nun über dieser Strecke als Durchmesser einen Kreis, so sind seine Schnittpunkte P, P' mit der aus A zur y-Axe parallelen Geraden, Punkte der Parabel. Die Verbindungslinien dieser Punkte mit B und C geben die Tangente, beziehungsweise Normale in denselben.

Fig. 22.



*3. Die Kettenlinie.*

Die Gleichung dieser Curve lautet:

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right),$$

demnach ist

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right),$$

$$y'' = \frac{1}{2m}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right).$$

Man sieht gleich, dass für $x = 0$, $y' = 0$ wird, ohne dass $y''$ gleichzeitig verschwindet, mithin hat die Curve im Schnittpunkte mit der y-Axe einen höchsten oder tiefsten Punkt.

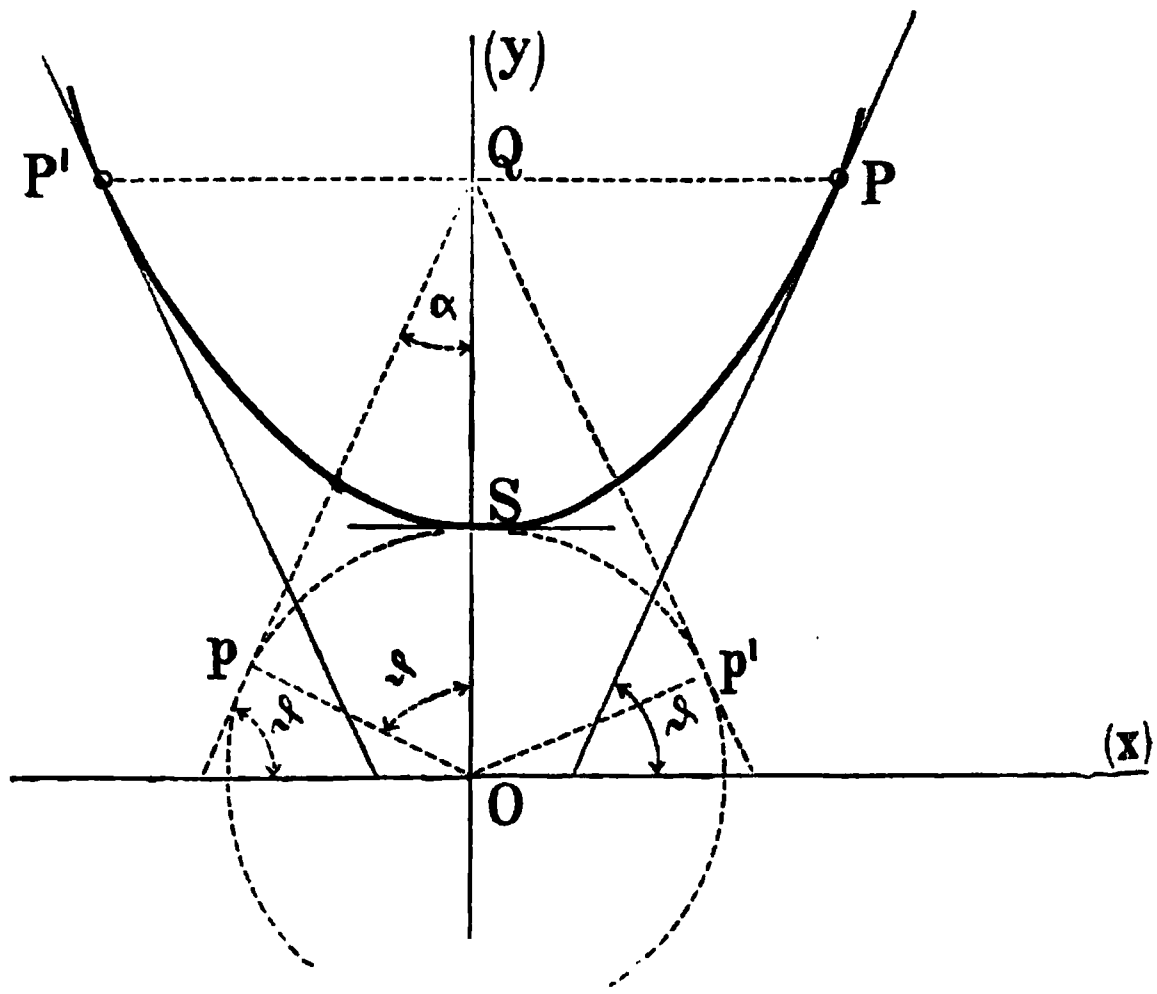
$y''$ kann für keinen endlichen Wert von x Null und $y'$ nicht unendlich werden, mithin hat die Curve keinen Wendepunkt, sie ist in ihrem ganzen Verlaufe nach aufwärts gekrümmt, weil für ein positiv vorausgesetztes m $y''$ beständig positiv bleibt.

Aus der Gleichung ergibt sich für

$$x = -\infty, \quad y = \infty,$$
$$x = 0, \quad y = m,$$
$$x = \infty, \quad y = \infty.$$

Weiters ergeben sich für gleiche positive und negative Werte des x dieselben Werte von y, d. h. die Curve ist bezüglich der y-Axe symmetrisch. (Fig. 23.)

Fig. 23.



Die Construction der Tangente in irgend einem Punkte P der Kettenlinie, ergibt sich in folgender Weise: Es ist

$$\left(\frac{y}{m}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{m}} + e^{-\frac{2x}{m}} + 2\right),$$

$$(y')^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{m}} + e^{-\frac{2x}{m}} - 2\right).$$

Durch Subtraction erhält man

$$\frac{y^2}{m^2} - y'^2 = 1, \text{ also } y'^2 = \frac{y^2 - m^2}{m^2}$$

und

$$y' = \operatorname{tang}\vartheta = \sqrt{\frac{y^2 - m^2}{m^2}}.$$

Führt man aus dem Schnittpunkte Q der Parallelen zur x-Axe aus P mit der y-Axe die Tangente Q p an den Kreis aus O vom Radius $OS = m$, so ist diese parallel zur Tangente an die Kettenlinie im Punkte P.

Denn in dem Dreiecke OpQ ist $Op = m$, $OQ = y$ und bei p ein rechter Winkel, also $pQ = \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{Op}^2} = \sqrt{y^2 - m^2}$ und $\operatorname{tang}\alpha = \frac{pO}{pQ} = \frac{m}{\sqrt{y^2 - m^2}}$. Da nun $\alpha + \vartheta = \frac{\pi}{2}$, so ist $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, also $\operatorname{tang}\vartheta = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{\sqrt{y^2 - m^2}}{m}$.

*4. Die Wahrscheinlichkeitslinie.*

Ihre Gleichung lautet:

$$y = e^{-x^2},$$

demnach ist

$$y' = -2x\,e^{-x^2},$$

$$y'' = 2(2x^2 - 1)\,e^{-x^2}.$$

Daraus ist direct zu ersehen, dass für $x = 0$

$$y' = 0 \text{ und } y'' = -2$$

ist, d. h. dass die Curve in ihrem Schnittpunkte mit der y-Axe einen höchsten Punkt hat.

Auch für $x = \pm\infty$ findet man ($x = \frac{1}{z}$ setzend als wahren Wert) $y' = 0$, wodurch unendlich ferne tiefste Punkte angezeigt werden.

Ferner wird $y'' = 0$, wenn $2x^2 - 1 = 0$ ist, also wenn $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, somit hat die Curve in den Abständen $\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ von der y-Axe zwei Inflexionspunkte. Für diese Punkte ergeben sich die Ordinaten aus der Gleichung der Curve mit

$$y = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Der Neigungswinkel der Wendetangente als Tangente in die Wendepunkten ist bestimmt durch

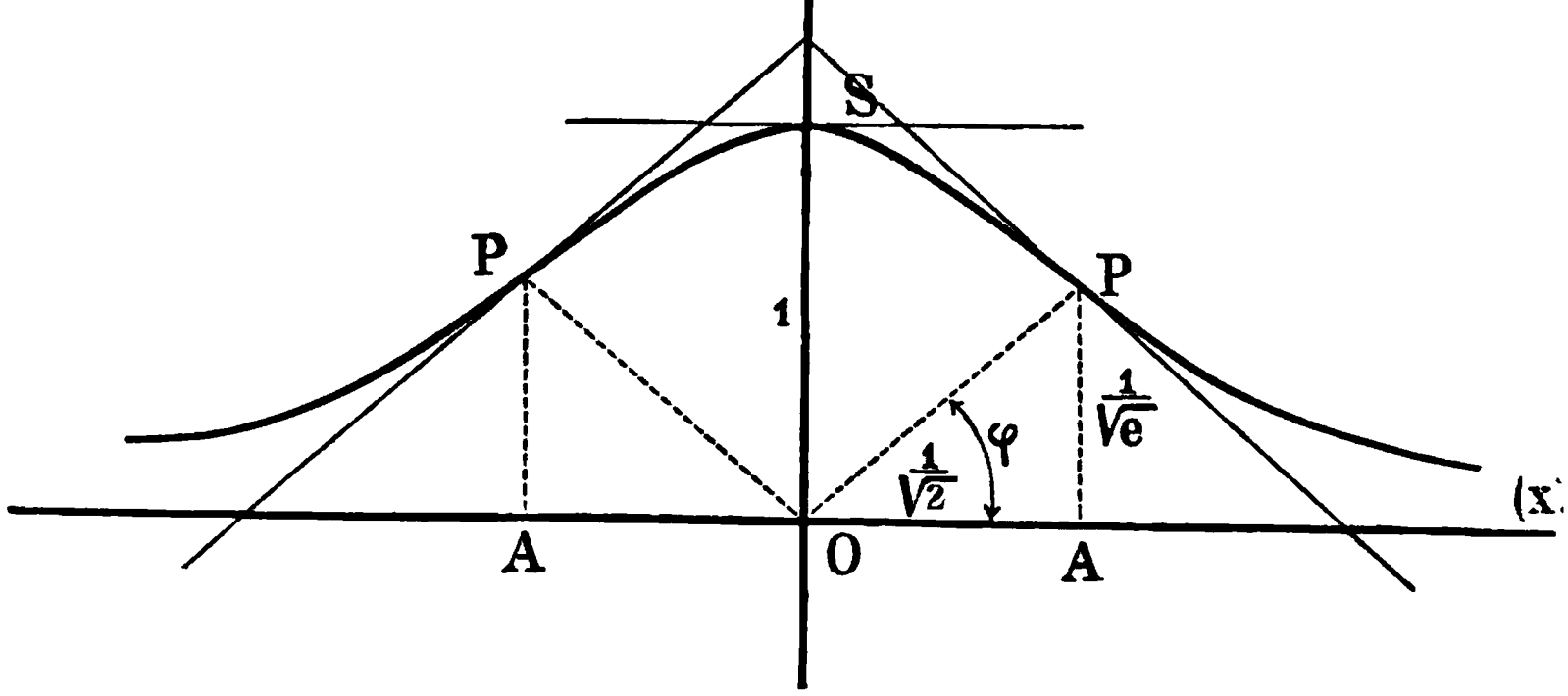
$$\operatorname{tang}\vartheta = y' = \mp 2\sqrt{\frac{1}{2}}.e^{-\frac{1}{2}} = \mp\sqrt{\frac{2}{e}}.$$

Für den Winkel $\varphi$ (Fig. 24), welchen der Strahl aus dem Ursprung 0 nach dem Inflexionspunkte P mit der x-Axe bildet, hat man:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\pm\sqrt{\frac{1}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{2}{e}},$$

somit ist jeder dieser Strahlen OP parallel zur Tangente desjenigen Inflexionspunktes, durch den er nicht geht.

Fig. 24.




Aus der Gleichung der Curve folgt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| für | $x = \pm\infty$ | | $y = 0$ |
| | $x = 0$ | | $y = 1$ |
| | $x = \pm a$ | dasselbe | $y = e^{-a^2}$; |

mithin verläuft die Curve zur x-Axe beiderseits asymptotisch und ist zur y-Axe symmetrisch.

II. Bei den bisher angeführten Beispielen war die Curve analytisch stets dadurch definiert, dass die Ordinate y ihrer Punkte als Function der Abscisse x derselben gegeben war.

In vielen Fällen ist es vortheilhafter, die sogenannte parametrische Darstellungsweise der Curve zu wählen, welche darin besteht, dass sowohl die Ordinaten y als auch die Abscissen x der Curvenpunkte als Functionen eines variablen Parameters t dargestellt werden.

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t).$$

Demselben Parameterwerte t entsprechen zusammengehörige Werte von x und y.

Aus der parametrischen Darstellung der Curve kann durch Elimination von t sofort auf $F(x, y) = 0$ oder auf die früher angegebene Form $y = f(x)$ übergegangen werden, was aber für die Untersuchung des Laufes der Curve nicht nothwendig ist, da alle den Lauf charakterisierenden Größen aus den zwei Parametergleichungen direct ermittelt werden können.

Es ist nämlich:

$$dx = \varphi'(t)\,dt,$$
$$dy = \psi'(t)\,dt,$$

demnach

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

(siehe § 11, Formel 41) u. s. w.

**Beispiele:**

*1. Die Cykloide.*

Diese Curve beschreibt ein Punkt des Kreises, wenn der Kreis auf einer Geraden rollt, ohne hiebei zu gleiten.

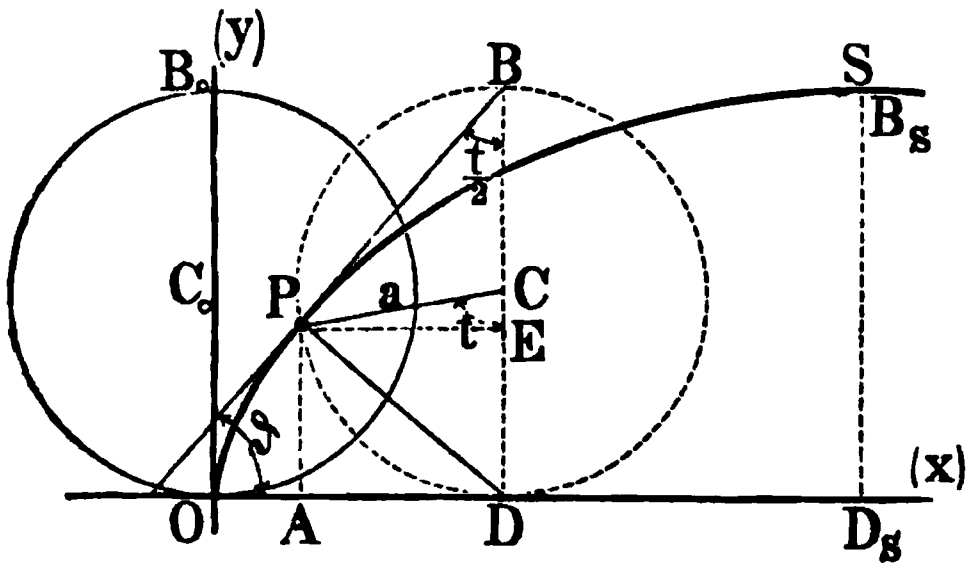
Ist der Punkt speciell ein Punkt des Kreisumfanges, so beschreibt er die sogenannte gemeine Cykloide und diese soll hier untersucht werden.

Die Kenntnis der Entstehungsweise genügt für die Aufstellung der Gleichung der Curve.

Der Einfachheit halber sei die Gerade, auf welcher der Kreis vom Radius a rollt, zur x-Axe des Coordinatensystems und der Kreis in seiner Anfangslage derart gewählt, dass er in dem die Cykloide erzeugenden Punkte O seines Umfanges die x-Axe berührt.

Gelangt der Kreis beim Rollen in die in der Fig. 25 gestrichelt gezeichnete Lage, so kommt der die Cykloide beschreibende Punkt O auf die Stelle P, wodurch der diesen Punkt mit dem Kreismittelpunkt verbindende Radius (ursprünglich $C_0 O$) in die Lage CP gelangt, welche durch den Winkel t, Wälzungswinkel genannt, bestimmt wird.

Fig. 25.




Da der Kreis rollt, ohne zu gleiten, muss OD gleich sein dem abgewickelten Bogen PD, also:

$$OD = \text{arc } PD = at.$$

Wählt man den Punkt O zum Ursprung des Coordinatensystems, so erhält man für die Coordinaten eines Punktes P der Curve folgende Beziehungen:

$$x = OA = OD - AD = OD - PE = at - a \sin t,$$
$$y = AP = DE = DC - EC = a - a \cos t.$$

In parametrischer Darstellungsweise erscheint somit die gemeine Cykloide durch folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t).$$

Durch Elimination von t aus diesen beiden Gleichungen könnte die Cykloide durch eine Gleichung zwischen x und y ausgedrückt werden, was aber nicht zweckmäßig ist, weil diese Gleichung eine ziemlich complicierte Form erlangt. $\left[x = a\left\{\arccos(a - y) - \sqrt{1 - (a - y)^2}\right\}\right]$.

Die zur Untersuchung des Laufes der Curve erforderlichen Differentialquotienten können direct aus den Parametergleichungen gebildet werden.

Es ist nämlich:

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt, \quad d^2x = a \sin t\, dt^2,$$
$$dy = a \sin t\, dt, \quad d^2y = a \cos t\, dt^2,$$

demnach

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2(1-\cos t)\cos t - a^2\sin^2 t}{a^3(1-\cos t)^3} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

Daraus ist zu ersehen, dass, wenn nur ein Curvenast, welcher durch einmaliges Abrollen des Kreises entsteht, betrachtet wird,

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{für} \quad t = \pi,$$

und dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ für keinen Wert von t verschwindet und beständig negativ bleibt.

Die Curve ist somit, was aus der Entstehungsart direct erkannt werden kann, in ihrem ganzen Verlaufe nach abwärts gekrümmt und erreicht für den Wälzungswinkel $t = \pi$, also, wenn der Kreis seinen halben Umfang abgerollt hat, den höchsten Punkt S. Die Coordinaten des höchsten Punktes sind $x_s = a\pi$ und $y_s = a - a\cos\pi = 2a$ u. s. w.

Der Neigungswinkel $\vartheta$ der Tangente im Punkte P der Cykloide ist gegeben durch

$$\operatorname{tang}\vartheta = y' = \operatorname{cotg}\frac{t}{2}.$$

Mithin ist die Verbindungsgerade von B mit P die Tangente, jene von P mit D die Normale im Punkte P der Curve. $\left(\vartheta + \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2}, \right.$ also $\left.\operatorname{tang}\vartheta = \operatorname{cotg}\frac{t}{2}.\right)$

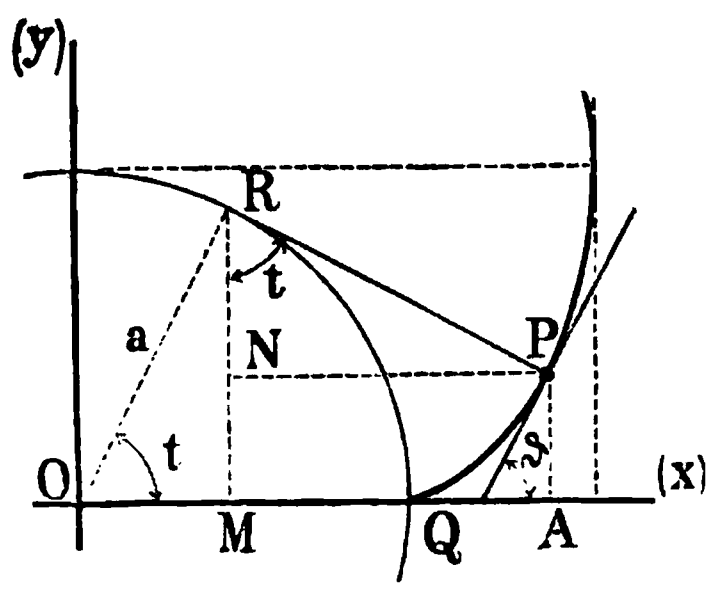
## 2. *Die Kreisevolvente.*

Diese Curve beschreiben alle Punkte einer Geraden, wenn dieselbe auf dem Umfang eines Kreises rollt, ohne dabei zu gleiten. Die Gerade ist dann in jeder Lage Tangente an den Kreis.

Aus der Entstehungsart der Curve kann ihre Gleichung abgeleitet werden.

Der Mittelpunkt des Kreises sei der Einfachheit wegen zum Ursprung des Coordinatensystems, der Punkt Q (Fig. 26), in welchem die Gerade in ihrer Anfangslage den Kreis berührt, zu dem die Curve beschreibenden Punkt, und seine Verbindungslinie mit dem Ursprung zur x-Axe gewählt.

Fig. 26.




Rollt die Gerade so weit ab, dass sie den Kreis im Punkte R berührt, so gelangt der die Curve beschreibende Punkt nach P. Die Lage der Geraden in dieser Stellung RP wird durch den Winkel t bestimmt, den der Radius OR mit der x-Axe bildet.

Weil die Gerade auf dem Kreise rollt, ohne zu gleiten, so ist $\bar{R}P = \text{arc}\,RQ$. also wenn der Kreis den Radius a hat $\bar{R}P = at$.

Die Coordinaten des Punktes P sind durch folgende Beziehungen bestimmt:

$$x = \overline{OA} = \overline{OM} + \bar{M}\bar{A} = \overline{OM} + \bar{N}\bar{P} = a\cos t + \bar{R}\bar{P}\sin t.$$

$$y = \overline{AP} = \bar{M}\bar{N} = \bar{M}\bar{R} - \bar{N}\bar{R} = a\sin t - \bar{R}\bar{P}\cos t.$$

Demnach wird die Kreisevolvente mit Hilfe des Parameters t durch folgende Gleichungen dargestellt

$$x = a\cos t + at\sin t,$$

$$y = a\sin t - at\cos t.$$

Man hat also:

$$dx = [-a\sin t + a\sin t + at\cos t]\,dt = at\cos t\,dt,$$

$$dy = [a\cos t - a\cos t + at\sin t]\,dt = at\sin t\,dt,$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{\cos t} = \text{tang}\,t.$$

Bezüglich des Sinnes der Krümmung dieser Curve wären besondere Untersuchungen erforderlich, die einige Schwierigkeiten bereiten, weil sowohl der erste als alle folgenden Differentialquotienten für $t = \frac{n\pi}{2}$ unendlich (unstetig) werden. Dieselben sind aber überflüssig, da aus der Entstehungsart der Curve der Krümmungssinn direct zu erkennen ist, ebenso wie die Thatsache, dass die Curve keine Wendepunkte, aber für gerade Vielfache von $\pi$ höchste, beziehungsweise tiefste Punkte besitzt.

Der Tangentenwinkel $\vartheta$ ist gegeben durch

$$\text{tang}\,\vartheta = \frac{dy}{dx} = \text{tang}\,t.$$

Mithin ist die Tangente in jedem Punkte P der Curve parallel zum Radius nach dem entsprechenden Berührungspunkte R der rollenden Geraden mit dem Kreise, und die Gerade selbst ist stets Normale der Evolvente.

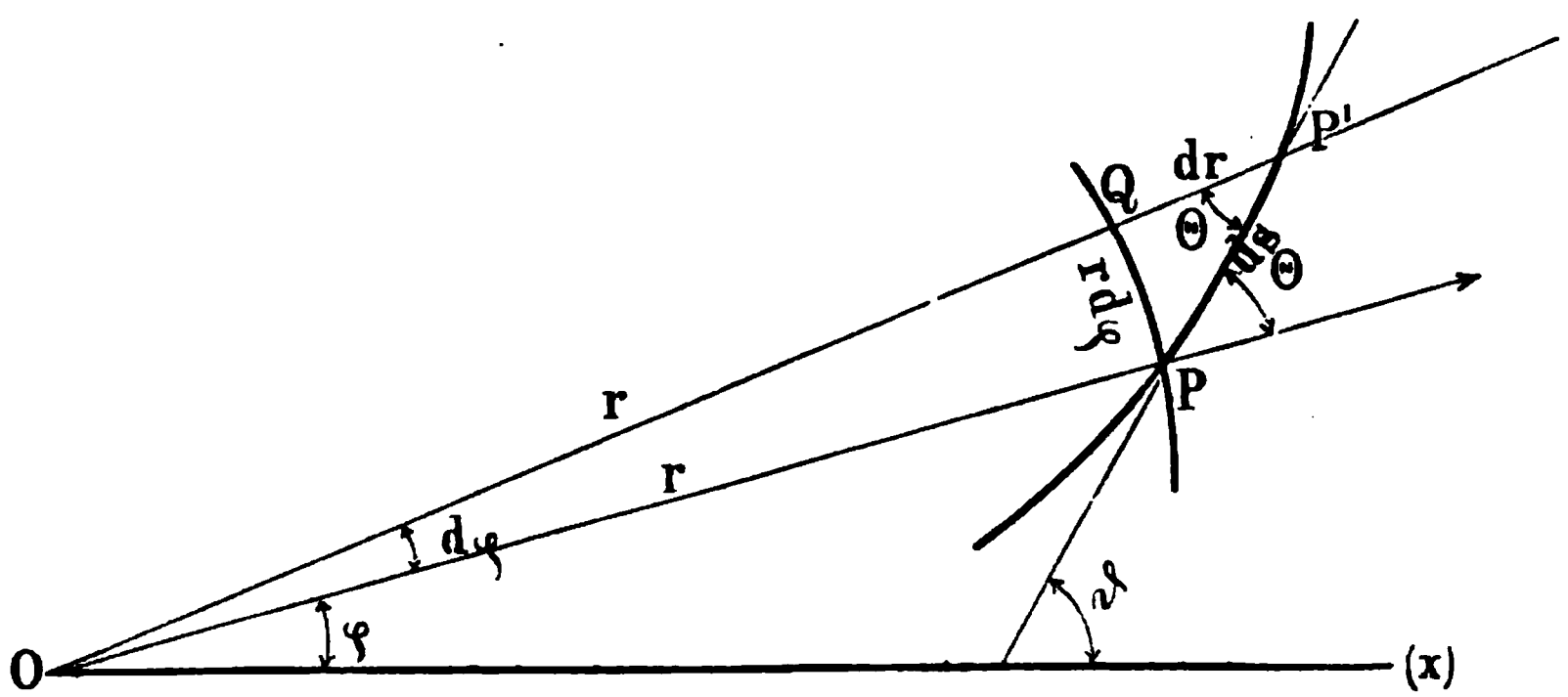
## § 49. Voraussetzung von Polarcoordinaten.

Viele Curven haben in Polarcoordinaten bedeutend einfachere Gleichungen, weshalb zur analytischen Darstellung derselben nicht rechtwinklige, sondern Polarcoordinaten gewählt werden.

Ohne auf die Untersuchung der Krümmungsverhältnisse, der besonderen Punkte u. s. w. einzugehen, sollen hier nur jene Größen ermittelt werden, welche die Tangente in einem beliebigen Curvenpunkte bestimmen.

Bei Zugrundelegung von Polarcoordinaten wird gewöhnlich die Länge r (Fig. 27) des Leitstrahles (Radiusvector) als Function des Winkels $\varphi$, welchen der Leitstrahl mit der positiven Richtung der Polaraxe einschließt (Winkelamplitude oder Anomalie), dargestellt.

Fig. 27.




Dementsprechend sei vorausgesetzt, dass die Curve durch ihre auf ein Polarcoordinatensystem bezogene Gleichung in der entwickelten Form gegeben ist:

$$r = f(\varphi).$$

Die Richtung der Tangente in einem Punkte der Curve ist bestimmt durch den Winkel $\Theta$, welchen ihre positive Richtung mit der positiven Richtung des Leitstrahles einschließt.

Die positive Richtung der Tangente ist stets im Sinne der wachsenden Amplitude zu nehmen. Die Tangente im Punkte P wird auch hier als Verbindungslinie dieses Punktes mit seinem Nachbarpunkte P' definiert.

Hat der Punkt P die Polarcoordinaten r und $\varphi$, so sind jene seines Nachbarpunktes P' $r + dr$ und $\varphi + d\varphi$, wobei $r + dr = f(\varphi + d\varphi)$ ist.

Beschreibt man mit dem Radius OP aus dem Pol des Coordinatensystems einen Kreis, so trifft dieser den Leitstrahl nach dem Punkte P' in Q, und es ist gestattet, sowohl den Kreisbogen PQ als auch den Curvenbogen PP' als Gerade, d. h. die Figur PQP' als ein bei Q rechtwinkliges Dreieck anzusehen.

In diesem Elementardreiecke, dessen Hypotenuse die Länge ds und dessen Katheten die Längen dr und $r\,d\varphi$ haben, kann, weil PP'

unendlich klein ist, der Winkel bei P' dem Winkel $\Theta$ gleich gesetzt werden.

Man erhält demnach aus dem Elementardreieck:

$$\overline{PP'}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QP'}^2,$$

also

$$ds^2 = \overline{dr}^2 + r^2\,\overline{d\varphi}^2 = d\varphi^2\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right],$$

$$ds = d\varphi\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$$

oder, nach Einführung der Bezeichnung $\frac{dr}{d\varphi} = f'(\varphi) = r'$,

$$ds = d\varphi\sqrt{r^2 + r'^2},$$

ferner

$$\sin\Theta = \frac{PQ}{PP'} = \frac{r\,d\varphi}{ds} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

$$\cos\Theta = \frac{P'Q}{PP'} = \frac{dr}{ds} = \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{PQ}{QP'} = \frac{r\,d\varphi}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}},$$

also

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{r}{r'}.$$

Außer dem Winkel $\Theta$ gibt es noch andere Größen, welche sich in einzelnen Fällen zur Construction der Tangente oder Normale besonders eignen. Diese sind die Polartangente, Polarnormale. die Polarsubtangente und Polarsubnormale.

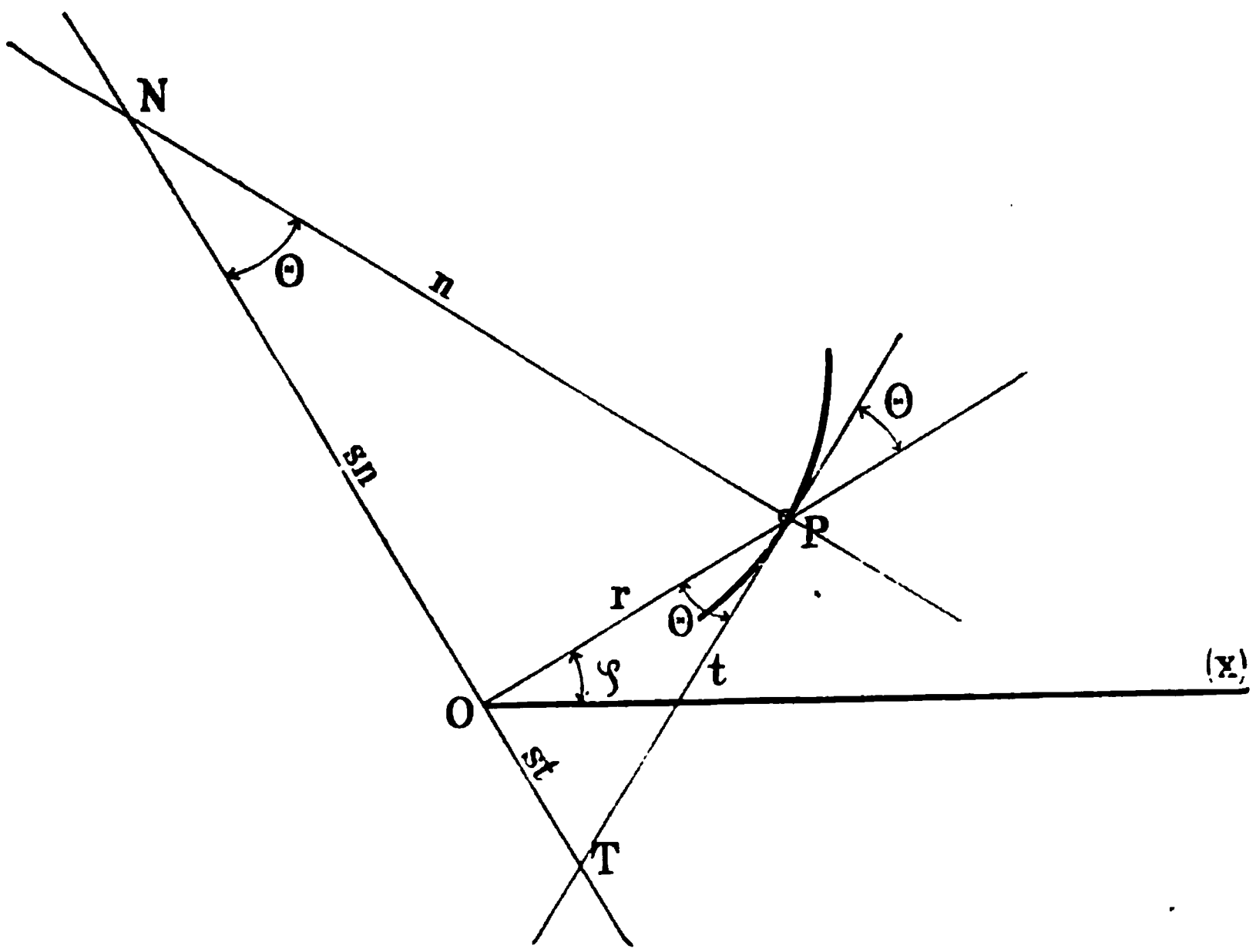
Führt man im Ursprung O die Senkrechte zum Radiusvector OP des Punktes P bis zum Schnittpunkte T und N mit der Tangente. beziehungsweise Normale des Punktes P, so werden die dadurch abgeschnittenen Strecken

$$PT = t, \quad PN = n, \quad OT = st, \quad ON = sn,$$

Polartangente, Polarnormale, Polarsubtangente und Polarsubnormale genannt.

Die Längen dieser Strecken können aus Fig. 28 durch r und r, leicht ausgedrückt werden.

Fig. 28.




Es ist nämlich:

$$ON = r \operatorname{cotg} \Theta = \frac{r}{\operatorname{tang} \Theta},$$

$$OT = r \operatorname{tang} \Theta,$$

$$PN = \sqrt{OP^2 + ON^2} = \sqrt{r^2 + r^2 \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \Theta}},$$

$$PT = \sqrt{OP^2 + OT^2} = \sqrt{r^2 + r^2 \operatorname{tang}^2 \Theta},$$

mithin:

$$sn = \frac{r}{\frac{r}{r'}} = r',$$

$$st = r \frac{r}{r'} = \frac{r^2}{r'},$$

$$n = \sqrt{r^2 + r^2 \frac{r'^2}{r^2}} = \sqrt{r^2 + r'^2},$$

$$t = \sqrt{r^2 + r^2 \frac{r^2}{r'^2}} = \frac{r}{r'} \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

**Beispiele:**

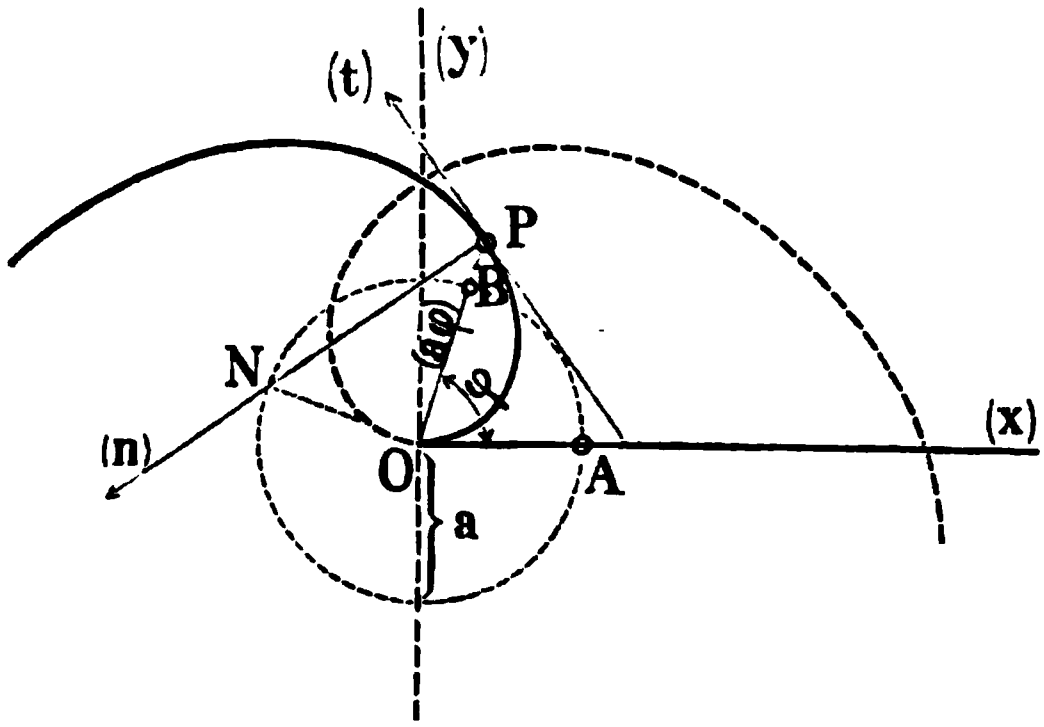
*1. Die archimedische Spirale.*

Die Gleichung dieser Curve ist

$$r = a\varphi.$$

Sie zeigt, dass für ein von Null (Fig. 29) bis ins Unendliche zunehmendes $\varphi$ auch r unbeschränkt zunimmt, dass also die Curve im Ursprunge beginnend um diesen in unendlich vielen Windungen verläuft.

Fig. 29.




Beschreibt man um den Ursprung O einen Kreis vom Radius a, so folgt aus der Gleichung der Curve, dass für eine Amplitude $\varphi$ der Radiusvector $r = OP = \text{arc } AB$.

Gelangt der Radiusvector bei seiner Drehung um O abermals in die Lage OB, so ist seine Länge $r_1 = a(2\pi + \varphi) = a\varphi + 2a\pi$, so dass der Abstand der auf einem Radiusvector gelegenen Curvenpunkte constant und gleich $r_1 - r = 2a\pi$ wird. Man nennt diesen Abstand die Windungsweite der Spirale.

Für negative Amplituden $\varphi$ wird auch r negativ, ist also in entgegengesetzter Richtung aufzutragen. Demnach besteht die ganze Spirale aus zwei zur Normalen y der Polaraxe symmetrisch gelegenen Ästen. Der den positiven Werten von $\varphi$ entsprechende Ast ist in der Figur voll, jener den negativen $\varphi$ entsprechende gestrichelt gezeichnet.

Die Tangentenconstruction ergibt sich sehr einfach durch die Subnormale.

Es ist nämlich:

$$sn = r' = a,$$

d. h. die Subnormale der archimedischen Spirale ist für alle Punkte derselben von constanter Länge.

Soll also im Punkte P dieser Curve die Tangente construiert werden, so führt man aus O eine Senkrechte zum Radiusvector OP bis zum Schnittpunkte N mit dem Kreise vom Radius a. Die Gerade PN ist dann die Normale, die darauf in P Senkrechte die Tangente an die Curve.

## 2. *Die hyperbolische Spirale.*

Ihre Gleichung ist

$$r = \frac{a}{\varphi}.$$

Für $\varphi = 0$ wird $r = \infty$, mit wachsendem $\varphi$ nimmt r beständig ab und wird Null für $\varphi = \infty$, d. h. nach unendlich vielen Windungen, die immer kleiner werden, erreicht die Curve den Ursprung, dieser ist somit ein sogenannter asymptotischer Punkt.

Für negative Werte von $\varphi$ ergeben sich auch negative Werte von r, die Curve besteht somit aus zwei zur Normalen der Polaraxe symmetrischen Ästen.

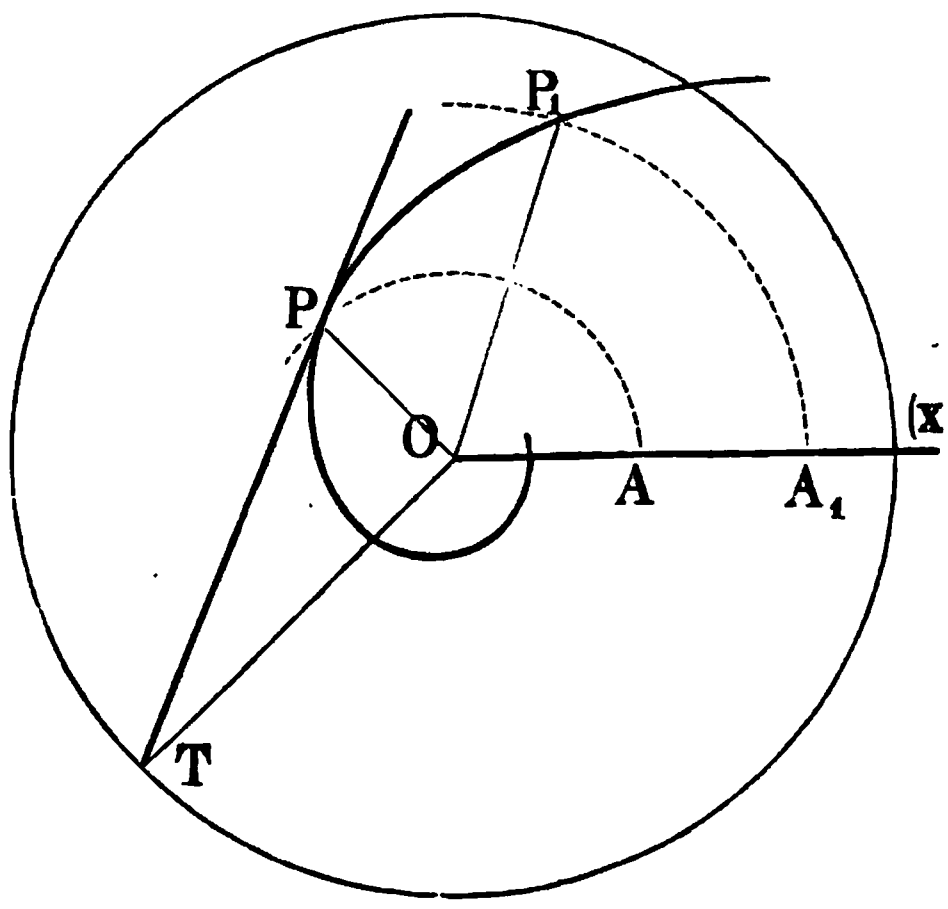
Die Construction der Curvenpunkte ist aus

$$r\varphi = a$$

leicht einzusehen. Beschreibt man aus dem Ursprung eine Schar concentrischer Kreise und schneidet auf diesen, von der Richtung der Polaraxe an gerechnet, Bögen von gleicher Länge a ab, so sind die Endpunkte dieser Bögen Punkte der Curve (Fig. 30). Denn man hat

$$\text{arc } AP = \text{arc } A_1 P_1 = a.$$

Fig. 30




Für die Tangentenconstruction empfiehlt sich am besten die Subtangente.

Diese ist

$$st = \frac{r^2}{r'} \cdot \frac{\frac{a^2}{\varphi^2}}{-\frac{a}{\varphi^2}} = -a$$

constant für alle Punkte der Spirale. Führt man also im Ursprung eine Normale zum Radiusvector OP, bis sie den aus O mit dem Radius a beschriebenen Kreis in T schneidet, so erhält man in der Verbindungslinie TP die Tangente an den Punkt P der Spirale.

Da sich auch für den unendlich fernen Punkt ($\varphi = 0$) $st = -a$ ergibt, befindet sich die Tangente desselben im endlichen Bereiche und ist eine Asymptote der Curve. Sie ist die im Abstande a zur Polaraxe parallele Gerade.

## 3. *Die logarithmische Spirale.*

Diese Curve hat die Gleichung

$$r = m\, e^{a\varphi}.$$

Dieselbe lässt erkennen, dass die Curve den Ursprung in unendlich vielen Windungen umkreist; denn für $\varphi = 0$ wird $r = m$ und nimmt mit wachsendem $\varphi$ beständig zu, mit ins Negative abnehmendem $\varphi$ hingegen beständig ab und wird Null, wenn $\varphi = -\infty$ wird.

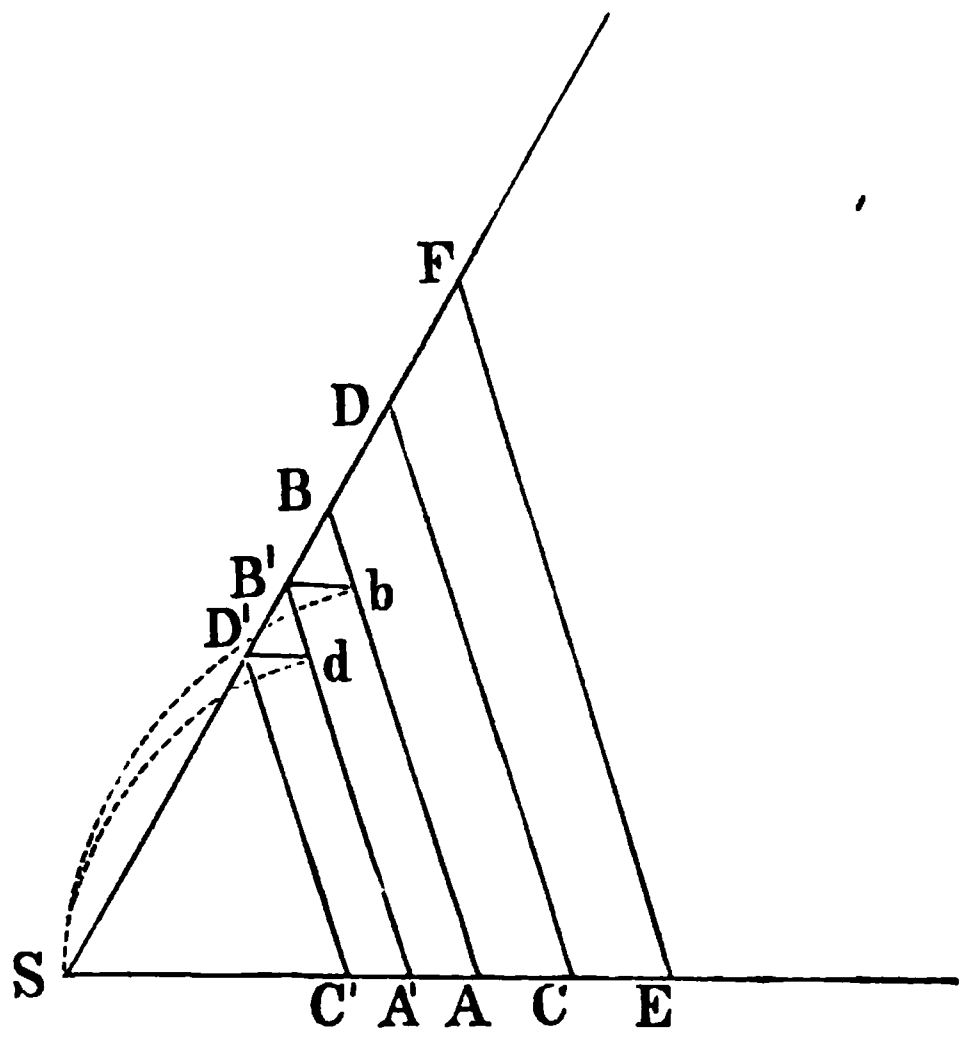
Der Ursprung ist also ein asymptotischer Punkt dieser Spirale.

Den Werten $0,\ \varphi_1,\ 2\varphi_1,\ 3\varphi_1,\ \ldots\ n\varphi_1$ von $\varphi$ entsprechen die Werte $r_0 = m$, $r_1 = me^{a\varphi_1}$, $r_2 = me^{2a\varphi_1}$, $r_3 = me^{3a\varphi_1}, \ldots r_n = me^{na\varphi_1}$, ferner den Werten $0, -\varphi_1, -2\varphi_1, -3\varphi_1, \ldots$ des $\varphi$, die Werte $r_0 = m$, $\tau_1 = me^{-a\varphi_1}$, $\tau_2 = me^{-2a\varphi_1}$, $\tau_3 = me^{-3a\varphi_1} \ldots$ Es besteht somit die Beziehung:

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} = \ldots = \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1}{r_0} = \frac{r_0}{\tau_1} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\tau_2}{\tau_3} = \ldots = e^{a\varphi_1}.$$

welche zu einer einfachen Construction der den Amplituden $2\varphi_1,\ 3\varphi_1, \ldots n\varphi_1, -\varphi_1, -2\varphi_1, -3\varphi_1, \ldots$ entsprechenden Radienvectoren führt, wenn nebst der Größe m der zur Amplitude $\varphi$ gehörige Radiusvector r bekannt ist.

Fig. 31.




Trägt man nämlich aus dem Scheitel S (Fig. 31) eines beliebigen Winkels auf einem Schenkel desselben die Strecken $SA = r_0 = m$ und $SC = r_1$ auf, schneidet sodann von A aus mit dem Radius $r_1$ auf dem zweiten Schenkel den Punkt B ab und führt von C aus eine Parallele zu AB, so ist die auf derselben durch die Schenkel des Winkels begrenzte Strecke CD der Radiusvector $r_2$, welcher der Amplitude $2\varphi_1$ entspricht. Denn es besteht die Beziehung:

$$\frac{AB}{SA} = \frac{CD}{SC}.$$

Führt man aus dem Endpunkte E der Strecke $SE = r_3$ eine Parallele EF zu AB, so ist $EF = r_3$ gleich dem Radiusvector für die Amplitude $3\varphi_1$ u. s. w.

Schneidet man von A aus auf AB die Strecke $Ab = r_0 = m$ ab, führt dann von b aus eine Parallele zu AC bis zum Schnittpunkt B' mit dem zweiten Schenkel und von B' eine Parallele zu AB bis A', so ist SA' der der Amplitude $-\varphi_1$ entsprechende Radiusvector $\tau_1$. Denn es besteht die Beziehung:

$$\frac{AB}{SA} = \frac{A'B'}{SA'}.$$

Durch Auftragen von $A'd = \tau_1$ auf A'B' und analogen Vorgang erhält man $SC' = \tau_2$, also den Radiusvector für die Amplitude $-2\varphi_1$ u. s. w.

Für die Tangentenconstruction eignet sich am besten der Tangentenwinkel $\Theta$ (Fig. 32)

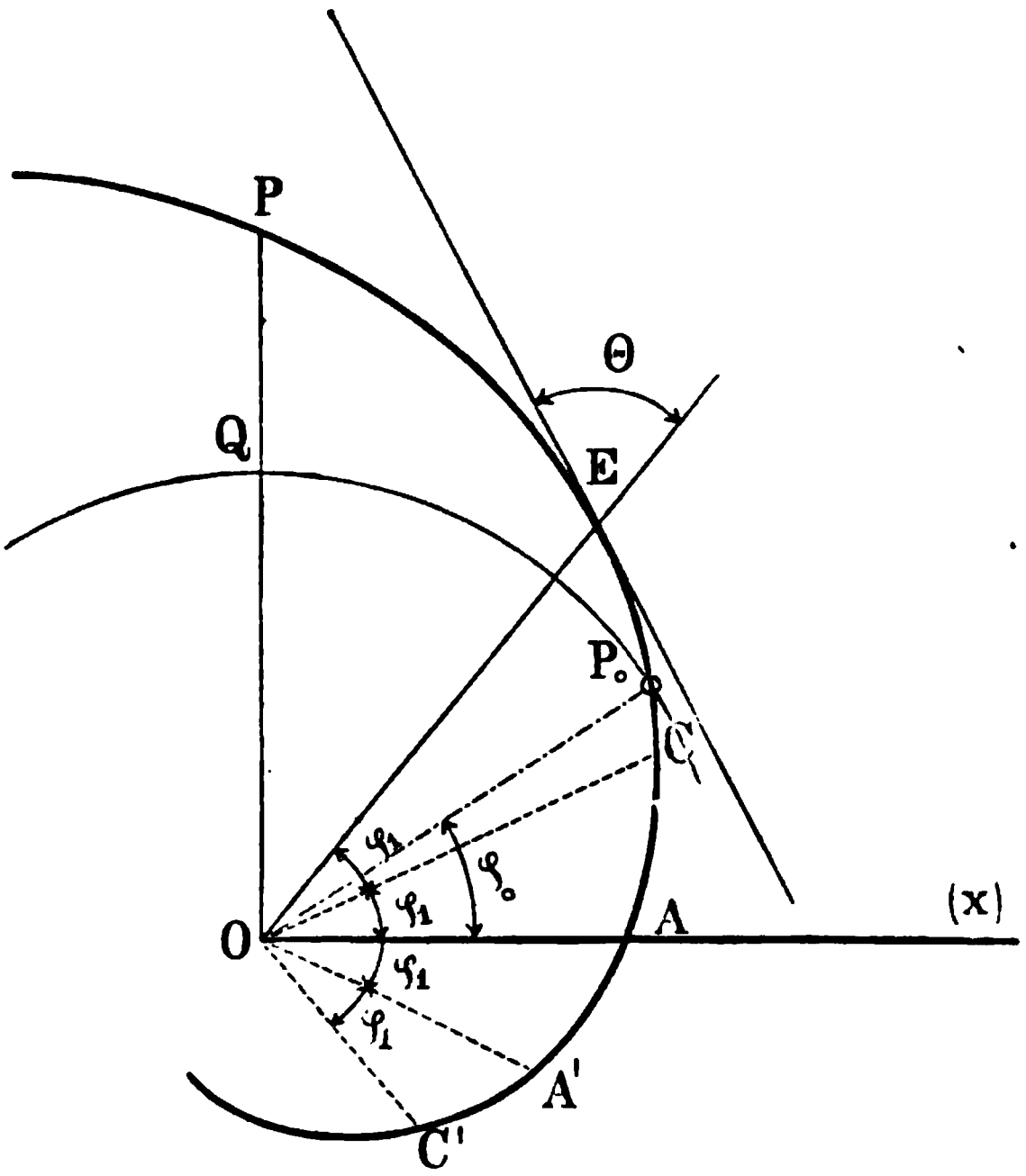
$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{r}{r'},$$

$$r = m e^{a\varphi}, \qquad r' = m a e^{a\varphi} = a r,$$

$$\operatorname{tang} \Theta = \frac{1}{a},$$

d. h. die logarithmische Spirale schneidet alle Leitstrahlen unter demselben Winkel, dessen trigonometrische Tangente $\frac{1}{a}$ ist.

Fig. 32.




Bestimmt man die Subtangente und Subnormale, so findet man

$$st = \frac{r^2}{r'} = \frac{r}{a},$$

$$sn = r' = a r,$$

d. h. die Subtangente ist in jedem Punkte derselbe aliquote Theil, die Subnormale dasselbe Vielfache des Leitstrahles.

**Diese Curve kann zur graphischen Bestimmung der Wurzelgrößen benützt werden.**

**Entspricht dem Radiusvector $OP_0$, welcher gleich ist der Einheit die Amplitude $\varphi_0$, so ist zufolge der Curvengleichung**

$$r = m e^{a\varphi}, \qquad 1 = m e^{a\varphi_0},$$

also

$$\frac{r}{1} = \frac{m e^{a\varphi}}{m e^{a\varphi_0}},$$

d. h.

$$r = e^{a(\varphi - \varphi_0)}.$$

und wenn man den Winkel $\varphi - \varphi_0$ mit $\varepsilon$ bezeichnet,

$$r = e^{a\varepsilon}.$$

Erhebt man auf beiden Seiten zur Potenz $\frac{p}{q}$, so erhält man:

$$r^{\frac{p}{q}} = e^{a\frac{p}{q}\varepsilon}.$$

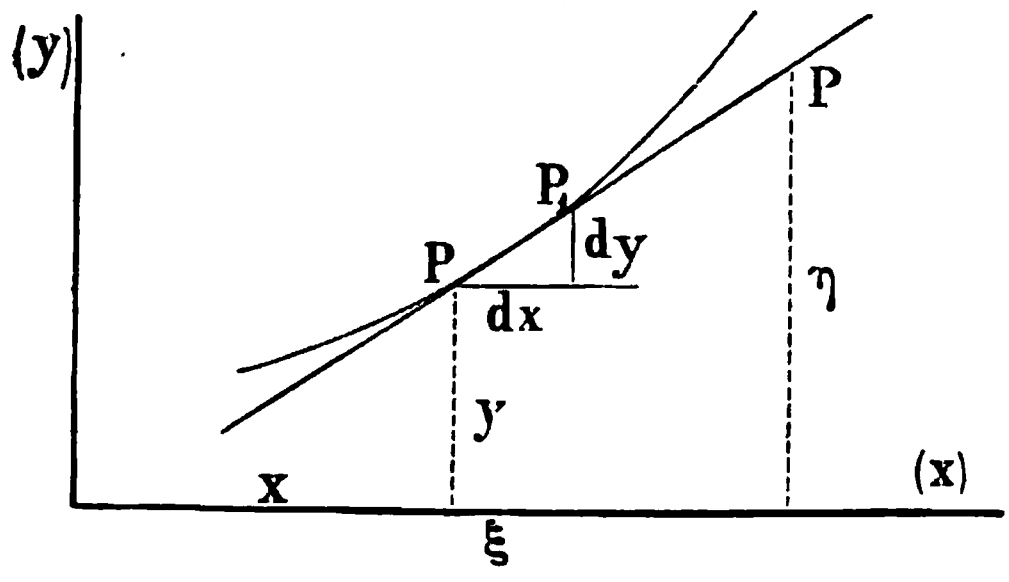
Soll also r auf die Potenz $\frac{p}{q}$ graphisch erhoben werden, so führt man den Radiusvector OP von der Länge r und zieht aus dem Ursprung O einen Kreis vom Radius 1, welcher die Curve in $P_0$ trifft. Der Bogen $P_0 Q$ entspricht dann dem Winkel $\varepsilon = \varphi - \varphi_0$. Theilt man also diesen Bogen in p Theile und führt durch den $q^{ten}$ Theilstrich einen Radiusvector, so ist seine Länge die gesuchte Potenz von r.

## § 50. Gleichung der Tangente und der Normale ebener Curven.

Die Aufstellung der Gleichung für die Tangente und Normale in irgend einem Punkte einer Curve bereitet, nachdem ihre Richtung bestimmt ist, keine Schwierigkeiten.

Bezeichnet man die Coordinaten eines beliebigen Punktes P (Fig. 33) der Tangente mit $\xi$ und $\eta$ zum Unterschiede von den Coordinaten x und y des Punktes P der Curve, an welchen die Tangente zu führen ist, so lautet die Gleichung der Tangente als der aus dem Punkte P mit der Richtung $dx : dy$ geführten Geraden

Fig. 33.




$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy},$$

oder

$$\frac{\xi - x}{dx} - \frac{\eta - y}{dy} = 0.$$

und jene der Normalen als Geraden aus dem Punkte senkrecht zur selben Richtung

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0$$

Diese beiden Gleichungen sind in der hier angegebenen Form nicht direct verwendbar und müssen je nach der Art, in welcher die Curve analytisch gegeben erscheint, modificiert werden.

Ist die Gleichung der Curve in der entwickelten Form gegeben

$$y = f(x),$$

so ist $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ aus dieser direct bestimmbar; man dividiert demnach die gefundenen Gleichungen für die Tangente und Normale mit $dx$ und erhält

$$\eta - y - y'(\xi - x) = 0$$

als Gleichung der Tangente und

$$\xi - x + y'(\eta - y) = 0$$

als Gleichung der Normalen in der in diesem Falle brauchbaren Form.

Ist die Gleichung der Curve in der unentwickelten Form gegeben

$$F(x, y) = 0,$$

so folgt aus dieser

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0,$$

also

$$dx : dy = \frac{\partial F}{\partial y} : -\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Ersetzt man in den Gleichungen für Tangente und Normale die Richtungscomponenten $dx$ und $dy$, durch die hiezu proportionalen Größen $\frac{\partial F}{\partial y}$ und $-\frac{\partial F}{\partial x}$, welche dieselbe Richtung bestimmen, so erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0$$

als Gleichung der Tangente, und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\xi - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(\eta - y) = 0$$

oder in der üblicheren Form

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

als Gleichung der Normalen.

Zur Vermeidung von Irrthümern sei speciell bemerkt, dass $x$ und $y$ in der Gleichung der Tangente und Normale als Constante anzusehen sind, da sie die Coordinaten eines bestimmten Curvenpunktes P bedeuten.

Schließlich sei noch der Fall besprochen, in welchem die Curve mit Hilfe eines Parameters t durch die beiden Gleichungen

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t)$$

gegeben erscheint.

Da aus den Parametergleichungen

$$dx = \varphi'(t)\,dt,$$
$$dy = \psi'(t)\,dt$$

folgt, so gehen die Gleichungen für die Tangente und Normale über in

$$\frac{\xi - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\eta - \psi(t)}{\psi'(t)}$$

und

$$[\xi - \varphi(t)]\,\varphi'(t) + [\eta - \psi(t)]\,\psi'(t) = 0.$$

**Beispiele:**

1. Es ist die Gleichung der Tangente in einem Punkte P(x.y) der durch ihre Gleichung

$$y^2 = 2px$$

gegebenen Parabel zu bestimmen.

Aus der Gleichung folgt

$$2y\,dy = 2p\,dx,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{p}{y}.$$

Man hat also als Gleichung der Tangente

$$\eta - y - \frac{p}{y}(\xi - x) = 0$$

oder

$$\eta y - y^2 - p\xi + px = 0,$$
$$\eta y - y^2 - p(\xi + x) + 2px = 0,$$

und weil

$$-y^2 + 2px = 0$$

(zufolge der Parabelgleichung)

$$\eta y = p(\xi + x).$$

2. Es ist die Gleichung der Tangente in einem Punkte P(x, y) der durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

gegebenen Ellipse aufzustellen.

Hier ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2},$$

mithin die Gleichung der Tangente

$$\frac{2x}{a^2}(\xi - x) + \frac{2y}{b^2}(\eta - y) = 0$$

oder

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0,$$

und weil

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

(zufolge der Gleichung der Ellipse)

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} - 1 = 0.$$

3. Es ist die Gleichung der Normale einer durch die Parametergleichungen

$$x = \varphi(t) = a(t - \sin t),$$

$$y = \psi(t) = a(1 - \cos t)$$

gegebenen gemeinen Cykloide aufzustellen.

Man hat:

$$\varphi'(t) = a(1 - \cos t),$$

$$\psi'(t) = a \sin t,$$

somit als Gleichung der Normalen

$$[\xi - a(t - \sin t)]\, a(1 - \cos t) + [\eta - a(1 - \cos t)]\, a \sin t = 0$$

oder

$$(\xi - at)(1 - \cos t) + \eta \sin t = 0,$$

also

$$(\xi - x) + \eta \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = 0,$$

$$\eta = \operatorname{tang} \frac{t}{2}(\xi - x).$$

## § 51. Asymptoten ebener Curven.

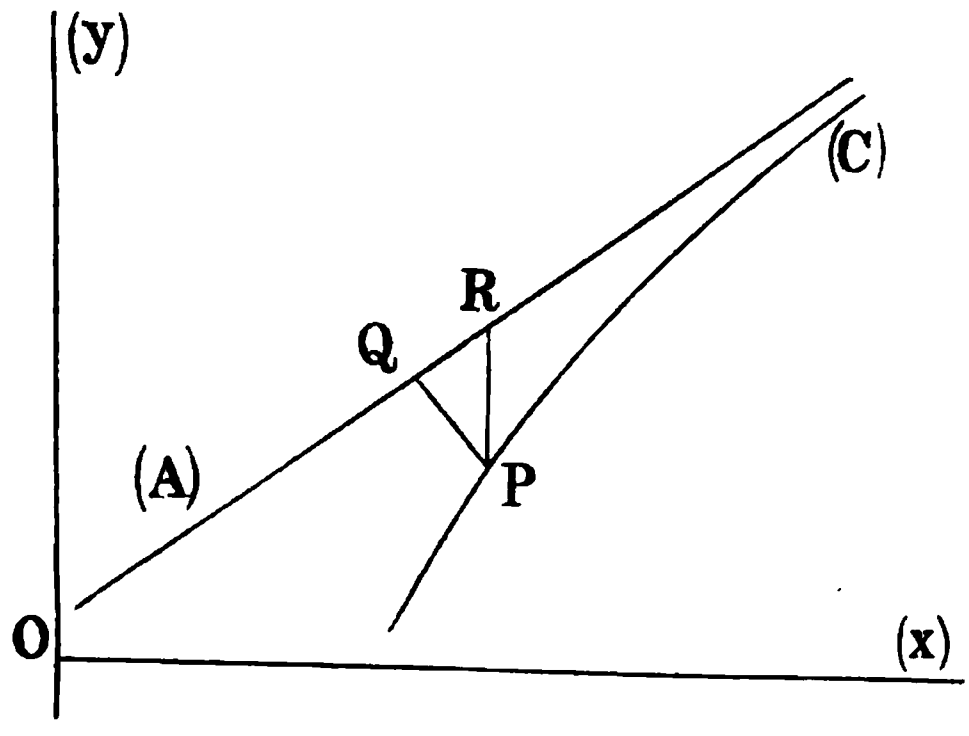
*1. Nähert sich ein Punkt bei seiner Fortbewegung auf einem ins Unendliche verlaufenden Curvenaste einer festen Geraden unbeschränkt, ohne sie jemals zu erreichen, so nennt man diese eine »Asymptote« der Curve.*

Soll also die Gerade (A) (Fig. 34) eine Asymptote der Curve (C) sein, so muss der Normalabstand PQ eines Punktes P derselben von der Geraden, bei der Fortbewegung dieses Punktes ins Unendliche continuierlich gegen Null abnehmen, d. h. es muss

$$\lim_{x=\infty} PQ = 0$$

werden.

Fig. 34.




Führt man aus P eine Parallele zur y-Axe bis zu ihrem Schnittpunkte R mit der Geraden (A), so erhält man die Strecke PR, welche mit PQ gleichzeitig verschwindet.

Es ist somit

$$\lim_{x=\infty} PR = 0$$

auch ein Kennzeichen hiefür, dass die Gerade (A) eine Asymptote der Curve (C) ist.

Dieses Kennzeichen wird unbrauchbar, wenn die Asymptote parallel zur Ordinatenaxe y ist, weshalb dieser Fall gesondert behandelt werden muss.

*2. Asymptoten parallel zur Ordinatenaxe.*

Die zur y-Axe parallelen Asymptoten sind leicht direct aus der Curvengleichung zu erkennen.

Wird nämlich für $x = a$, $y = \infty$, dann besitzt die Curve eine zur y-Axe parallele Asymptote im Abstande a vom Ursprung, wenn sich dieser durch die Gleichung $x = a$ gegebenen Geraden ein Curvenast unbeschränkt nähert.

Ist die Curve algebraisch (d. h. wird die Curve durch eine algebraische Gleichung analytisch dargestellt), so können die Werte von x für welche $y = \infty$ wird, in folgender Weise leicht gefunden werden:

Ordnet man das Polynom der auf Null gebrachten Gleichung der Curve nach fallenden Potenzen von y, so erlangt dieselbe die Form:

$$y^m \varphi(x) + y^n \psi(x) + y^p \chi(x) + \ldots = 0,$$

wobei $m > n > p$ vorausgesetzt ist.

Aus dieser folgt:

$$\varphi(x) + \frac{1}{y^{m-n}} \psi(x) + \frac{1}{y^{m-p}} \chi(x) + \ldots = 0.$$

Hat die Curve zur y-Axe parallele Asymptoten, so muss es Werte von x geben, für welche $y = \infty$ wird. Wird aber $y = \infty$, so reduciert sich die zuletzt angeschriebene Gleichung auf

$$\varphi(x) = 0.$$

Man erhält demnach in den Auflösungen der Gleichung

$$\varphi(x) = 0$$

diejenigen Werte von x, für welche y unendlich wird.

Die Abscissen der zur Ordinatenaxe parallelen Asymptoten einer algebraischen Curve findet man, wenn man den Coefficienten der höchsten Potenz von y in ihrer Gleichung Null setzt und die auf diese Art erhaltene Gleichung auflöst.

Nicht alle diesen Auflösungen entsprechenden Ordinaten müssen Asymptoten der Curve sein, es sind dies nur jene, welchen sich ein Curvenast unbeschränkt nähert, was, wenn nicht direct einzusehen, besonders untersucht werden muss.

Anmerkung: Die zur x-Axe parallelen Asymptoten sind in dem allgemeinen Fall enthalten, können aber auch in analoger Weise wie die zur y-Axe parallelen aus der Curvengleichung direct erkannt werden.

**Beispiele:**

1. Eine durch die Gleichung

$$x^m y^n = a \qquad m > 0 \qquad n > 0$$

gegebene Curve hat sowohl die x- als y-Axe zur Asymptote. Denn für $x = 0$ wird $y = \infty$ und für $y = 0$, $x = \infty$, ferner zeigen $x = 0$, beziehungsweise $y = 0$ an, dass die Curve beiden Axen unbeschränkt nahe gelegene Punkte besitzt.

2. Die Curve der Gleichung

$$y = \frac{m}{a - x}$$

hat die x-Axe und eine im Abstande a vom Ursprung zur y-Axe parallele Gerade zu Asymptoten.

Denn für $y = 0$ wird $x = \infty$, und für $x = a$ $y = \pm \infty$. je nachdem sich x dem Werte a durch Zunehmen oder Abnehmen nähert, weil

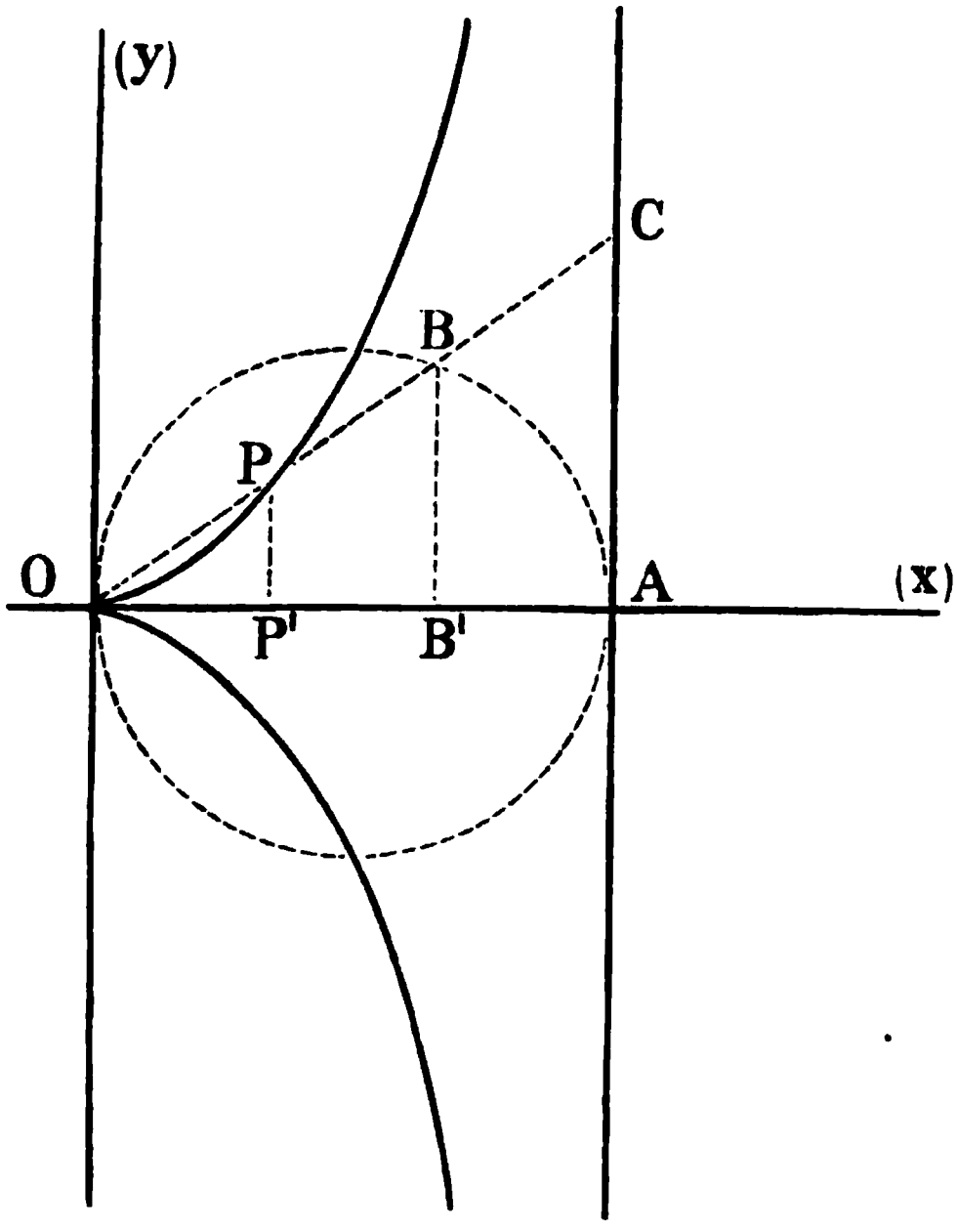
$$\lim_{\delta=0} \frac{m}{a - (a \mp \delta)} = \pm \infty.$$

3. Die Curve der Gleichung

$$(x^2 + y^2)\, x = 2\, r\, y^2$$

liegt bezüglich der x-Axe symmetrisch, weil sie nur gerade Potenzen von y enthält. (Fig. 35.)

Fig. 35.




Um zu untersuchen, ob die Curve Asymptoten parallel zur y-Axe besitzt, ordnet man die Gleichung nach fallenden Potenzen von y und erhält:

$$y^2 (x - 2\, r) + x^3 = 0.$$

Setzt sodann den Coefficienten der höchsten Potenz von y gleich Null

$$x - 2\, r = 0,$$

woraus $x = 2\, r$ als Abscisse einer derartigen eventuellen Asymptote folgt.

Dass die Ordinate $x = 2r$ wirklich eine Asymptote ist, kann leicht gezeigt werden. Aus der Curvengleichung erhält man:

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{2\, r - x}},$$

woraus zu ersehen ist, dass y ins Unendliche wächst, wenn x als positive Größe sich der Grenze $2\, r$ nähert und imaginär wird, wenn ein positives x den Wert $2\, r$ überschreitet oder wesentlich negative Werte annimmt.

Die Curve liegt somit in dem zur y-Axe parallelen Streifen von der Breite $2\, r$ und kommt der Ordinate $x = 2\, r$ unbeschränkt nahe.

Für $x = 0$ ist $y^2 = 0$, mithin der Ursprung ein zweifacher Punkt der Curve, speciell Spitze, worauf seinerzeit hingewiesen werden wird. Diese Curve wird Cissoide genannt.

Die Construction einzelner Curvenpunkte gestaltet sich zufolge ihrer Gleichung sehr einfach.

Beschreibt man über der Abscisse $x = 2r$ als Durchmesser einen Kreis, führt aus dem Ursprung einen beliebigen Strahl, welcher den Kreis in B und die Asymptote in C schneidet, und trägt vom Ursprung aus auf diesem Strahle die Strecke $OP = BC$ auf, so ist P ein Punkt der Curve.

Beweis der Richtigkeit dieser Construction folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $OPP'$ und $OBB'$. Es ist nämlich:

$$OP = BC,$$

also

$$OP' = B'A = x; \quad OP' : P'P = OB' : B'B = OA - B'A : \sqrt{\overline{OB' \,.\, B'A}}.$$

d. h.

$$x : P'P = (2r - x) : \sqrt{x\,(2r - x)},$$

also

$$P'P = \frac{x\sqrt{x\,(2r-x)}}{2r-x} = \sqrt{\frac{x^3}{2r-x}} = y.$$

4. Hat die Curve der Gleichung

$$x^2 y^2 - a x + b = 0; \quad a > 0; \quad b > 0$$

eine zur y-Axe parallele Asymptote?

Für $x = 0$ wird $y = \infty$, man könnte also glauben, dass die y-Axe eine Asymptote der Curve sei. Dies ist aber nicht der Fall, denn aus

$$y = \pm \sqrt{\frac{a x - b}{x^2}}$$

ist zu ersehen, dass y nur so lange real bleibt, als $a x > b$, also $x > \frac{a}{b}$ ist, die Curve nähert sich also nicht unbeschränkt der Ordinatenaxe, mithin ist diese keine Asymptote.

*3. Asymptoten geneigt zur Ordinatenaxe.*

Besitzt die durch ihre Gleichung

$$y = f(x)$$

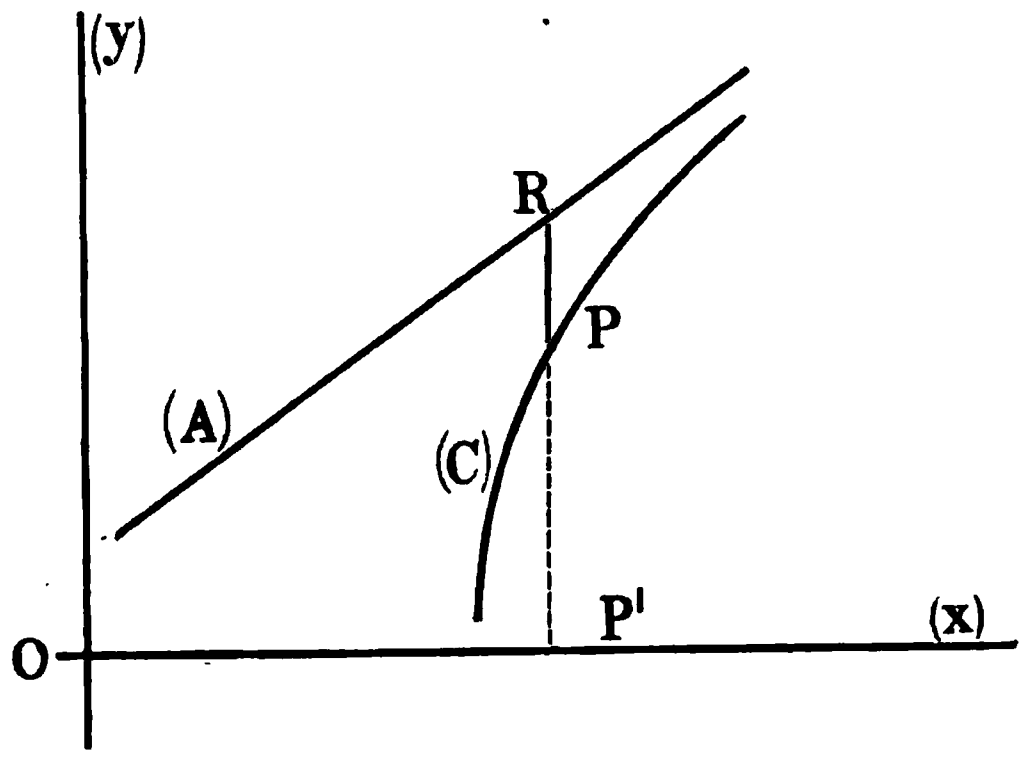
gegebene Curve eine zur y-Axe geneigte Asymptote, so kann diese als Gerade durch eine Gleichung von der Form

$$\eta = a\xi + b,$$

analytisch dargestellt werden.

Die Größen a und b können aus der Bedingung für eine Asymptote $\lim_{x=\infty} PR = 0$ ermittelt werden. (Fig. 36.)

Fig. 36.




Es ist

$$PR = P'R - P'P = \eta - y,$$

also, weil $\eta = a\,x + b$ und $y = f(x)$,

$$\lim_{x=\infty} PR = \lim_{x=\infty} [(a\,x + b - f(x)] = 0.$$

Soll nun $\lim_{x=\infty} PR = 0$ sein, muss umsomehr

$$\lim_{x=\infty} \frac{PR}{x} = 0,$$

d. h.

$$\lim_{x=\infty} \left(a + \frac{b}{x} - \frac{f(x)}{x}\right) = 0$$

sein. Da $\frac{b}{x}$ für $x = \infty$ Null wird, folgt

$$a = \lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Aus der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} [a\,x + b - f(x)] = 0$$

erhält man:

$$b = \lim_{x=\infty} [f(x) - a\,x],$$

worin für a der bereits gefundene Wert zu setzen ist.

Sind die beiden Constanten a und b bestimmt, so ist auch die Asymptote festgelegt.

**Beispiel:**

Es ist die Asymptote der Curve

$$y = m x + n \frac{\sin x}{x}$$

aufzusuchen.

Hier ist

$$f(x) = m x + n \frac{\sin x}{x},$$

demnach

$$a = \lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x=\infty} \left[ m + n \frac{\sin x}{x^2} \right] = m,$$

$$b = \lim_{x=\infty} [f(x) - a x] = \lim_{x=\infty} \left[ m x + n \frac{\sin x}{x} - m x \right] = 0,$$

weil

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

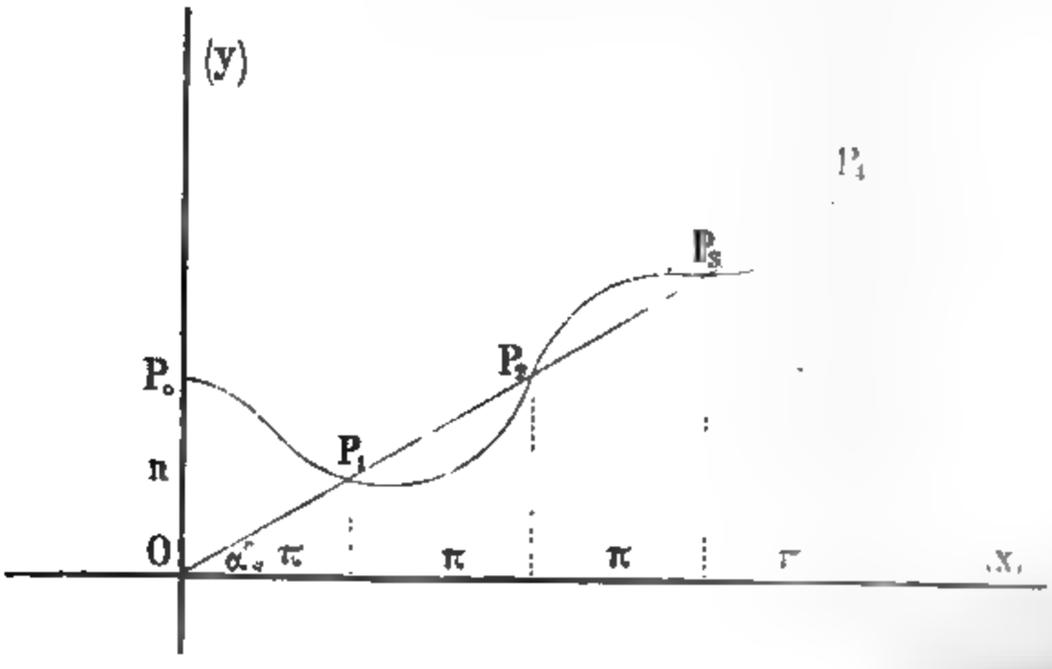
Die Gleichung der Asymptote lautet sonach

$$\eta = m \xi,$$

und stellt eine Gerade aus dem Ursprung vor, deren Neigungswinkel $\alpha$ gegen die x-Axe durch $\operatorname{tang} \alpha = m$ gegeben erscheint.

Wie man sich leicht überzeugen kann, schneidet die Curve ihre Asymptote in den Abständen $\pi \sqrt{1 + m^2}$, $2\pi \sqrt{1 + m^2}$, $3\pi \sqrt{1 + m^2}$, ... (Fig. 37) vom Ursprung. Denn für $x = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$ ist $y = m\pi$,

Fig. 37.




$2m\pi$, $3m\pi$, $4m\pi$, ..., also das Verhältnis $\frac{y}{x}$ für alle diese Punkte gleich m, weshalb sie einer Geraden von der Gleichung $y = mx$ gehören müssen.

Für $x = 0$ ist $y = n$, die Curve hat somit im ersten Quadranten den in der Figur gezeichneten Verlauf.

Ergeben sich bei der Bestimmung von a und b Schwierigkeiten, so kann man versuchen, die Asymptote als Grenztangente für $x = \infty$ anzusehen. Dann findet man zufolge der Gleichung der Tangente $\eta - y = y'(\xi - x)$, $a = \lim_{x=\infty} y'$; $b = \lim_{x=\infty} [y - xy']$.

Zu jedem Curvenpunkte gehört im allgemeinen eine Tangente der Curve.

Durchläuft ein beweglich gedachter Punkt einen sich ins Unendliche erstreckenden Curvenast, so ändert die Tangente in demselben continuierlich ihre Lage und nähert sich hiebei zumeist einer bestimmten Grenzlage, welche die Tangente im unendlich fernen Punkt der Curve genannt wird. Diese kann, muss aber nicht, Asymptote der Curve sein. Nur bei algebraischen Curven decken sich diese Begriffe immer.

Die Asymptote einer algebraischen Curve ist Tangente in einen unendlich fernen Punkt derselben, demzufolge muss jede algebraische Curve $n^{ter}$ Ordnung n Asymptoten haben, welche entsprechend den unendlich fernen Punkten real oder imaginär sein können. Denn jede algebraische Curve $n^{ter}$ Ordnung hat mit jeder Geraden, also auch mit der unendlich fernen n Schnittpunkte, d. h. n unendlich ferne Punkte. welche real oder imaginär sein können, und zu jedem Punkte gehört eine Tangente der Curve.

Jede algebraische Gleichung kann auf die Form

$$\varphi(x, y) + \psi(x, y) + \chi(x, y) + \ldots = 0$$

gebracht werden, in welcher die Functionszeichen $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ homogene Functionen vom Grade $m, n, p, \ldots$ anzeigen, wobei die Grade der Functionen fallend geordnet vorausgesetzt sind. $m > n > p \ldots$

Ersetzt man in einer homogenen Function

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

vom $m^{ten}$ Grade, die Variablen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ durch ihre Producte mit einem Factor t, also durch $t x_1, t x_2, t x_3, \ldots$, so wird dadurch die Function, weil sie nur Glieder der $m^{ten}$ Dimension enthält, mit $t^m$ multipliciert.

Die diese Thatsache ausdrückende Gleichung

$$F(x_1 t, x_2 t, x_3 t, \ldots) = t^m F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

pflegt man, weil sie die Function als homogen vom Grade m charakterisiert, die Definitionsgleichung der homogenen Function $m^{ten}$ Grades zu nennen.

Ersetzt man in der homogenen Function des dritten Grades

$$F(x, y, z) = x^3 - 2x^2 y + 4 y z^2 - 7 x y z$$

die Variablen durch

$$x t, \; y t, \; z t,$$

so erhält man:

$$F(x t, y t, z t) = (x^3 - 2x^2 y + 4 y z^2 - 7 x y z) t^3 = t^3 F(x y z).$$

Zufolge dieser Definitionsgleichung für eine homogene Function ist

$$\varphi(x\,t, y\,t) = t^m \varphi(x, y),$$
$$\psi(x\,t, y\,t) = t^n \psi(x, y),$$
$$\chi(x\,t, y\,t) = t^p \chi(x, y).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und weil t jeden Wert haben kann, also auch den Wert $\frac{1}{x}$,

$$\varphi\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^m}\varphi(x, y); \quad \varphi(x, y) = x^m \varphi\left(1, \frac{y}{x}\right).$$
$$\psi\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n}\psi(x, y); \quad \psi(x, y) = x^n \psi\left(1, \frac{y}{x}\right).$$
$$\chi\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^p}\chi(x, y); \quad \chi(x, y) = x^p \chi\left(1, \frac{y}{x}\right).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man diese Werte von $\varphi(x, y)$; $\psi(x, y)$; $\chi(x, y)$; ... in die Curvengleichung

$$\varphi(x, y) + \psi(x, y) + \chi(x, y) + \ldots = 0,$$

so geht sie in

$$x^m \varphi\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^n \psi\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^p \chi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0$$

oder nach Division mit $x^m$ in

$$\varphi\left(1, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^{m-n}}\psi\left(1, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^{m-p}}\chi\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$$

über. Wird x unendlich groß, so stellt $\frac{y}{x}$ den Richtungscoefficienten a der Asymptote vor, und die ganze Gleichung reduciert sich, weil in allen übrigen Gliedern derselben im Nenner positive Potenzen von x stehen ($m > n > p > \ldots$ vorausgesetzt) auf

$$\varphi(1, a) = 0.$$

Daraus folgt die Regel:

Zur Bestimmung der Richtungscoefficienten a der Asymptoten einer algebraischen Curve ersetzt man in der Gruppe der höchst dimensionierten Glieder der Curvengleichung x durch 1 und y durch a, setzt den so gebildeten Ausdruck gleich Null und erhält dadurch eine Gleichung, deren Auflösungen nach a die Richtungscoefficienten der Asymptoten sind.

Ist nun a eine Wurzel dieser Gleichung, so ist

$$\eta = a\,\xi + b$$

die Gleichung einer Asymptote, wenn b entsprechend bestimmt vorausgesetzt wird.

So lange dies nicht der Fall, also b nur als ein unbestimmter Parameter angesehen wird, stellt die Gleichung

$$\eta = a\,\xi + b$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichung

$$y = a\,x + b$$

eine zur Asymptote parallele Gerade vor.

Für die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Curve gelten gleichzeitig die Gleichungen

$$\varphi(x, y) + \psi(x, y) + \chi(x, y) + \ldots = 0 \quad \text{und} \quad y = a\,x + b,$$

also auch die Gleichung

$$\varphi(x, a\,x + b) + \psi(x, a\,x + b) + \chi(x, a\,x + b) + \ldots = 0.$$

welche nur eine Variable, und zwar x enthält.

Sie ist vom $m^{ten}$ Grade und gibt durch ihre Wurzeln die Abscissen der Schnittpunkte der Geraden mit der Curve.

Der Coefficient der $m^{ten}$ Potenz von x (der höchsten) ist $\varphi(1, a$ und verschwindet, welchen Wert auch b haben mag, weil a derart bestimmt wurde. Die Gleichung gibt also für jeden Wert von b eine Wurzel $x = \infty$, oder mit anderen Worten, jede zur Asymptote parallele Gerade geht durch einen unendlich fernen Punkt der Curve.

Die Asymptote selbst, die nun als Tangente an die Curve in dem unendlich fernen Punkt angesehen wird, muss auch durch einen Nachbarpunkt desselben, also durch einen zweiten unendlich fernen Punkt der Curve gehen; demnach muss die angeführte Gleichung eine zweite Wurzel $x = \infty$ haben. Dies trifft nur zu, wenn auch der Coefficient der nächst niedereren Potenz von x verschwindet.

Setzt man also diesen Coefficienten gleich Null, so erhält man eine Gleichung, aus welcher der entsprechende Wert des b der Asymptotengleichung resultiert.

**Beispiele:**

1. Es ist zu untersuchen, ob die Curve

$$\frac{(x - m)^3}{p^3} + \frac{(y - n)^3}{q^3} - 1 = 0$$

Asymptoten besitzt.

Die Gleichung kann durch Multiplication mit $p^3 q^3$ auf die Form gebracht werden:

$$q^3(x-m)^3 + p^3(y-n)^3 - q^3 p^3 = 0,$$

aus welcher zu ersehen ist, dass die Gruppe der höchst dimensionierten Glieder $q^3 x^3 + p^3 y^3$ ist.

Man hat somit zur Bestimmung des Richtungscoefficienten der Asymptoten die Gleichung

$$q^3 + p^3 a^3 = 0,$$

aus welcher als einzige reale Lösung

$$a = -\frac{q}{p}$$

erhalten wird. Die Curve besitzt also eine reale Asymptote mit der Richtung $-p:q$.

Setzt man in die Curvengleichung

$$y = -\frac{q}{p} x + b,$$

so erhält man:

$$q^3(x-m)^3 + p^3\left(-\frac{q}{p} x + b - n\right)^3 - q^3 p^3 = 0.$$

Der Coefficient der höchsten, nämlich der dritten Potenz von x verschwindet identisch, wie auch schon in der allgemeinen Untersuchung gezeigt wurde.

Der Coefficient der zweiten Potenz von x ist

$$-3q^3 m + 3p^3\left(\frac{q}{p}\right)^2 (b-n).$$

Man hat also zur Bestimmung von b die Gleichung

$$-3q^3 m + 3p^3\left(\frac{q}{p}\right)^2 (b-n) = 0$$

oder

$$-q m + p b - p n = 0,$$

woraus

$$b = \frac{q m + p n}{p}$$

folgt.

Die Gleichung der Asymptote lautet sonach:

$$\eta = -\frac{q}{p}\xi + \frac{q m + p n}{p}$$

und kann auf die Form

$$q(\xi - m) + p(\eta - n) = 0$$

gebracht werden, aus welcher leicht zu erkennen ist, dass die Asymptote durch den Punkt mit den Coordinaten m und n geht und die Richtung $-p:q$ hat.

2. Es sind die Asymptoten der Curve

$$(x^2+y^2)x = 2ry^2$$

aufzusuchen.

Die Gruppe der höchst dimensionierten Glieder ist hier $x^3+y^2x$ und man hat nach der Regel zur Bestimmung des a der Asymptote die Gleichung

$$1+a^2=0,$$

aus welcher

$$a_1 = +i \qquad a_2 = -i$$

folgt.

Die Curve hat also zwei imaginäre Asymptoten, muss aber, weil sie vom dritten Grade ist, noch eine dritte, reale Asymptote besitzen. Da die Richtung der letzteren bei dem hier eingeschlagenen Vorgang nicht zum Ausdrucke gelangt, muss die Asymptote parallel zur y-Axe sein. Dies ist auch thatsächlich der Fall, denn die Curve ist die bereits auf ihre zur y-Axe parallele Asymptoten untersuchte Cissoide. (Fig. 35.

3. Es sind die Asymptoten der Curve

$$x^3 - 3mxy + y^3 = 0$$

zu bestimmen.

Die Gruppe der höchst dimensionierten Glieder in der Gleichung ist

$$x^3+y^3,$$

man hat also zur Bestimmung der Richtungscoefficienten der Asymptoten

$$1+a^3=0$$

oder

$$(1+a)(1-a+a^2)=0,$$

woraus

$$a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad a_3 = \frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}$$

folgt.

Die Curve, das Cartesische Blatt genannt, hat also eine reale Asymptote mit der Richtung 1 : 1. Zur Bestimmung der Constanten b der Asymptotengleichung hat man nur

$$y = -x+b$$

in die Curvengleichung zu substituieren und den Coefficienten der zweithöchsten Potenz des x gleich Null zu setzen.

Man erhält:

$$x^3 - 3mx(-x+b) + (-x+b)^3 = 0,$$

$$3m + 3b = 0,$$

demnach

$$b = -m.$$

Die Gleichung der Asymptote ist sonach:

$$y = -x - m$$

oder

$$x + y + m = 0.$$

Der Lauf dieser interessanten Curve möge etwas näher untersucht werden.

Zunächst folgt für $x = 0$ aus der Curvengleichung $y^3 = 0$, der Ursprung ist ein Doppelpunkt, in welchem die Coordinaten»xen Tangenten sind.

Um die Punkte zu erhalten, in welchen die Tangenten parallel sind zur x-Axe, hat man bekanntlich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{3x^2 - 3my}{3mx - 3y^2} = 0,$$

d. h.

$$3x^2 - 3my = 0$$

zu setzen und daraus mit Zuhilfenahme der Curvengleichung

$$x^3 - 3mxy + y^3 = 0$$

die zusammengehörigen Werte von x und y zu bestimmen.

Man findet auf diese Weise:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = m\sqrt[3]{2}, \\ y_2 = m\sqrt[3]{4}. \end{cases}$$

Setzt man anderseits $\frac{dy}{dx} = \infty$, d. h.

$$-3mx + 3y^2 = 0,$$

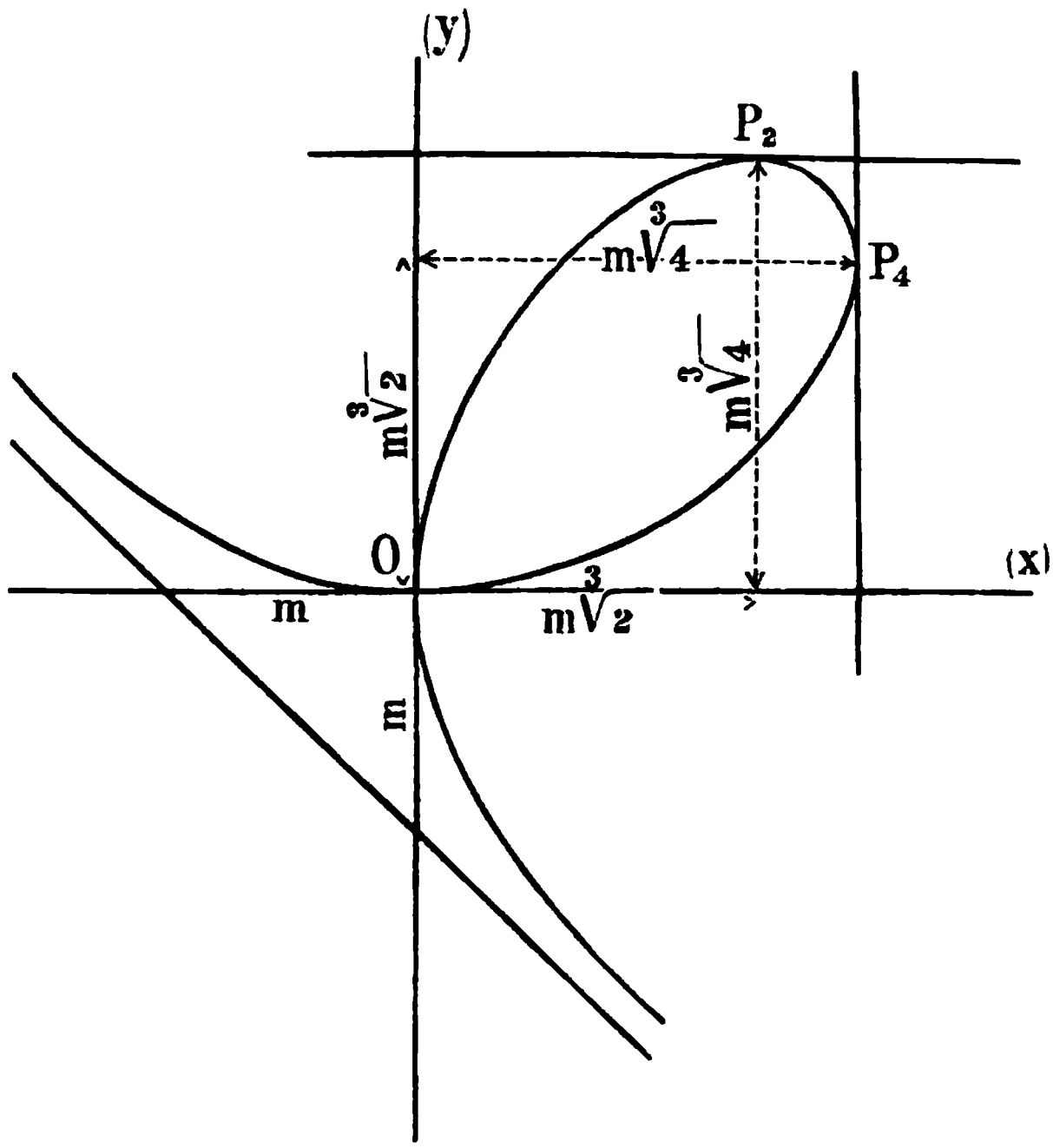
so erhält man mit Zuhilfenahme der Curvengleichung

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ y_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = m\sqrt[3]{4}, \\ y_4 = m\sqrt[3]{2} \end{cases}$$

als Coordinaten der Punkte, in welchen die Tangenten parallel sind zur y-Axe. (Fig. 38.)

Die Coordinatenaxen sind Tangenten im Ursprung, die Curve hat im Punkte $P_2$ eine zur x-Axe, in $P_4$ eine zur y-Axe parallele Tangente und die Gerade

Fig. 38.




$y + x + m = 0$ zur Asymptote, somit den in der Figur gezeichneten Verlauf. Dass sie keine Wendepunkte besitzt, kann durch Untersuchung der zweiten Differentialquotienten leicht nachgewiesen werden.

4. Die durch die Gleichung

$$y = \frac{x^3}{1 - x^2}$$

gegebene Curve ist dadurch interessant, dass sie drei reale, im endlichen Bereiche gelegene Asymptoten besitzt. (Fig. 39.)

Zwei Asymptoten derselben sind parallel zur y-Axe und ihre Gleichungen sind $x = 1$ und $x = -1$, denn für diese beiden Werte des x wird $y = \infty$.

Zur Bestimmung der dritten Asymptote braucht man nur die beiden Constanten ihrer Gleichung a und b zu bestimmen. Diese ergeben sich:

$$a = \lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x=\infty} \frac{x^2}{1 - x^2} = \lim_{x=\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} - 1} = -1,$$

$$b = \lim_{x=\infty} (y - a\,x) = \lim_{x=\infty} \left( \frac{x^3}{1 - x^2} + x \right) = \lim_{x=\infty} \frac{x}{1 - x^2} = 0.$$

Demnach ist die Gleichung der dritten Asymptote

$$y = -x.$$

Um sich über den Verlauf der Curve Aufschluss zu geben, bildet man

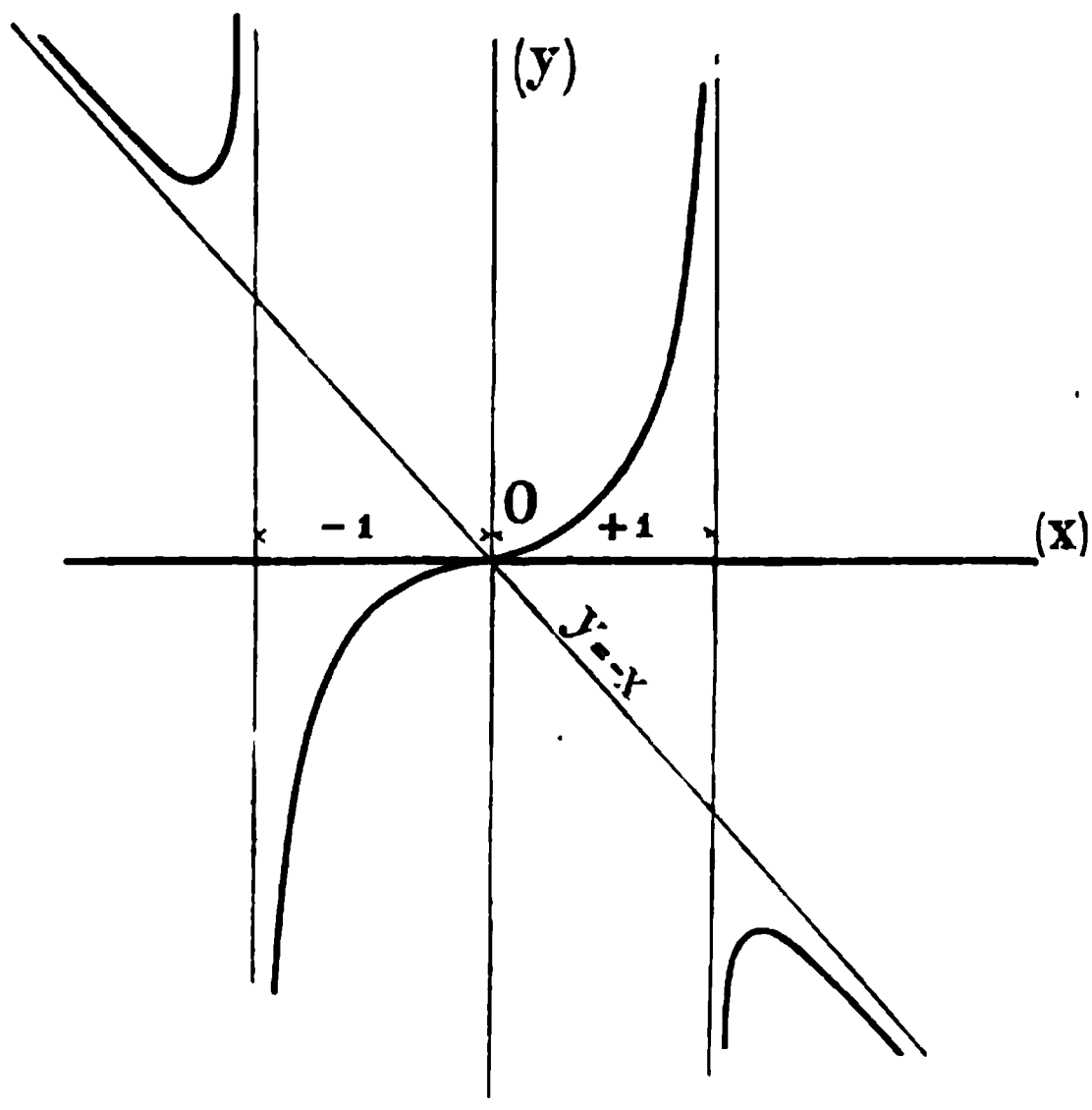
$$y' = \frac{3x^2(1-x^2)+2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2},$$

$$y'' = \frac{(1-x^2)^2(6x-4x^3)+(3x^2-x^4)4x(1-x^2)}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{(1-x^2)(6x-4x^3)+(3x^2-x^4)4x}{(1-x^2)^3} =$$

$$= \frac{2x^3+6x}{(1-x^2)^3} = \frac{2x(3+x^2)}{(1+x)^3(1-x)^3}.$$

Fig. 39.




Man erkennt daraus dass y'' positiv, also die Curve nach oben gekrümmt ist, so lange sich x mit seinen Werten zwischen $-\infty$ und $-1$ bewegt. Für Werte von x, welche zwischen $-1$ und 0 liegen, ist y'' negativ, also die Curve nach abwärts gekrümmt. Nimmt x Werte an von 0 bis $+1$, so ist y'' positiv, also die Curve in diesem Theile wieder nach oben gekrümmt, und bewegt sich schließlich x mit seinen Werten zwischen $+1$ und $+\infty$, so ist y'' negativ, also die Curve nach abwärts gekrümmt. Demzufolge müssen Inflexionspunkte vorhanden sein. Nun wird $y''=0$ für $x=0$ und für $x=0$ wird auch $y=0$ und $y'=0$, mithin ist der Ursprung ein Wendepunkt und die x-Axe die Wendetangente. Ferner wird $y''=0$, wenn $3+x^2=0$, demnach existieren auch Wendepunkte für $x=\pm i\sqrt{3}$, sie sind aber imaginär und liegen mit dem realen in einer Geraden.

Die Gestalt der Curve ist der Figur zu entnehmen.

## § 52. Die Fußpunktscurven.

Der geometrische Ort der Fußpunkte aller Normalen, die aus einem beliebigen Punkte zu sämmtlichen Tangenten einer

Curve geführt werden, ist eine Curve, welche die Fußpunktscurve in Bezug auf jenen festen Punkt genannt wird.

Da jeder Punkt der Ebene zum Ursprung des Coordinatensystems gewählt werden kann, was nur eine einfache Transformation der Coordinaten nach sich zieht, so soll hier nur folgende Aufgabe zur Lösung gelangen:

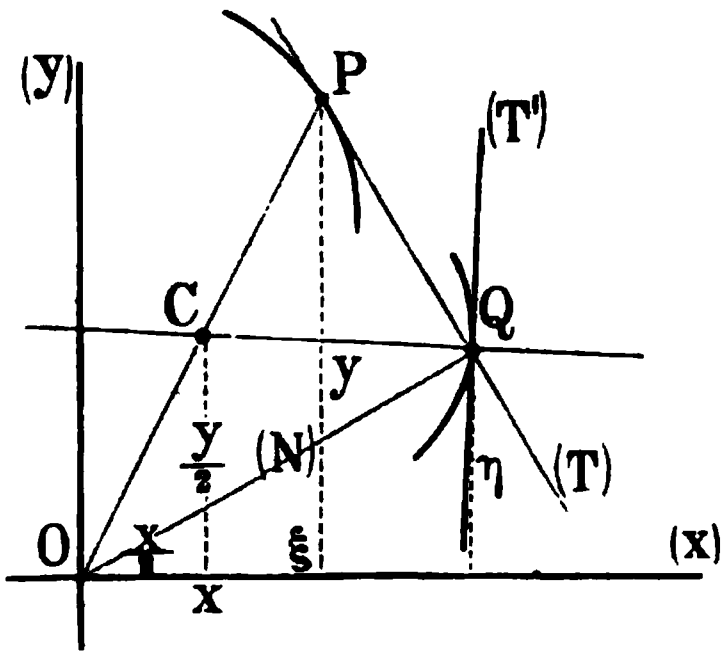
Es soll die Fußpunktscurve in Bezug auf den Ursprung einer durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ gegebenen Curve aufgestellt und die Construction der Tangente in einem beliebigen Punkte dieser Fußpunktscurve ermittelt werden.

Ist P (Fig. 40) ein Punkt, der durch die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

gegebenen Curve und (T) die Tangente in demselben, so ist der Fußpunkt Q der aus dem Ursprung O zu dieser Tangenten geführten Normalen (N) ein Punkt der Fußpunktscurve.

Fig. 40.




Analytisch ist dieser Punkt Q als Schnittpunkt der Geraden T und N durch deren Gleichungen bestimmt.

Die Gerade (T) als Tangente im Punkte P der Curve hat die Gleichung

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

die Gerade (N) als eine zu (T) aus dem Ursprunge geführte Normale wird durch die Gleichung

$$\frac{\xi}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

repräsentiert.

Bei der Bewegung des Punktes P auf der gegebenen Curve $F(x, y) = 0$ beschreibt der Punkt Q die zu suchende Fußpunktscurve.

Damit sich der Punkt P auf der Curve bewege, müssen seine Coordinaten x und y stets der Gleichung derselben genügen.

Demnach stellt das Gleichungssystem

$$F(x, y) = 0,$$

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\xi}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

worin x und y als Parameter zu betrachten sind, die Fußpunktscurve vor, denn aus der ersten Gleichung können nach und nach die Coordinaten sämmtlicher Punkte der Curve F berechnet und in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt werden, worauf diese dann die Coordinaten eines Punktes der Fußpunktscurve geben.

Durch Elimination von x und y aus diesem Gleichungssystem gelangt man zu einer Gleichung

$$\Phi(\xi, \eta) = 0$$

zwischen den Coordinaten solcher Punkte Q, also zur Gleichung der Fußpunktscurve.

Die Ausführung der Elimination ist selbstverständlich nur in einzelnen speciellen Fällen möglich.

Indessen genügt bereits das Gleichungssystem

$$F(x, y) = 0,$$

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\xi}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

zur Ermittlung einer für alle Fußpunktscurven geltenden allgemeinen Tangentenconstruction.

Die Richtung der Tangente T ist bestimmt durch das Verhältnis $dx : dy$, jene der Tangente in Q an die Fußpunktscurve durch $d\xi : d\eta$.

Aus der dritten Gleichung folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} = \xi : \eta,$$

man kann also in der zweiten Gleichung wegen ihrer Homogenität bezüglich $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ diese Größen durch die ihnen proportionalen $\xi$ und $\eta$ ersetzen und erhält:

$$(\xi - x)\xi + (\eta - y)\eta = 0$$

oder

$$\xi^2 + \eta^2 - (\xi x + \eta y) = 0.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung gelangt man zu

$$2\xi\,d\xi + 2\eta\,d\eta - (\xi\,dx + \eta\,dy) - (x\,d\xi + y\,d\eta) = 0.$$

worin $\xi\,dx + \eta\,dy = 0$, weil die Verhältnisse $\xi : \eta$ und $dx : dy$ die Richtungen der Normalen (N) und der Tangente (T) bestimmen, mithin Componenten normaler Richtungen sind. Daher ist auch

$$2\xi\,d\xi + 2\eta\,d\eta - (x\,d\xi + y\,d\eta) = 0,$$

so dass schließlich die Gleichung

$$\left(\xi - \frac{x}{2}\right) d\xi + \left(\eta - \frac{y}{2}\right) d\eta = 0$$

hervorgeht, welche anzeigt, dass die Gerade mit der Richtung $d\xi : d\eta$, d. h. die Tangente in Q der Fußpunktscurve senkrecht steht zur Geraden von dem Richtungsverhältnisse

$$\left(\xi - \frac{x}{2}\right) : \left(\eta - \frac{y}{2}\right),$$

d. h. zur Verbindungslinie des Punktes Q mit dem Halbierungspunkte C des Radiusvector OP.

Die Gerade QC ist somit die Normale und die in Q darauf Senkrechte (T') die Tangente der Fußpunktscurve.

**Beispiele:**

Es sind die Gleichungen der Fußpunktscurven folgender durch ihre Gleichungen gegebenen Curven in Bezug auf den Ursprung zu bestimmen.

*1. Der Ellipse* (Fig. 41).

Hier ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

die Gleichung der Curve also

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2},$$

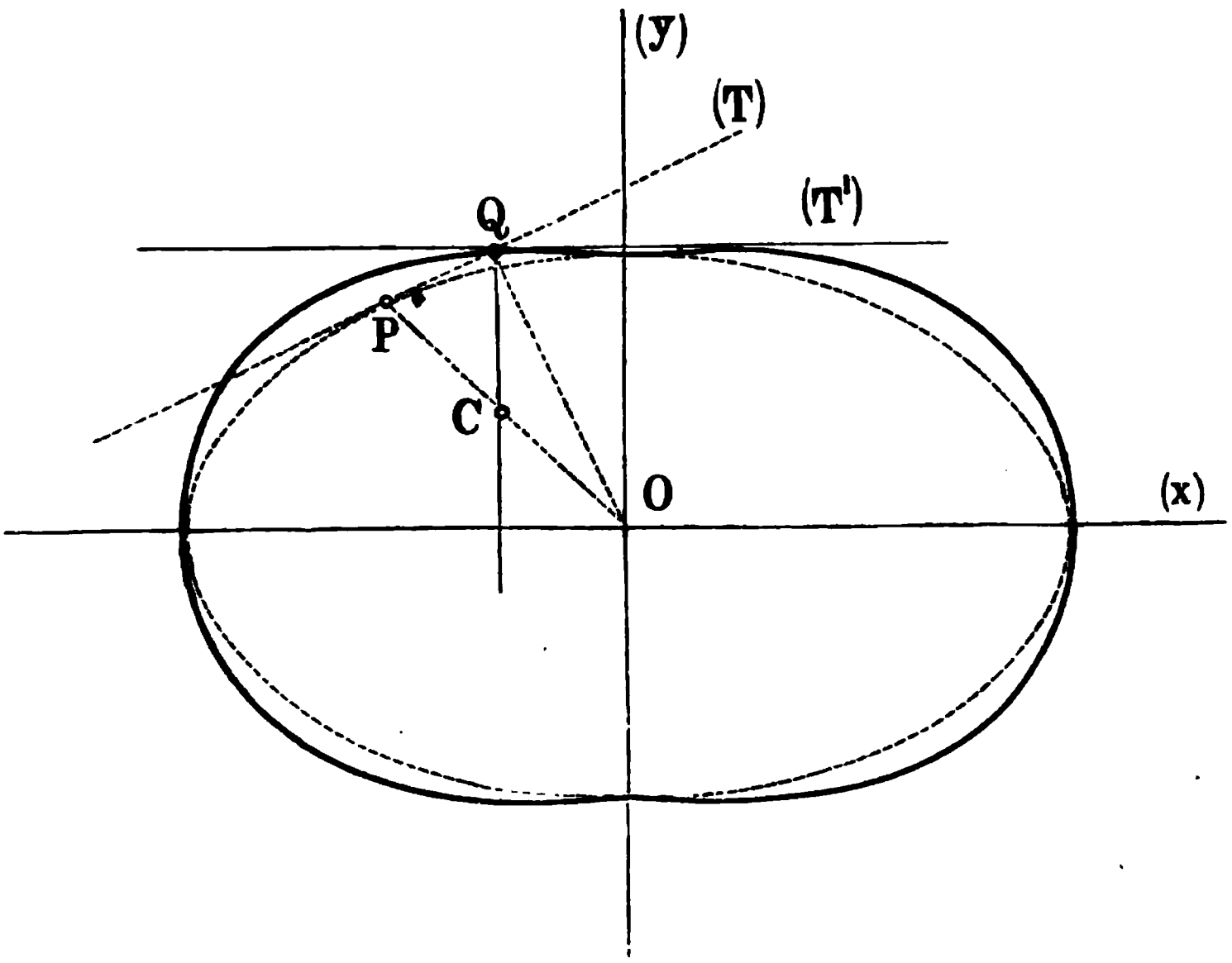
so dass zur Bestimmung der Punkte der Fußpunktscurve folgende Gleichungen dienen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$(\xi - x)\frac{x}{a^2} + (\eta - y)\frac{y}{b^2} = 0,$$

$$\frac{a^2\xi}{x} = \frac{b^2\eta}{y}.$$

Fig. 41.




Eliminiert man aus denselben x und y, so erhält man die Gleichung er Fußpunktscurve.

Die zweite Gleichung kann auf die Form gebracht werden:

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

nd geht nach Berücksichtigung der ersten Gleichung in

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1$$

ber. Die dritte Gleichung gibt, wenn man sie mit $\frac{xy}{b^2 a^2}$ multipliciert

$$\frac{\xi y}{b^2} - \frac{\eta x}{a^2} = 0.$$

Aus den letzten zwei Gleichungen können $\xi$ und $\eta$ bestimmt werden nd man erhält:

$$\xi = \frac{a^2 b^4 x}{b^4 x^2 + a^4 y^2},$$

$$\eta = \frac{a^4 b^2 y}{a^4 y^2 + b^4 x^2}.$$

Demnach ist

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{a^4 b^4}{a^4 y^2 + b^4 x^2},$$

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 = \frac{(a^4 b^4)^2}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^2},$$

d. h. die Coordinaten eines Punktes der Fußpunktscurve befriedigen die Gleichung

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2.$$

Diese enthält kein x und y, ist somit die gesuchte Gleichung der Fußpunktscurve.

Die Fußpunktscurve der Ellipse in Bezug auf ihren Mittelpunkt ist somit eine Curve vierter Ordnung, welche durch die Scheitelpunkte der Ellipse geht.

Die Coordinaten des Ursprunges $\xi = 0$ und $\eta = 0$ genügen ihrer Gleichung, mithin ist der Ursprung ein isolierter Punkt der Curve.

2. *Der gleichseitigen Hyperbel* (Fig. 42).

Hier ist

$$\frac{x^2 - y^2}{a^2} - 1 = 0,$$

demnach

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-2y}{a^2},$$

so dass die Fußpunktscurve durch folgendes Gleichungssystem gegeben ist:

$$\frac{x^2 - y^2}{a^2} - 1 = 0,$$

$$(\xi - x)\frac{x}{a^2} - (\eta - y)\frac{y}{a^2} = 0,$$

$$\frac{a^2 \xi}{x} = -\frac{a^2 \eta}{y}.$$

Die zweite dieser Gleichungen kann in der Form dargestellt werden:

$$\frac{\xi x - \eta y}{a^2} = \frac{x^2 - y^2}{a^2}$$

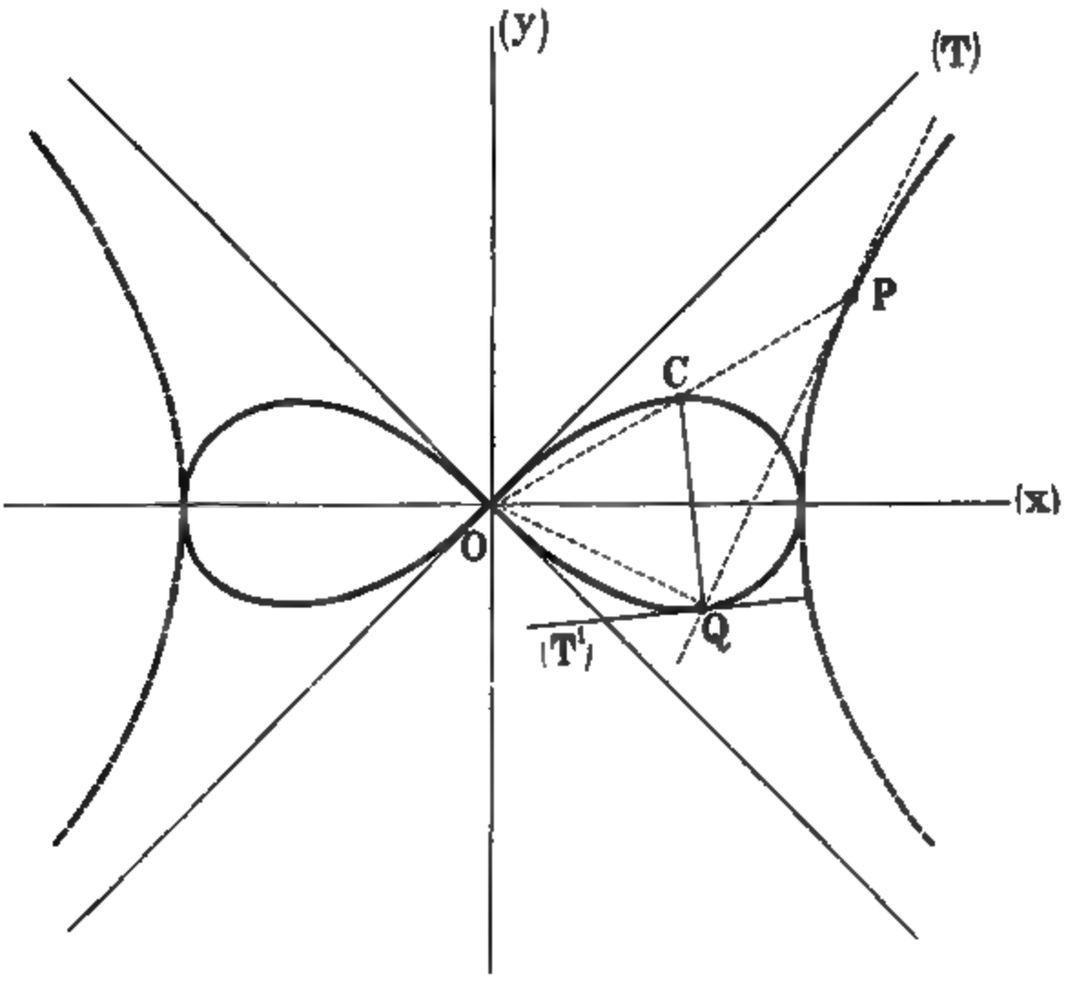
und geht nach Berücksichtigung der ersten Gleichung in

$$\xi x - \eta y = a^2$$

über. Multipliciert man die dritte Gleichung mit $\frac{xy}{a^2}$, so erhält diese die Form

$$\xi y + \eta x = 0.$$

Fig. 42.




Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man durch Auflösen derselben nach $\xi$ und $\eta$:

$$\xi = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2},$$

$$\eta = \frac{-a^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Mithin ist

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{a^4 (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$a^2 (\xi^2 - \eta^2) = \frac{a^2 . a^4 (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} =$$

und es besteht die Gleichung

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = a^2(\xi^2 - \eta^2).$$

Diese enthält kein x und y, ist somit die Gleichung der auf den Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel bezogenen Fußpunktscurve. welche Lemniscate genannt wird.

Für die Untersuchung der Lemniscate pflegt man dieselbe auf ein Polarcoordinatensystem zu beziehen, weil ihre Gleichung in Polarcoordinaten wesentlich einfacher ist.

Um von der gefundenen Gleichung auf jene in Polarcoordinaten überzugehen, benützt man die bekannten Transformationsgleichungen:

$$\xi = r\cos\varphi; \qquad \eta = r\sin\varphi$$

und erhält

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 = a^2(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi)$$

oder

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi.$$

Diese Gleichung lässt deutlich erkennen, dass für jeden Wert von $\varphi$ zwei entgegengesetzt gleiche Werte von r resultieren, dass also die Lemniscate den Ursprung zum Mittelpunkte hat. Da ferner für gleiche positive und negative $\varphi$ der Cosinus denselben Wert hat, so ist die Curve symmetrisch zu den Coordinatenaxen. Kennt man also die Gestalt der Curve für die Werte von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so ist auch ihr ganzer Verlauf bekannt.

Aus der Gleichung

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi$$

folgt weiters für

$$\varphi = 0, \quad r = a,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6}, \quad r = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad r = 0.$$

Wird $\varphi$ größer als $\frac{\pi}{4}$, d. h. $2\varphi > \frac{\pi}{2}$, so wird $\cos 2\varphi$ negativ. also r imaginär, die realen Punkte der Curve liegen sonach in den Scheitelräumen zwischen den Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel. welche, wie leicht einzusehen, Inflexionstangenten im Ursprung sein müssen u. s. w.

Die Lemniscate hat demnach den in der Figur angegebenen Verlauf.

*3. Der Parabel.*

Aus der Gleichung der Parabel

$$y^2 - 2px = 0$$

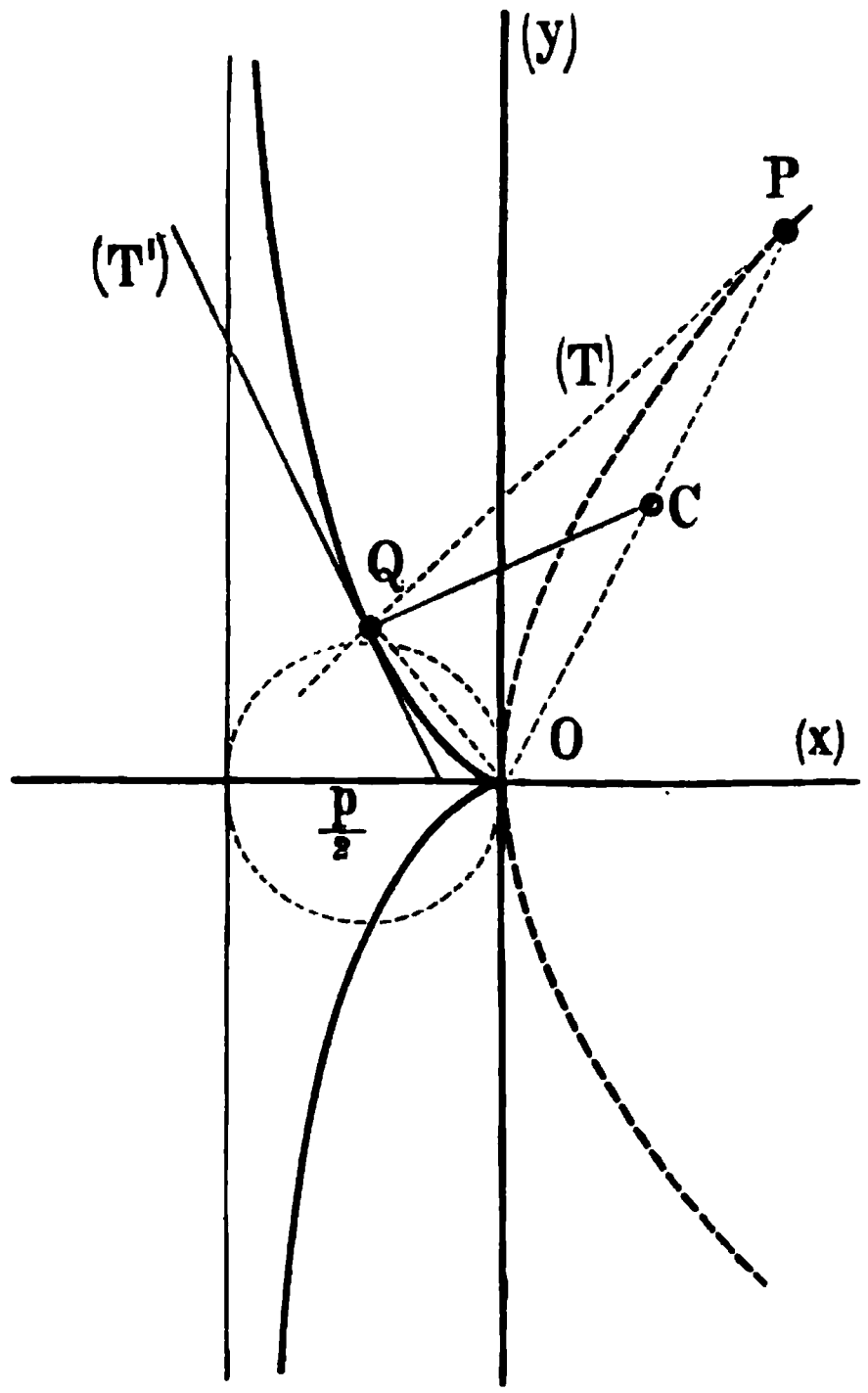
folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2p, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Es besteht somit für die Punkte der auf den Ursprung bezogenen Fußpunktscurve (Fig. 43) das Gleichungssystem:

$$y^2 - 2px = 0,$$
$$-p(\xi - x) + y(\eta - y) = 0,$$
$$\frac{\xi}{-p} = \frac{\eta}{y}.$$

Fig. 43.




Aus diesen drei Gleichungen ist nun x und y zu eliminieren, was einfach auf folgende Art geschieht.

Aus der dritten Gleichung berechnet man:

$$y = -\frac{p\eta}{\xi}$$

und setzt diesen Wert in die geordnete zweite Gleichung

$$-p\xi + px + \eta y - y^2 = 0,$$

in welcher zuerst mit Rücksicht auf die erste $px$ durch $\frac{y^2}{2}$ ersetzt worden ist, dadurch nimmt dieselbe die Form

$$-p\xi - \frac{y^2}{2} + \eta y,$$

an und man findet:

$$-p\xi - \frac{p^2}{2}\frac{\eta^2}{\xi^2} - \eta\frac{p\eta}{\xi} = 0$$

oder

$$(\xi^2 + \eta^2)\xi + \frac{p}{2}\eta^2 = 0$$

als Gleichung der Fußpunktscurve der Parabel in Bezug auf ihren Scheitel.

Diese Fußpunktscurve ist die bereits untersuchte Cissoide, denn ihre Gleichung geht, wenn man die Richtung der positiven x-Axe entgegengesetzt der hier gewählten annimmt und $\frac{p}{2} = 2r$ setzt, in die Gleichung

$$(\xi^2 + \eta^2)\,\xi = 2r\,\eta^2$$

über, welche eine Cissoide darstellt.

*4. Eines Kreises,*

welcher durch den Ursprung geht und dessen Mittelpunkt in der x-Axe liegt.

Da in diesem Falle die Gleichung der Curve

$$(x - a)^2 + y^2 - a^2 = 0$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

lautet, also

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - a); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,$$

so ist das Gleichungssystem der Fußpunktscurve:

$$(x - a)^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

$$(\xi - x)(x - a) + (\eta - y)\,y = 0,$$

$$\frac{\xi}{x - a} = \frac{\eta}{y}.$$

Setzt man:

$$\frac{\xi}{x - a} = \frac{\eta}{y} = \rho,$$

so folgt:

$$x - a = \frac{\xi}{\rho},$$

$$y = \frac{\eta}{\rho},$$

und nach Einsetzung dieser Werte in die Kreisgleichung:

$$\frac{\xi^2}{\rho^2} + \frac{\eta^2}{\rho^2} = a^2,$$

also

$$\rho^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2}; \quad \rho = \frac{1}{a}\sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Man hat somit

$$x - a = \frac{a\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}; \quad y = \frac{a\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

und erhält, wenn man diese Werte in die zweite Gleichung des Systems einführt, nach einfacher Reduction

$$\xi^2 + \eta^2 - a\xi = a\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

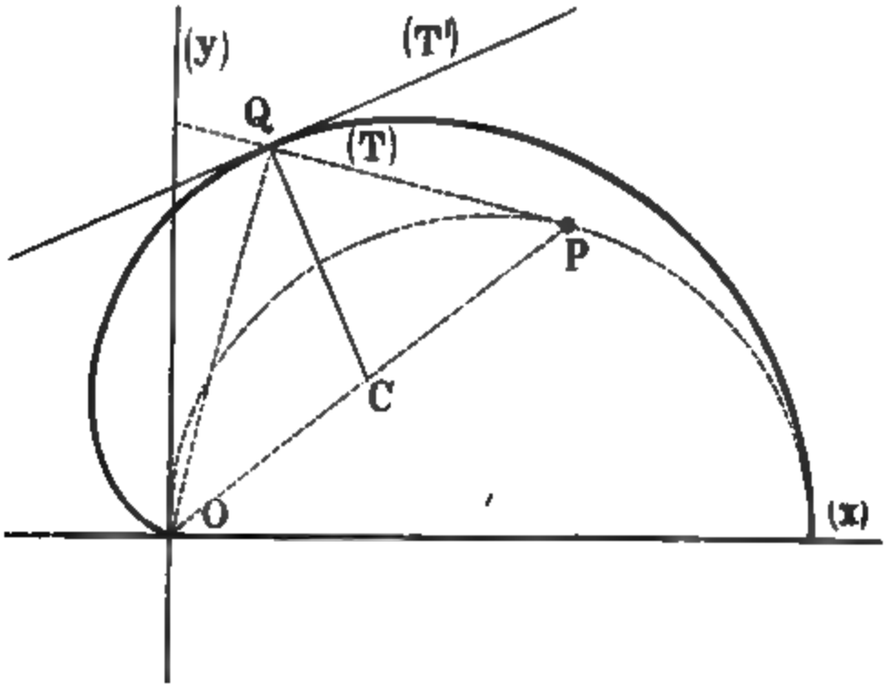
oder

$$(\xi^2 + \eta^2 - a\xi)^2 - a^2(\xi^2 + \eta^2) = 0$$

als Gleichung der Fußpunktscurve des Kreises in Bezug auf einen Punkt des Umfanges.

Diese wegen ihrer Herzform Cardioide genannte Curve (Fig. 44) hat in Polarcoordinaten eine bedeutend einfachere Gleichung,

Fig. 44.




welche aus der aufgestellten, durch Benützung der Transformationsgleichungen

$$\xi = r\cos\varphi; \quad \eta = r\sin\varphi$$

erhalten wird:

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - ra\cos\varphi = a\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi},$$

$$r(r - a\cos\varphi) = ar,$$

$$r = a(1 + \cos\varphi).$$

Die Curve ist zur x-Axe symmetrisch, ihre Gestalt k der Figur entnommen werden.

## § 53. Umhüllungslinien oder Enveloppen.

I. Eine Gleichung

$$F(x, y, \alpha) = 0$$

zwischen den variablen Punktcoordinaten x und y und einem willkürlichen Parameter $\alpha$ stellt geometrisch eine Curvenschar vor. denn jedem bestimmten Werte des Parameters $\alpha$ entspricht die Gleichung einer bestimmten Curve, mithin entsprechen den unendlich vielen Werten dieses Parameters unendlich viele Curven derselben Art, welche sich von einander entweder nur durch ihre Lage bezüglich des Coordinatensystems, oder nur durch die Gestalt, oder durch beides unterscheiden.

Häufig wird durch eine solche Curvenschar eine neue Curve erzeugt, nämlich jene, welche den geometrischen Ort der Schnittpunkte je zweier benachbarten Curven der Schar bildet.

Damit überhaupt eine Curve als Verbindungslinie der Schnittpunkte unmittelbar aufeinander folgender Curven der Schar existiere. müssen diese Schnittpunkte in der Ebene stetig angeordnet sein, was nur möglich sein kann. wenn die Function $F(x, y, \alpha)$ in Bezug auf $\alpha$ stetig ist.

Betrachtet man zwei Curven der Schar, und zwar diejenige welche dem Parameterwerte $\alpha$ und jene welche dem Parameterwerte $\alpha + h$ entspricht, so sind die Coordinaten der Schnittpunkte dieser beiden Curven die gemeinschaftlichen Auflösungen der Gleichungen

$$F(x, y, \alpha) = 0,$$
$$F(x, y, \alpha + h) = 0$$

oder auch der Gleichungen

$$F(x, y, \alpha) = 0,$$
$$\frac{F(x, y, \alpha + h) - F(x, y, \alpha)}{h} = 0,$$

denn die zweite der letzteren ist durch lineare Combination der beiden ersteren entstanden, repräsentiert also eine Curve, welche durch die Schnittpunkte der beiden in Betracht gezogenen geht, ersetzt also wenn es sich wie hier nur um diese Schnittpunkte handelt, die zweite der Curven vollständig.

Lässt man nun h continuierlich gegen Null abnehmen, so rückt die zweite Curve immer näher der ersten, und die Schnittpunkte der beiden Curven bewegen sich auf der ersten, nähern sich hiebei bestimmten Grenzlagen, welche sie für $\lim h = 0$ erreichen.

Mit Rücksicht auf den Begriff des partiellen Differentialquotienten ist aber

$$\lim \frac{F(x, y, \alpha + h) - F(x, y, \alpha)}{h} = \frac{\partial F}{\partial \alpha},$$

mithin sind die Grenzlagen der Schnittpunkte, d. h. die Schnittpunkte unmittelbar benachbarter Curven durch die Gleichungen

$$F(x, y, \alpha) = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$$

gegeben. Sind thatsächlich derartige Grenzpunkte vorhanden, so sind sie auf jeder Curve der Schar vorhanden und ihr geometrischer Ort ist eine Curve, welche die Einhüllende oder Enveloppe der Curvenschar genannt wird.

Ihre Gleichung wird durch Elimination des Parameters $\alpha$ aus den Gleichungen

$$F(x, y, \alpha) = 0$$

und

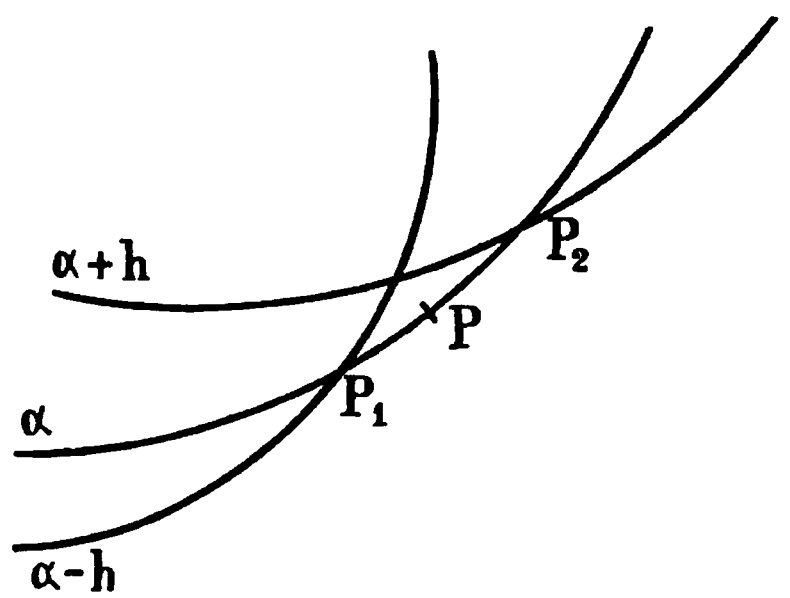
$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$$

erhalten.

Die Enveloppe berührt alle eingehüllten Curven in den Grenzpunkten, deren geometrischer Ort sie ist, diese Eigenschaft hat zur Benennung Enveloppe oder Einhüllende Veranlassung gegeben.

Die Richtigkeit dieser Behauptung kann durch eine einfache Überlegung erkannt werden. Von drei Curven der Schar, welche den Parametern $\alpha - h$, $\alpha$ und $\alpha + h$ (Fig. 45) entsprechen, werde jene mit dem Parameter $\alpha$ durch die beiden anderen in den Punkten $P_1$ und $P_2$ geschnitten. Hält man nun den Parameter $\alpha$ fest und lässt h gegen Null abnehmen, so nähern sich diese beiden Punkte immer mehr und mehr der Grenzlage P auf der Curve $\alpha$. Der Grenzpunkt P ist aber ein Punkt der Enveloppe und vertritt zwei Nachbarpunkte, weil zwei Punkte $P_1$ und $P_2$ der Curve vom Parameter $\alpha$ dor einander unendlich nahe gerückt sind, mithin hat die Envelop

Fig. 45.



mit der Curve der Schar zwei Nachbarpunkte. also auch die Tangente gemein.

II. Bei vielen Aufgaben kommt es vor, dass die Gleichung

$$F(x, y. \alpha, \beta) = 0$$

einer Curvenschar zwei Parameter $\alpha$ und $\beta$ enthält, zwischen welchen eine Bedingungsgleichung

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

besteht.

In einem solchen Falle könnte man mit Hilfe der zwischen den Parametern bestehenden Gleichung einen derselben durch den anderen ausdrücken und die Aufgabe sodann auf dem eben besprochenen Wege lösen.

Dies ist aber nicht immer möglich, oder manchmal mindestens mit Schwierigkeiten verbunden, so dass es vortheilhafter ist, bei der Differentiation einfach einen Parameter als Function des anderen anzusehen. Betrachtet man $\beta$ als Function von $\alpha$, so erhält man durch Differentiation die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

aus welchen $\frac{d\beta}{d\alpha}$ eliminiert werden kann.

Das Eliminationsresultat

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial \alpha} & \frac{\partial F}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} & \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$$

bildet dann in Verbindung mit

$$F(x, y, \alpha, \beta) = 0$$

und

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

das Gleichungssystem, welches die Punkte der Enveloppe bestimmt. deren Gleichung durch Elimination von $\alpha$ und $\beta$ aus demselben erhalten werden kann.

**Beispiele:**

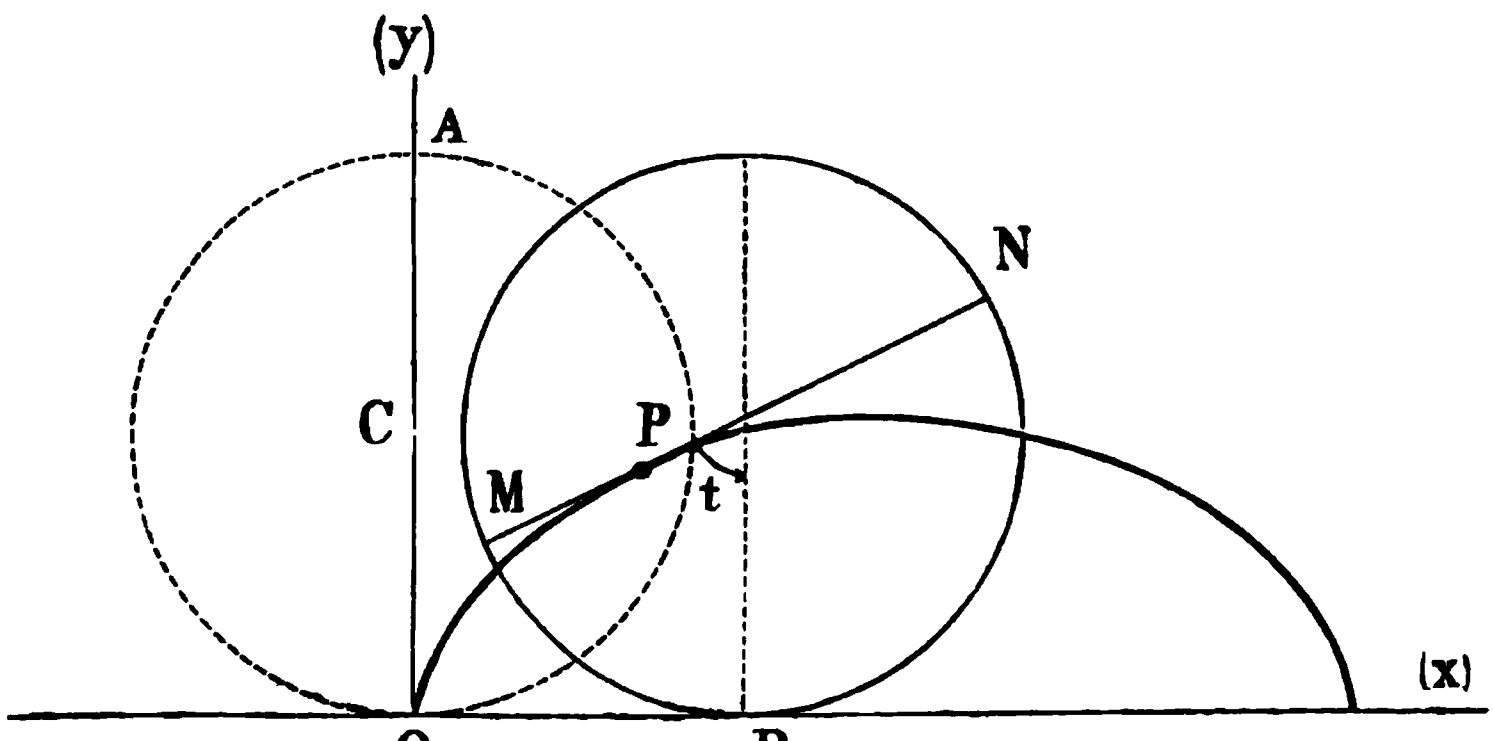
1. Ein gegebener Kreis rollt auf einer Geraden, es ist die Einhüllende aller Lagen eines bestimmten Durchmessers desselben zu bestimmen.

Wird die Gerade, auf welcher der Kreis rollt, zur x-Axe, die Anfangslage OA (Fig. 46) des Durchmessers senkrecht zu derselben angenommen und zur y-Axe gewählt, so ist der Durchmesser in einer beliebigen Lage durch die Gleichung

$$y - a = \operatorname{cotg} t \,.\, (x - a\,t).$$

gegeben.

Fig. 46.




Denn gelangt der Kreis durch Abrollen seines Bogens BM, welcher dem Wälzungswinkel t entspricht, in die in der Figur voll gezeichnete Lage, so erlangt der Mittelpunkt C desselben, weil $OB = \text{arc } BM$, die Coordinaten $x = a\,t$, $y = a$, wenn a der Radius des Kreises ist. Der Durchmesser OA kommt hiebei in die Lage MN und schließt mit der x-Axe den Winkel $\frac{\pi}{2} - t$ ein, mithin hat er als Gerade, welche durch einen Punkt mit den Coordinaten $x = a\,t$ und $y = a$ geht und mit der x-Axe den Winkel $\frac{\pi}{2} - t$ einschließt, die Gleichung

$$y - a = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(x - a\,t).$$

welche mit der früher angegebenen übereinstimmt.

Die Schar der Durchmesser ist somit durch die den Parameter t enthaltende Gleichung

$$(y - a) - \operatorname{cotg} t\,(x - a\,t) = 0$$

gegeben.

Um die Gleichung der Einhüllenden zu bestimmen, hat man nach t partiell zu differenzieren und aus der dadurch entstehenden Gleichung

$$+ (x - a t) \frac{1}{\sin^2 t} + a \operatorname{cotg} t = 0,$$

und der Gleichung des Durchmessers den Parameter t zu eliminieren.

Aus der letzten Gleichung findet man

$$x - a t = - a \cos t \sin t = - \frac{a}{2} \sin 2 t$$

und durch Einsetzung in die Gleichung des Durchmessers

$$y = a (1 - \cos^2 t) = a \sin^2 t = \frac{a}{2} (1 - \cos 2 t),$$

während

$$x = a t - a \sin t \cos t = \frac{a}{2} (2 t - \sin 2 t).$$

Die Einhüllende wird demnach durch die Gleichungen

$$x = \frac{a}{2} (2 t - \sin 2 t),$$

$$y = \frac{a}{2} (1 - \cos 2 t)$$

ausgedrückt, ist also eine Cykloide, welche ein Punkt eines Kreises von halb so großem Durchmesser als jener des gegebenen Kreises beschreibt.

2. Es ist die Enveloppe einer Schar von Kreisen zu bestimmen, deren Mittelpunkte auf einer Parabel liegen, während sie selbst alle durch den Scheitel der Parabel gehen.

Wählt man die Axe und Scheiteltangente der Parabel zu Coordinatenaxen, so gehen alle Kreise der Schar durch den Ursprung. (Fig. 47.)

Sind $\alpha$ und $\beta$ die Coordinaten des Mittelpunktes eines Kreises der Schar, so ist dessen Gleichung

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2 \alpha x - 2 \beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0,$$

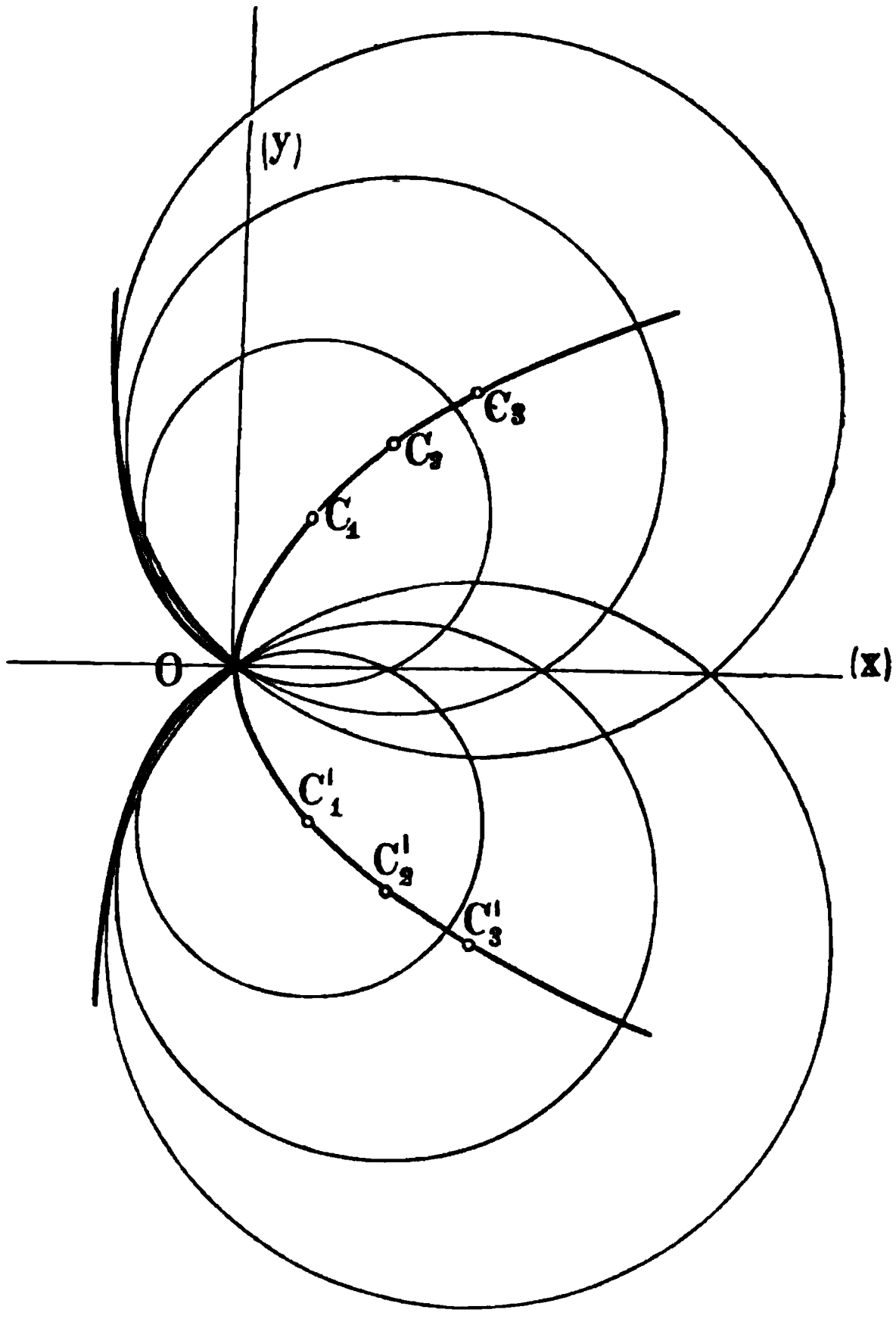
und da $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$, weil der Kreis durch den Ursprung geht, reduciert sich diese Gleichung auf

$$x^2 + y^2 - 2 \alpha x - 2 \beta y = 0.$$

Da der Kreismittelpunkt auf der Parabel $y^2 = 2px$ liegen muss, besteht die Beziehung

$$\beta^2 = 2p\alpha,$$

Fig. 47.




aus welcher

$$\alpha = \frac{\beta^2}{2p}$$

folgt.

Demnach wird die Kreisschar repräsentiert durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2\left(\frac{\beta^2}{2p}x + \beta y\right) = 0.$$

Durch Differentiation nach $\beta$ erhält man:

$$-2\left(\frac{\beta}{p}x + y\right) = 0.$$

Das Gleichungssystem der Enveloppe ist also

$$x^2 + y^2 - 2\left(\frac{\beta^2}{2p}x + \beta y\right) = 0,$$

$$\beta x + p y = 0.$$

Um zu der Gleichung der Enveloppe zu gelangen, hat man nur aus beiden Gleichungen $\beta$ zu eliminieren, was am einfachsten geschieht. wenn man aus der zweiten Gleichung $\beta$ bestimmt und den auf diese Weise erhaltenen Wert

$$\beta = -\frac{p y}{x}$$

in die erste einsetzt. Es ergibt sich

$$x^2 + y^2 - 2\left(\frac{p y^2}{2x} - \frac{p y^2}{x}\right) = 0$$

oder

$$x^2 + y^2 + \frac{p y^2}{x} = 0,$$

und schließlich

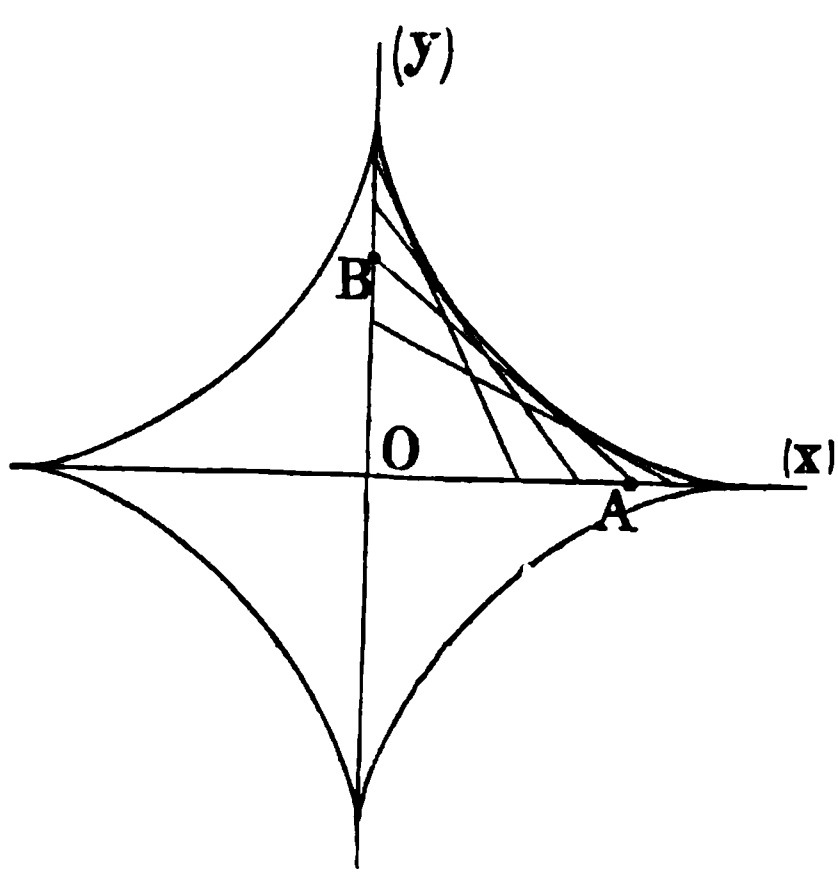
$$(x^2 + y^2)x = -p y^2$$

als Gleichung der Enveloppe.

Diese Curve ist sonach die bereits untersuchte Cissoide, welche sich von der Fußpunktscurve der Parabel nur durch die Constante in ihrer Gleichung unterscheidet.

3. Eine Gerade bewegt sich derart, dass das zwischen den Coordinatenaxen enthaltene Stück derselben AB (Fig. 48) die constante Länge l hat. Es ist die Einhüllende aller ihrer Lagen zu bestimmen.

Fig. 48.




Sind $\alpha$ und $\beta$ die Axenabschnitte einer Geraden dieser Schar, so ist die Gleichung derselben

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0.$$

Der Bedingung der Aufgabe gemäß besteht zwischen den Axenabschnitten die Beziehung

$$\alpha^2 + \beta^2 = l^2.$$

Die Geradenschar wird somit durch das Gleichungssystem

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = l^2.$$

repräsentiert. Hier würde die Elimination eines Parameters aus den Gleichungen eine Complication hervorrufen. Betrachtet man $\beta$ als Function von $\alpha$, so erhält man durch Differentiation beider Gleichungen nach $\alpha$

$$-\frac{x}{\alpha^2} - \frac{y}{\beta^2}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$
$$\alpha + \beta\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

woraus durch Elimination von $\frac{d\beta}{d\alpha}$

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{\alpha^2} & \frac{y}{\beta^2} \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\frac{x}{\alpha^2}\beta - \frac{y}{\beta^2}\alpha = 0,$$

also

$$\frac{x}{\alpha^3} = \frac{y}{\beta^3}$$

folgt. Das Gleichungssystem der Enveloppe ist demnach

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = l^2,$$
$$\frac{x}{\alpha^3} = \frac{y}{\beta^3}.$$

Es zeigt, dass ein Punkt der Curve als Schnittpunkt einer Geraden der Schar und einer aus dem Ursprung mit der Richtung $\alpha^3 : \beta^3$ geführten Geraden erhalten wird.

Zur Durchführung der Elimination von $\alpha$ und $\beta$ aus den drei Gleichungen ist es am vortheilhaftesten, von der dritten Gleichung auszugehen und

$$\frac{x}{\alpha^3} = \frac{y}{\beta^3} = \rho,$$

zu setzen, wobei $\rho$ eine noch zu bestimmende Größe bedeutet.

Daraus folgt

$$\alpha^3 = \frac{x}{\rho}; \qquad \beta^3 = \frac{y}{\rho}.$$

und

$$\alpha = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\rho^{\frac{1}{3}}}; \qquad \beta = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\rho^{\frac{1}{3}}};$$

Da ferner

$$\frac{x}{\alpha} = \rho\,\alpha^2 \quad \frac{y}{\beta} = \rho\,\beta^2;$$

ist

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = \rho\,(\alpha^2 + \beta^2).$$

mithin zufolge der zweiten Gleichung

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = l^2\rho$$

und mit Rücksicht auf die erste

$$1 = \rho\, l^2,$$

also

$$\rho = \frac{1}{l^2}.$$

Somit hat man

$$\alpha = x^{\frac{1}{3}}\, l^{\frac{2}{3}},$$
$$\beta = y^{\frac{1}{3}}\, l^{\frac{2}{3}}$$

und wenn man diese Werte in die Gleichung

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0$$

einführt, erhält man die Gleichung der Enveloppe:

$$\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}\, l^{\frac{2}{3}}} + \frac{y}{y^{\frac{1}{3}}\, l^{\frac{2}{3}}} = 1$$

oder

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

Diese Curve hat die in der Figur angegebene Gestalt und wird Astrois genannt.

## § 54. Berührungen verschiedener Ordnung.

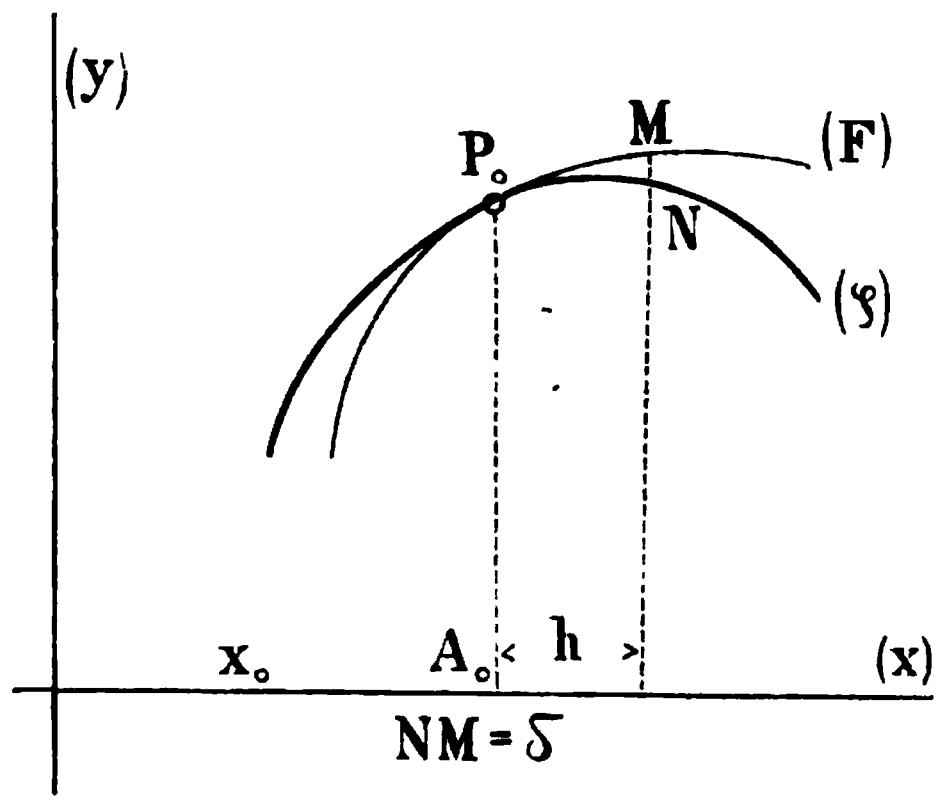
1. Berühren sich zwei Curven, deren Gleichungen

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad y = \varphi(x)$$

sind, in einem Punkte $P_0$ (Fig. 49) dessen Abscisse $x_0$ ist, so haben sie in diesem, beiden Curven gemeinschaftlichen Punkte dieselbe Gerade zur Tangente, und es müssen sonach beide Gleichungen für $x = x_0$ dieselben Werte für y und y' ergeben, also die Beziehungen bestehen:

$$f(x_0) = \varphi(x_0),$$
$$f'(x_0) = \varphi'(x_0),$$

Fig. 49.




Ertheilt man dem x einen um eine beliebig kleine Größe h verschiedenen Wert von $x_0$, so entsprechen, wenn keine weiteren Voraussetzungen gemacht werden, der Abscisse $x_0 + h$ Punkte der beiden Curven, deren Ordinaten $f(x_0 + h)$ und $\varphi(x_0 + h)$ von einander verschieden sind. Die Differenz derselben gibt den in der Richtung der Ordinatenaxe gemessenen Abstand $\delta$ der beiden Curven für die Abscisse $x_0 + h$.

$$\delta = f(x_0 + h) - \varphi(x_0 + h).$$

Entwickelt man sowohl $f(x_0 + h)$ und $\varphi(x_0 + h)$ nach Taylor und berücksichtigt, dass $f(x_0) = \varphi(x_0)$ und $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$, so erhält man

$$\delta = \frac{h^2}{2!}[f''(x_0) - \varphi''(x_0)] + \frac{h^3}{3!}[f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)] + \ldots$$

Setzt man nun voraus, dass h eine unendlich kleine Größe ist, so können alle Glieder rechts vom Gleichheitszeichen vom zweiten angefangen, als unendlich kleine Größen höherer Ordnung, gegenüber dem ersten Gliede vernachlässigt werden, und es ist dann

$$\delta = \frac{h^2}{2!}[f''(x_0) - \varphi''(x_0)],$$

d. h.

$$\frac{\delta}{h} = h\frac{1}{2!}[f''(x_0) - \varphi''(x_0)].$$

Hier ist $\frac{\delta}{h}$ eine unendlich kleine Größe derselben Ordnung wie h und man nennt die Berührung der beiden Curven eine Berührung der ersten Ordnung. Weil $\delta$ mit h sein Zeichen nicht ändert, liegt die eine Curve in der Umgebung des Berührungspunktes $P_0$ auf einer und derselben Seite der anderen.

Ist auch

$$f''(x_0) = \varphi''(x_0),$$

dann hat man

$$\delta = \frac{h^3}{3!}[f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)] + \frac{h^4}{4!}[f^{IV}(x_0) - \varphi^{IV}(x_0)] + \dots$$

und nach Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen höherer Ordnung

$$\delta = \frac{h^3}{3!}[f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)],$$

also

$$\frac{\delta}{h} = h^2\frac{1}{3!}[f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)].$$

In diesem Falle ist $\frac{\delta}{h}$ unendlich klein der zweiten Ordnung, wenn h unendlich klein von der ersten Ordnung ist. die Curven schmiegen sich in der Umgebung von $P_0$ enger aneinander als in dem eingangs besprochenen Falle. Man nennt eine solche Berührung eine Berührung zweiter Ordnung.

Da hier $\delta$ mit h das Zeichen ändert, so geht im Berührungspunkte $P_0$ die eine Curve von einer Seite auf die andere der zweiten über, die Berührung ist mit gleichzeitigem Schneiden verbunden.

Ist auch

$$\begin{aligned} f'''(x_0) &= \varphi'''(x_0), \\ f^{IV}(x_0) &= \varphi^{IV}(x_0), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f^n(x_0) &= \varphi^n(x_0), \end{aligned}$$

dann findet man

$$\delta = h^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}[f^{n+1}(x_0) - \varphi^{n+1}(x_0)],$$

also $\frac{\delta}{h}$ unendlich klein von der $n^{ten}$ Ordnung, weshalb die Berührung als eine Berührung der $n^{ten}$ Ordnung bezeichnet wird. Das Vorzeichen von $\delta$ wechselt mit h, wenn n gerade ist. daraus folgt:

Bei einer Berührung von ungerader Ordnung bleibt in der Umgebung des Berührungspunktes die eine Curve auf einer mit derselben Seite der anderen, bei einer Berührung von gerader Ordnung schneiden sich die Curven im Berührungspunkte.

Je höher die Ordnung der Berührung, desto mehr schmiegen sich beide Curven in der Nähe des Berührungspunktes einander an. Die Berührung zweier Curven von der höchst möglichen Ordnung wird eine osculatorische Berührung genannt.

2. Ist eine Curve durch eine Gleichung

$$y = \varphi(x, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n),$$

gegeben, welche n willkürliche Parameter enthält, so kann man derselben n Bedingungen auferlegen, beispielsweise dass sie durch n bestimmte Punkte geht, oder die Bedingung, dass sie mit einer zweiten Curve

$$y = f(x)$$

in einem Punkte $P_0$ derselben eine Berührung der $(n-1)^{ten}$ Ordnung eingeht.

Für die Berührung der $(n-1)^{ten}$ Ordnung müssen nämlich folgende Gleichungen erfüllt werden:

$$f(x_0) = \varphi(x_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n),$$

$$f'(x_0) = \varphi'(x_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n),$$

$$f''(x_0) = \varphi''(x_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{n-1}(x_0) = \varphi^{n-1}(x_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n).$$

Es sind dies n Gleichungen, welche zur Bestimmung der n Parameter a vollständig hinreichen, also die Curve genau präcisieren.

Da man dieser Curve, deren Gleichung n Parameter enthält, nicht mehr als n Bedingungen auferlegen kann, kann dieselbe im allgemeinen mit einer anderen keine Berührung höherer Ordnung als die der $(n-1)^{ten}$ eingehen, mithin ist diese Berührung die osculatorische.

Schreibt man der Curve eine Berührung niedererer als der $(n-1)^{ten}$ Ordnung vor, so kann man ihr noch eine entsprechende Zahl ander Bedingungen auferlegen; eine Berührung höherer Ordnung zu erzi

wird es nur äußerst selten möglich sein, in welchem Falle die Curve als superosculierend bezeichnet wird.

Die Gleichung einer Geraden enthält zwei Constante, also geht die osculierende Gerade nur eine Berührung der ersten Ordnung ein. Die Gleichung des Kreises hat drei Constante, also ist die osculatorische Berührung desselben mit einer Curve von zweiter Ordnung und mit gleichzeitigem Schneiden verbunden. Ausnahmen bilden die Superosculationen. Die Parabel hat vier Constante in ihrer Gleichung, mithin berührt sie eine Curve bei der Osculation nach der dritten Ordnung u. s. w.

Man kann leicht zeigen, dass bei einer Berührung der $(n-1)^{ten}$ Ordnung die Curven n unmittelbar benachbarte Punkte gemeinschaftlich haben.

Verlangt man nämlich, dass eine Curve, welche n Parameter in ihrer Gleichung enthält

$$y = \varphi(x, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$$

durch die n Punkte mit den Abscissen $x_0$, $x_0 + h_1$, $x_0 + h_2$, $x_0 + h_3$, $\ldots$ $x_0 + h_{n-1}$ einer zweiten

$$y = f(x)$$

geht, so müssen die Ordinaten der diesen Abscissen entsprechenden Punkte beider Curven gleich sein, es müssen also die Bedingungen bestehen

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= \varphi(x_0, a_1, a_2, \ldots a_n),\\
f(x_0 + h_1) &= \varphi(x_0 + h_1, a_1, a_2, \ldots a_n),\\
f(x_0 + h_2) &= \varphi(x_0 + h_2, a_1, a_2, \ldots a_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f(x_0 + h_{n-1}) &= \varphi(x_0 + h_{n-1}, a_1, a_2, \ldots a_n).
\end{aligned}$$

Diese Bedingungsgleichungen können, wenn überall die Entwicklung nach Taylor ausgeführt und die erste Gleichung überall berücksichtigt wird, durch folgende ersetzt werden.

$$f(x_0) = \varphi(x_0, a_1, a_2, \ldots a_n),$$

$$h_1 f'(x_0) + \frac{h_1^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h_1^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots =$$

$$= h_1 \varphi'(x_0, a_1, a_2 \ldots a_n) + \frac{h_1^2}{2!} \varphi''(x_0, a_1, a_2, \ldots a_n) + \ldots$$

$$h_2 f'(x_0) + \frac{h_2^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h_2^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots =$$

$$= h_2 \varphi'(x_0, a_1 \ldots a_n) + \frac{h_2^2}{2!} \varphi''(x_0, a_1 \ldots a_n) + \frac{h_2^3}{3!} \varphi'''(x_0, a_1 \ldots a_n) + \ldots$$

. . . . . .

Lässt man nun alle $n - 1$ Punkte unendlich nahe an den Punkt $P_0$ rücken, so nähert sich hiebei die Curve $\varphi$ einer bestimmten Grenzlage, deren Bedingungsgleichungen erhalten werden, wenn man die Größen $h_1$, $h_2$, $h_3$, ... gegen Null convergieren lässt.

Die zweite Gleichung des oben angeführten Gleichungssystems geht nach Division mit $h_1$ in

$$f'(x_0) + \frac{h_1}{2!} f''(x_0) + \frac{h_1^2}{3!} f'''(x_0) + \ldots =$$

$$= \varphi'(x_0, a_1 \ldots a_n) + \frac{h_1}{2!} \varphi''(x_0, a_1 \ldots a_n) + \ldots,$$

also wenn $h_1$ gegen Null convergiert, in

$$f'(x_0) = \varphi'(x_0, a_1, a_2 \ldots a_n).$$

über. Die Gleichung

$$f'(x_0) + \frac{h_2}{2!} f''(x_0) + \frac{h_2^2}{3!} f'''(x_0) + \ldots =$$

$$= \varphi'(x_0, a_1 \ldots a_n) + \frac{h_2}{2!} \varphi''(x_0, a_1 \ldots a_n) + \frac{h_2^2}{3!} \varphi'''(x_0, a_1 \ldots a_n) + \ldots$$

wird dadurch, dass schon ein Punkt an $P_0$ unendlich nahe gerückt ist, wegen $f'(x_0) = \varphi'(x_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$ auf

$$\frac{1}{2!} f''(x_0) + \frac{h_2}{3!} f'''(x_0) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2!} \varphi''(x_0, a_1, a_2 \ldots a_n) + \frac{h_2}{3!} \varphi'''(x_0, a_1 \ldots a_n) + \ldots$$

reduciert und geht, wenn $h_2$ gegen Null convergiert, in

$$f''(x_0) = \varphi''(x_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$$

über u. s. w.

Rücken somit alle Punkte, durch welche die Curve $\varphi$ gehen soll, unendlich nahe an $P_0$, d. h. convergieren alle $h_i$ gegen Null, so hat man zur Bestimmung der Constanten a die Gleichungen

$$f(x_0) = \varphi(x_0, a_1, a_2 \ldots a_n),$$
$$f'(x_0) = \varphi'(x_0, a_1, a_2 \ldots a_n),$$
$$f''(x_0) = \varphi''(x_0, a_1, a_2 \ldots a_n),$$
. . . . . .
$$f^n(x_0) = \varphi^n(x_0, a_1, a_2 \ldots a_n),$$

also dieselben, welche als Bedingung der Berührung nach der $(n-1)^{ten}$ Ordnung im Punkte $P_0$ erhalten wurden.

Daraus folgt: Berühren sich zwei Curven an einer Stelle nach der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, so haben sie an dieser Stelle n benachbarte Punkte miteinander gemein.

### 3. Die osculierende Gerade.

Es soll die osculierende Gerade in einem Punkte $P_0$ mit der Abscisse $x_0$ der Curve

$$y = f(x)$$

bestimmt werden.

Die allgemeine Gleichung der Geraden

$$y = a\,x + b$$

enthält zwei Constanten, sie berührt also eine Curve osculatorisch nach der ersten Ordnung, wofür zwei Bedingungen bestehen:

$$f(x_0) = a\,x_0 + b,$$

$$f'(x_0) = a.$$

Aus diesen folgt:

$$f'(x_0) = a,$$

$$f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 = b.$$

Demnach ist die Gleichung der osculierenden Geraden:

$$y = x\,f'(x_0) + f(x_0) - x_0\,f'(x_0)$$

oder, weil

$$f(x_0) = y_0,$$

$$y - y_0 = (x - x_0)\,f'(x_0),$$

und dies ist die Gleichung der Tangente im Punkte $P_0$ der Curve.

Die osculierende Gerade ist somit die Tangente an die Curve.

Für den Fall der Superosculation hätte man noch die Bedingung

$$f''(x_0) = \varphi''(x_0),$$

und weil

$$\varphi''(x_0) = 0,$$

ist auch

$$f''(x_0) = 0,$$

d. h. der Punkt $P_0$ muss ein Wendepunkt sein. Die Wendetangente ist somit eine superosculierende Gerade.

## 4. Der osculierende Kreis.

Der Kreis geht, wenn er eine Curve im Punkte $P_0(x_0, y_0)$ osculatorisch berührt, in diesem Punkte eine Berührung zweiter Ordnung ein. für welche die Bedingungen bestehen:

$$f(x_0) = \varphi(x_0),$$
$$f'(x_0) = \varphi'(x_0),$$
$$f''(x_0) = \varphi''(x_0),$$

wenn

$$y = f(x)$$

die Gleichung der Curve und

$$y = \varphi(x)$$

die Gleichung des Kreises ist.

Schreibt man die Gleichung des Kreises in der Form

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2,$$

so erhält man durch Differentiation derselben

$$2(x-\alpha) + 2(y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0$$

oder

$$(x-\alpha) + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0$$

und durch abermalige Differentiation

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Setzt man in allen diesen Gleichungen $x = x_0$, so geht zufolge der Bedingungsgleichungen $y$ in $y_0$, $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ in $f'(x_0)$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(x)$ in $f''(x_0)$ über und man hat

$$(x_0-\alpha)^2 + (y_0-\beta)^2 = r^2,$$
$$(x_0-\alpha) + (y_0-\beta)f'(x_0) = 0.$$
$$1 + [f'(x_0)]^2 + (y_0-\beta)f''(x_0) = 0;$$

aus diesen drei Gleichungen können die Parameter der Kreisgleichung bestimmt werden.

Aus der dritten Gleichung findet man

$$y_0 - \beta = -\frac{1 + [f'(x_0)]^2}{f''(x_0)}$$

und aus der zweiten

$$x_0 - \alpha = -(y_0 - \beta) f'(x_0) = \frac{\{1 + [f'(x_0)]^2\} f'(x_0)}{f''(x_0)}.$$

Schließlich aus der ersten

$$r^2 = \frac{\{1 + [f'(x_0)]^2\}^2 [f'(x_0)]^2}{[f''(x_0)]^2} + \frac{\{1 + [f'(x_0)]^2\}^2}{[f''(x_0)]^2}$$

oder

$$r^2 = \frac{\{1 + [f'(x_0)]^2\}^2}{f''(x_0)]^2} \{1 + [f'(x_0)]^2\} = \frac{\{1 + [f'(x_0)^2\}^3}{[f''(x_0)]^2}.$$

Man hat demnach für den osculatorischen Kreis im Punkt $P_0$

$$r = \frac{\{1 + [f'(x_0)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)},$$

$$\alpha = x_0 - \frac{\{1 + [f'(x_0)]^2\} f'(x_0)}{f''(x_0)},$$

$$\beta = y_0 + \frac{1 + [f'(x_0)]^2}{f''(x_0)},$$

wodurch derselbe vollkommen bestimmt ist.

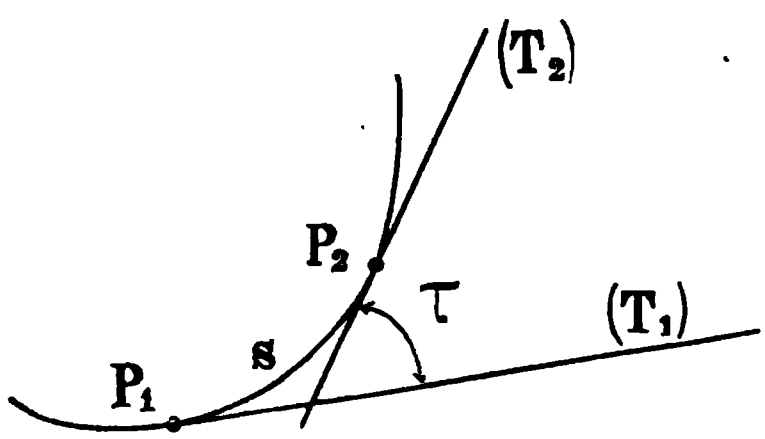
Dieser Kreis schmiegt sich als osculatorischer unter allen, die Curve in $P_0$ berührenden Kreisen der letzteren am engsten an, und bestimmt die Stärke der Krümmung der Curve in diesem Punkte im Sinne der folgenden Untersuchung.

## § 55. Krümmung ebener Curven.

1. Die Begriffe gerade und gekrümmt sind hinreichend geläufig und bedürfen keiner Erklärung. Ebenso kann man sich die Begriffe schwächer und stärker gekrümmt ohne weiters veranschaulichen.

Soll aber die Stärke der Krümmung eines Curvenbogens $P_1 P_2$ (Fig. 50) durch eine Größe angegeben werden, so eignet sich hiezu am besten der Winkel, welchen die Tangenten in den Endpunkten $P_1, P_2$ dieses Bogens miteinander einschließen.

Fig. 50.



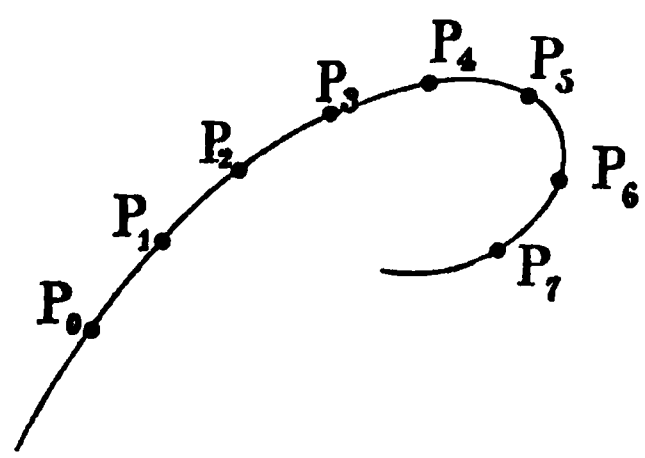

Ist $P_1 P_2$ ein gegebener Curvenbogen, in welchem sich kein Wendepunkt befindet, so nennt man den im Bogenmaße gemessenen) Winkel $\tau$, den die Tangenten der Punkte $P_1$ und $P_2$ miteinander einschließen, die absolute Krümmung des Bogens $P_1 P_2$.

Haben zwei Bogenstücke verschiedene Länge, aber gleiche absolute Krümmung, so ist offenbar das kürzere Bogenstück stärker gekrümmt als das längere. Bestimmt man also den Antheil der absoluten Krümmung, welcher auf die Längeneinheit des Curvenbogens entfällt, so wird dieser um so größer sein, je weniger Einheiten der Bogen enthält, d. h. je kürzer das betreffende Bogenstück, also je stärker die Curve gekrümmt ist.

Diese die Stärke der Krümmung weitaus besser charakterisierende Größe wird die relative oder durchschnittliche Krümmung des Curvenbogens genannt; sie wird erhalten, wenn man die absolute Krümmung $\tau$ durch die zugehörige Bogenlänge $P_1 P_2 = s$ dividiert.

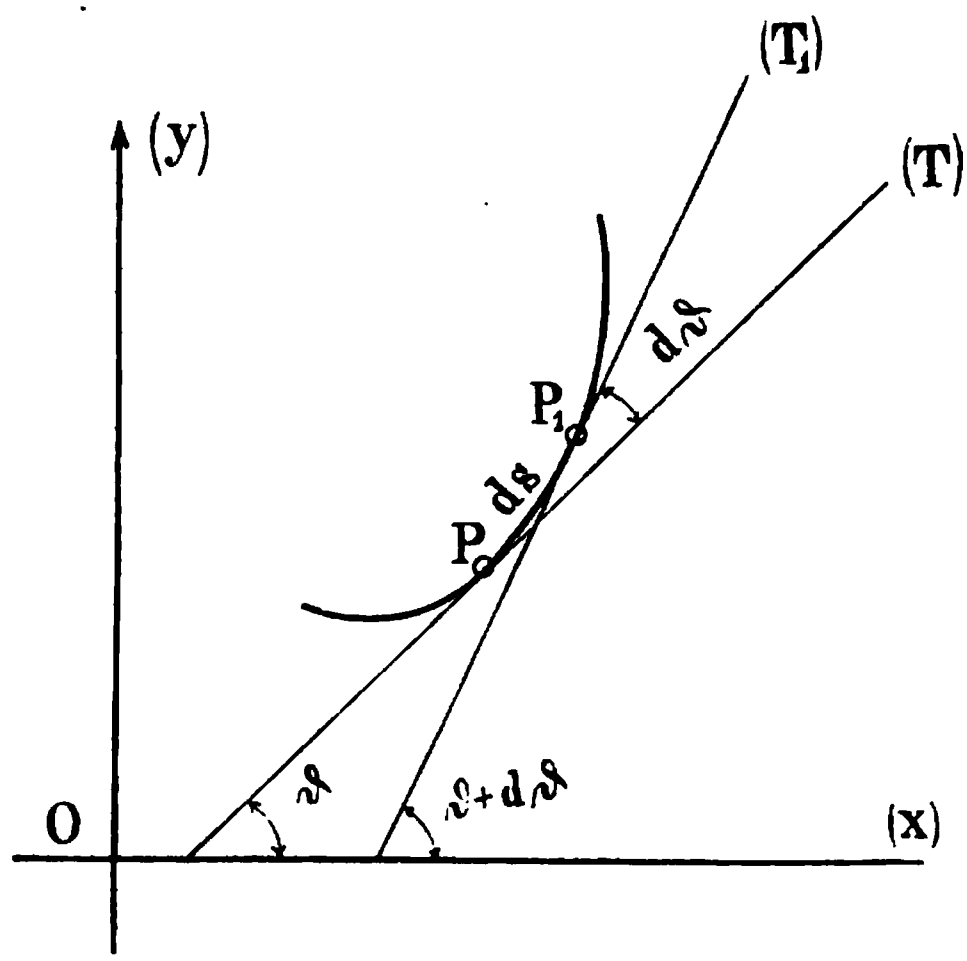
Theilt man eine Curve durch die auf ihr gelegenen Punkte $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ (Fig. 51) in Bogenstücke von der Länge s, so wird im allgemeinen jedem dieser Bogenstücke eine andere relative Krümmung zukommen.

Fig. 51.




Werden die Curvenstücke sehr klein gemacht, d. h. die Punkte $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ sehr nahe aneinander angenommen, dann kann jedes derselben als Bereich des Punktes $P_1$ angesehen werden auf welchen es folgt, und man gelangt zum Begiffe der relativen Krümmung in einem Punkte, wenn man die relative Krümmung eines unendlich kleinen Curvenstückes d s, welches unmittelbar an den Punkt anschließt, in Betracht zieht.

Fig. 52.




Sind die Punkte P und $P_1$ (Fig. 52) zwei unmittelbar benachbarte Punkte der Curve, und hat der Punkt P die Coordinaten x und y, so sind $x + dx$ und $y + dy$ die Coordinaten des Punktes $P_1$; ferner ist die Länge des Curvenbogens $PP_1$; $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$. Bezeichnet man den Winkel, den die Tangente (T) im Punkte P mit der x-Axe einschließt, wie dies bisher consequent durchgeführt wurde mit $\vartheta$, so schließt die Tangente

($T_1$) in $P_1$ mit der positiven Richtung der x-Axe den Winkel $\vartheta + d\vartheta$ ein, mithin bilden die Tangenten in den beiden Nachbarpunkten P und $P_1$ den Winkel $d\vartheta$. welcher Contingentswinkel genannt wird.

Die relative Krümmung K im Punkte P ist demnach mit Rücksicht auf den im vorstehenden erläuterten Begriff derselben gegeben durch

$$K = \frac{d\vartheta}{ds}.$$

Der Bogen eines Kreises vom Radius $\rho$, welcher einem Centriwinkel $\varepsilon$ entspricht, hat die Länge $\rho\varepsilon$. Die Tangenten in den Endpunkten dieses Bogens bilden einen Winkel, welcher ebenso groß ist wie der dem Bogen zugehörige Centriwinkel $\varepsilon$, mithin ist die relative Krümmung dieses Kreisbogens

$$K = \frac{\varepsilon}{\rho\varepsilon} = \frac{1}{\rho},$$

d. h. die relative Krümmung eines Kreises ist für jeden Bogen dieselbe, also auch in allen seinen Punkten constant und gleich dem reciproken Werte des Radius.

Durch entsprechende Wahl des Radius kann ein Kreis von beliebiger Krümmung gezogen, also auch ein Kreis von jener relativen Krümmung, welche eine Curve in einem bestimmten Punkte besitzt.

Führt man nun einen Kreis so, dass er eine Curve in einem Punkte P berührt und dieselbe relative Krümmung hat, welche die Curve im Berührungspunkte besitzt, dann nennt man diesen Kreis den Krümmungskreis, seinen Radius Krümmungsradius und seinen Mittelpunkt den Krümmungsmittelpunkt der Curve in dem Punkte P derselben.

Zur Bestimmung des Krümmungsradius, welcher die relative Krümmung der Curve in einem bestimmten Punkte derselben vergegenwärtigt, genügt die Beziehung

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{ds}{d\vartheta}.$$

Je nach der Beschaffenheit der Curvengleichung lässt sich $\rho$ auf verschiedene Arten als Function der Coordinaten des betreffenden Curvenpunktes und der Coefficienten der Curvengleichung ausdrücken.

Ist die Gleichung der Curve in rechtwinkligen Parallelcoordinaten und in entwickelter Form gegeben,

$$y = f(x),$$

so ist zunächst

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2},$$

ferner

$$y' = \operatorname{tang}\vartheta,$$

also

$$\vartheta = \operatorname{arc\,tang} y'.$$

Hieraus findet man durch Differentiation, bei Berücksichtigung, dass $y' = f'(x)$ eine Function von $x$ ist,

$$d\vartheta = \frac{1}{1 + y'^2}\, y''\, dx.$$

Demnach

$$\rho = \frac{ds}{d\vartheta} = \frac{dx\,(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{y''}{1 + y'^2}}$$

oder

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Dieser Wert von $\rho$ ist gleich jenem, welcher als Radius des osculatorischen Kreises erhalten wurde.

Da sowohl der Krümmungskreis als auch der osculatorische Kreis die Curve in einem Punkte berührt, so haben beide Kreise in einem gemeinschaftlichen Punkte eine gemeinschaftliche Tangente und müssen sich somit, weil sie auch gleiche Radien haben, vollkommen decken.

Daraus folgt: Krümmungskreis und osculatorischer Kreis in einem Curvenpunkte sind identisch.

2. In der Formel für den Krümmungsradius

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

kommt eine Quadratwurzel vor, welche bezüglich des Vorzeichens zweideutig ist. Legt man derselben stets das positive Vorzeichen bei, so erlangt $\rho$ immer dasselbe Vorzeichen, welches $y''$ hat, charakterisiert somit dadurch den Krümmungssinn der Curve.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes $\xi$ und $\eta$ müssen identisch sein mit den Coordinaten $\alpha$ und $\beta$ des Mittelpunktes des

osculatorischen Kreises. welche bereits gefunden wurden; man kann sie aber auch direct auf folgende Weise bestimmen:

Der Krümmungsmittelpunkt liegt offenbar auf der Normalen des entsprechenden Curvenpunktes im Abstande $\rho$ von demselben.

Die Normale steht auf der Tangente, welche die Richtung $dx:dy$ hat, senkrecht, ihre Richtungscomponenten sind somit $-dy:dx$ also ihre Richtungscoordinaten

$$\frac{-dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = -\frac{dy}{dx\sqrt{1+y'^2}} = -\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

und

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dx}{dx\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes als eines Punktes im Abstande $\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ vom Punkte $P, (x, y)$ auf einer Geraden mit den angeführten Richtungscoordinaten sind also gegeben durch*.

$$\xi = x - \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\,\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

$$\eta = y + \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\,\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

oder

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''},$$

$$\eta = y + \frac{(1+y'^2)}{y''}.$$

3. Es lässt sich auch zeigen, dass der Krümmungsmittelpunkt der Schnittpunkt der Normalen in zwei Nachbarpunkten der Curve ist.

Die Gleichung der Normalen in einem Punkte P der Curve, welcher die Coordinaten x und y hat, ist

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0,$$

*) Siehe analytische Geometrie der Ebene, »Coordinaten von Punkten einer Geraden«, I. Band, III. Th., I. Abth., Art. 10.

dementsprechend jener im Nachbarpunkte von den Coordinaten $x + dx$ und $y + dy$

$$(\xi - x - dx)\, d\,(x + dx) + (\eta - y - dy)\, d\,(y + dy) = 0$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass $d\,(dx) = 0$ (weil $x$ als unabhängige Variable angesehen wird) und die unendlich kleine Größe dritter Ordnung $-dy\,d^2y$ gegenüber den anderen vernachlässigt,

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy - \overline{dx}^2 - \overline{dy}^2 + (\eta - y)\,d^2y = 0.$$

Die Coordinaten der Schnittpunkte dieser beiden Normalen ergeben sich somit als gemeinschaftliche Auflösungen der beiden Gleichungen

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0,$$

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy - \overline{dx}^2 - \overline{dy}^2 + (\eta - y)\,d^2y = 0.$$

Nach Berücksichtigung der ersten Gleichung und darauf ausgeführter Division mit $\overline{dx}^2$ geht die zweite in

$$-1 - y'^2 + (\eta - y)\,y'' = 0,$$

über, woraus

$$\eta_1 - y = \frac{1 + y'^2}{y''}$$

folgt. Setzt man diesen Wert von $\eta - y$ in die erste Gleichung ein, so gibt diese

$$\xi - x = -\frac{y'(1 + y'^2)}{y''}.$$

Mithin sind die Coordinaten des Schnittpunktes der Normalen in zwei Nachbarpunkten der Curve

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''},$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''},$$

also identisch mit jenen des Krümmungsmittelpunktes.

Multipliciert man Zähler und Nenner der Brüche mit $\sqrt{1 + y'^2}$, so nehmen sie folgende allgemein brauchbare Form an:

$$\xi = x - \rho\,\frac{dy}{ds},$$

$$\eta = y + \rho\,\frac{dx}{ds}.$$

4. Ist die Curve in der Weise analytisch dargestellt, dass die Coordinaten ihrer Punkte x und y als Functionen eines Parameters t

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t)$$

gegeben sind, so ist:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = dt\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

ferner

$$\vartheta = \operatorname{arc\,tang}\frac{dy}{dx} = \operatorname{arc\,tang}\frac{y'\,dt}{x'\,dt} = \operatorname{arc\,tang}\frac{y'}{x'},$$

und weil y' und x' Functionen von t sind,

$$d\vartheta = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2}\left(\frac{x'y'' - y'x''}{x'^2}\right)dt$$

oder

$$d\vartheta = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2}\,dt.$$

Man hat also für den Krümmungsradius:

$$\rho = \frac{ds}{d\vartheta} = \frac{dt\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2}\,dt}$$

oder

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}.$$

Ebenso kann man die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes durch x', x'', y', y'' ausdrücken.

5. Sollte schließlich die Curve durch eine Gleichung in Polarcoordinaten gegeben sein,

$$r = f(\varphi),$$

so hat man in der Formel

$$\rho = \frac{ds}{d\vartheta}$$

die Differentiale ds und dϑ durch die Größen

$$r' = f'(\varphi),$$
$$r'' = f''(\varphi)$$

darzustellen, welche aus der Curvengleichung abgeleitet werden können.

Bekanntlich ist

$$ds = d\varphi \sqrt{r^2 + r'^2}$$

und

$$\operatorname{tang} \Theta = \frac{r}{r'},$$

also

$$\Theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{r'},$$

wobei $\Theta$ (Fig. 53) den Winkel bedeutet, welchen die Tangente mit dem Radiusvector einschließt.

Nun ist aber

$$\vartheta = \Theta + \varphi,$$

also auch

$$\vartheta = \varphi + \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{r'},$$

mithin

$$d\vartheta = d\varphi \left(1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2} \cdot \frac{r'^2 - r r''}{r'^2}\right)$$

oder

$$d\vartheta = \frac{r^2 + 2r'^2 - r r''}{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

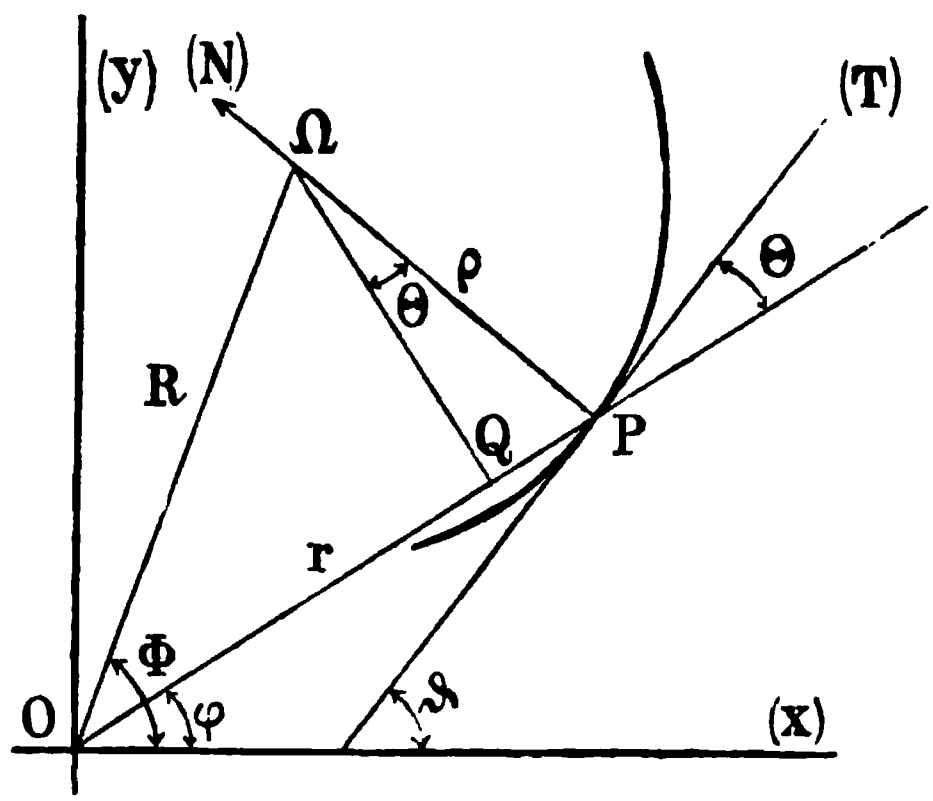
Demnach schließlich

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - r r''}.$$

Die Coordinaten R und $\Phi$ des Krümmungsmittelpunktes $\Omega$ lassen sich ebenfalls durch r, r', r'' und $\varphi$ ausdrücken.

Führt man nämlich aus $\Omega$ eine Senkrechte $\Omega Q$ zum Radiusvector, so ergibt sich aus den dadurch entstehenden Dreiecken $O\Omega Q$ und $Q\Omega P$

Fig. 53.




$$Q\Omega = R \sin(\Phi - \varphi) = \rho \cos \Theta,$$

$$QP = OP - OQ = r - R \cos(\Phi - \varphi) = \rho \sin \vartheta,$$

also

$$R \sin [\Phi - \varphi] = \rho \cos \Theta,$$

$$R \cos [\Phi - \varphi] = r - \rho \sin \Theta.$$

Führt man nun für $\rho$, $\sin \Theta$ und $\cos \Theta$ die durch $r$, $r'$, $r''$ ausgedrückten Werte ein,

$$\sin \Theta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}; \qquad \cos \Theta = \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

so erhält man die Gleichungen

$$R \sin [\Phi - \varphi] = \frac{(r^2 + r'^2) r'}{r^2 + r r'^2 - r r''},$$

$$R \cos [\Phi - \varphi] = r - \frac{(r^2 + r'^2) r}{r^2 + 2 r'^2 - r r''} = \frac{(r'^2 - r r'') r}{r^2 + 2 r'^2 - r r''},$$

aus welchen $R$ und $\Phi$, also der Radiusvector und die Anomalie des Krümmungsmittelpunktes bestimmt werden können.

**Beispiele:**

1. Es ist der Krümmungsradius einer durch die Gleichung

$$y = \frac{p^2 + x^2}{2p}$$

gegebenen Parabel*) zu bestimmen.

Man findet durch Differentiation:

$$y' = \frac{x}{p},$$

$$y'' = \frac{1}{p}.$$

Demnach:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{p}} = \frac{(p^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = 2 \frac{p^2 + x^2}{2p} \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}},$$

also

$$\rho = 2 y \sqrt{1 + y'^2} = 2 n.$$

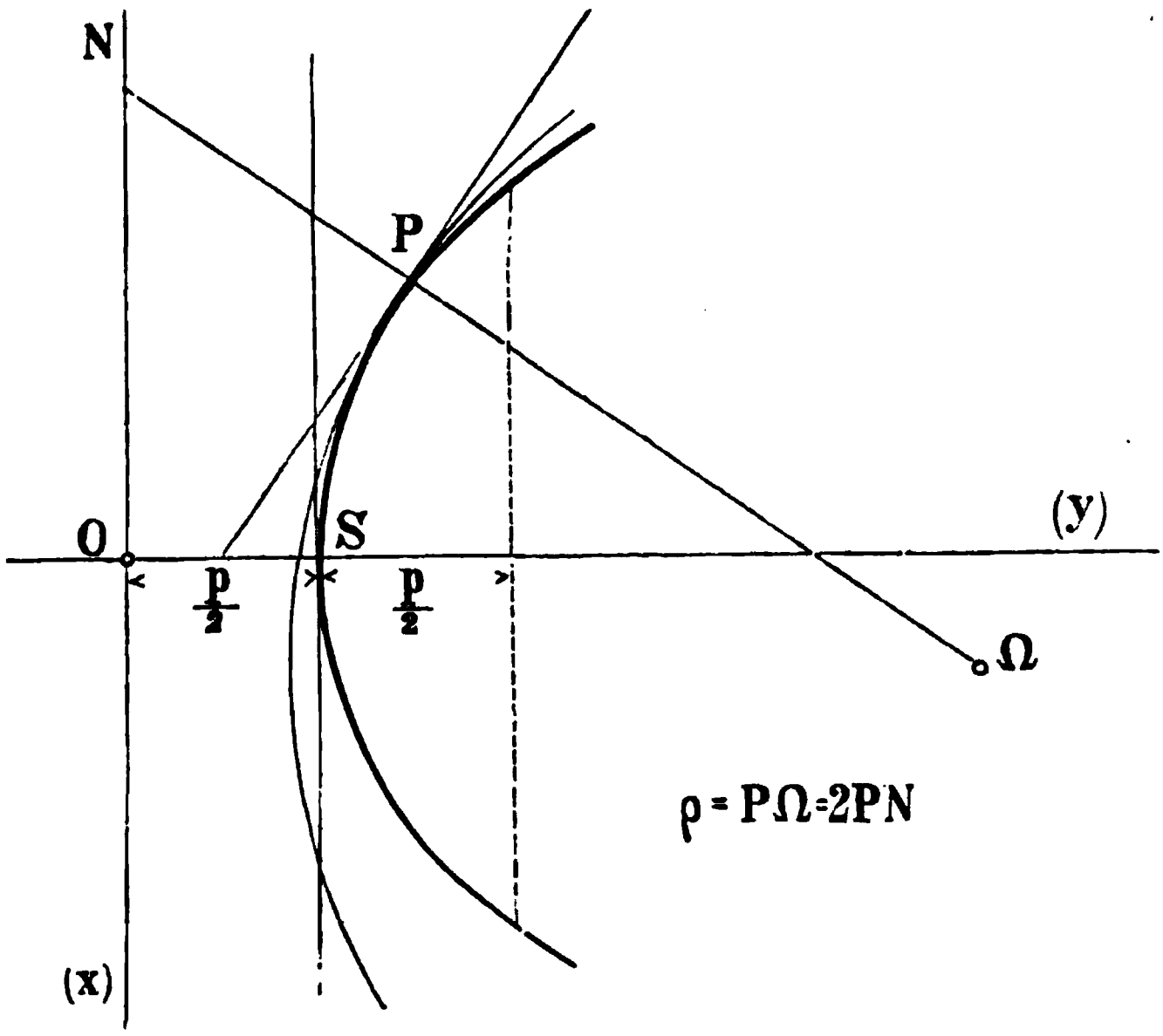
*) Gleichung einer Parabel, bezogen auf die Leitlinie als Abscissenaxe und die Parabelaxe als Ordinatenaxe.

Der Krümmungsradius dieser Parabel ist somit gleich dem doppelten Normalensttücke.

Daraus leitet sich folgende Construction des Krümmungsmittelpunktes für einen beliebigen Punkt der Parabel ab.

Man führt in dem betreffenden Punkte P (Fig. 54) die Normale, verlängert dieselbe bis zum Schnittpunkte N mit der Leitlinie und

Fig. 54.




trägt die Strecke PN zweimal auf der anderen Seite der Normalen auf. Der auf diese Weise bestimmte Punkt Ω ist der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt P der Parabel.

2. Es ist der Krümmungsradius für einen Punkt der Ellipse zu bestimmen.

Die Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

könnte nach y aufgelöst und die Aufgabe sodann analog der früheren behandelt werden.

Einfacher erscheint aber, den Krümmungsradius als Function der Coordinaten x und y des Curvenpunktes darzustellen, indem man y' und y'' nach der Methode für unentwickelte Functionen bestimmt.

Man erhält:

$$y' = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y},$$

und durch nochmalige Differentiation bei Berücksichtigung, dass y eine Function von x ist,

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{y + x\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}}{y^2}$$

oder

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2}\frac{\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}}{y^3} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

Also

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{\left(1 + \frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{b^4}{a^2 y^3}} = \frac{a^2 y^3\left(1 + \frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-b^4}$$

oder

$$\rho = \frac{a^2 y^3 \frac{1}{a^6 y^3}(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{-b^4},$$

und schließlich abgesehen vom Vorzeichen:

$$\rho = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Will man speciell die Krümmungsradien $\rho_a$ und $\rho_b$ (Fig. 55) in den Scheitelpunkten auf der x- und y-Axe erhalten, so hat man nur $y = 0$, $x = a$, beziehungsweise $x = 0$, $y = b$ zu setzen und findet:

$$\rho_a = \frac{b^2}{a}; \quad \rho_b = \frac{a^2}{b}.$$

Diese beiden Werte führen zu der allgemein üblichen Construction der Krümmungsmittelpunkte in den Scheiteln der Ellipse:

Es sei $A\,O = a, \quad O\,B = b;$

macht man $C\,E \perp A\,B,$

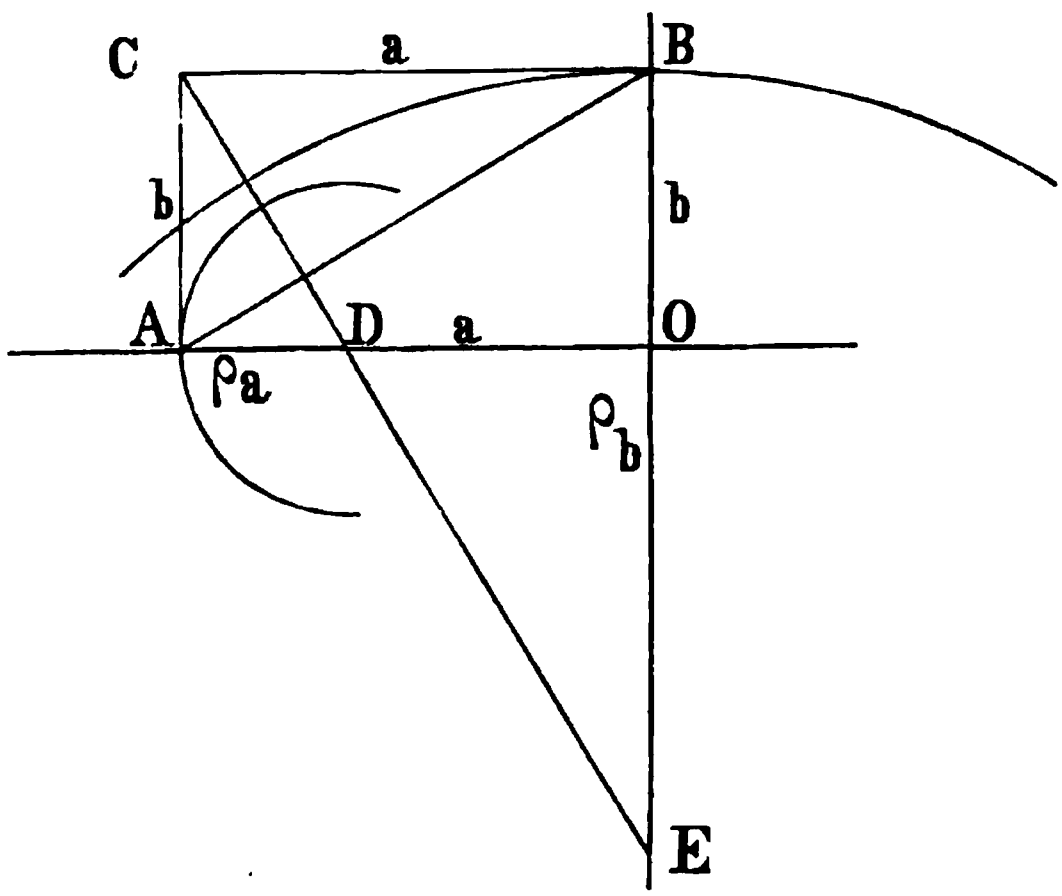
so ist D der Krümmungsmittelpunkt für A, und E der Krümmungsmittelpunkt für B. Denn aus den ähnlichen Dreiecken ABC und DCA folgt:

$$CB : AC = AC : AD,$$
$$a : b = b : AD,$$

also

$$AD = \frac{b^2}{a} = \rho_a.$$

Fig. 55.




Ferner aus den ähnlichen Dreiecken ACB und CBE:

$$AC : BC = BC : BE,$$
$$b : a = a : BE,$$
$$BE = \frac{a^2}{b} = \rho_b.$$

3. Um den Krümmungsradius für einen Punkt der Hyperbel zu rhalten, hat man nur in der Formel des für die Ellipse gefundenen i statt b zu setzen und findet wieder

$$\rho = \frac{[a^4 y^2 + b^4 x^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

4. Es ist der Krümmungsradius für einen Punkt der Cykloide u bestimmen.

Aus dem Gleichungssystem der Cykloide:

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

folgt durch Differentiation:

$$x' = a(1 - \cos t), \quad y' = a \sin t,$$
$$x'' = a \sin t, \quad y'' = a \cos t,$$

also

$$x'^2 + y'^2 = a^2[(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t] = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

$$x'y'' - x''y' = a^2[\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t] = a^2(\cos t - 1) = -2a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Demnach ist

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'} = \frac{\left(4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-2a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} = -4a \sin \frac{t}{2}$$

und absolut genommen

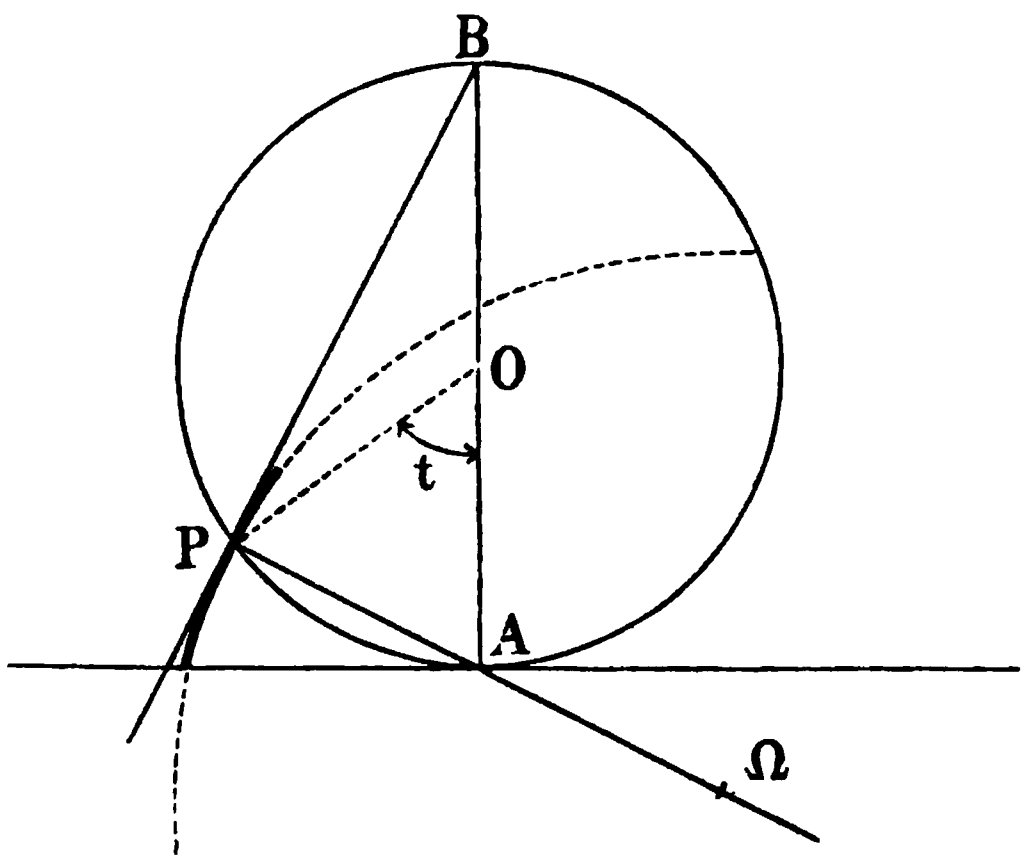
$$\rho = 4a \sin \frac{t}{2},$$

oder weil

$$2a \sin \frac{t}{2} = n,$$

$$\rho = 2n.$$

Fig. 56.




Der Krümmungsradius für jeden Punkt der Cykloide ist doppelt so groß als das Normalenstück in diesem Punkte (Fig. 56)

$$\overline{P\Omega} = 2 \cdot \overline{PA}.$$

5. Es ist der Krümmungsradius für einen Punkt der logarithmischen Spirale zu bestimmen.

Aus der Gleichung dieser Curve

$$r = m e^{a\varphi}$$

folgt durch Differentiation

$$r' = m a e^{a\varphi} = a r,$$
$$r'' = m a^2 e^{a\varphi} = a^2 r,$$

also

$$r^2 + r'^2 = r^2(1 + a^2),$$
$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = r^2 + 2a^2 r^2 - a^2 r^2 = r^2(1 + a^2).$$

Demnach

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - r\,r''} = \frac{r^3(1 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2(1 + a^2)} = r\sqrt{1 + a^2}$$

oder

$$\rho = n.$$

Der Krümmungsradius ist gleich dem Normalenstück.

## § 56. Evoluten und Evolventen ebener Curven.

Der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Curve wird »Evolute« dieser Curve genannt.

Da der Krümmungsmittelpunkt der Schnittpunkt zweier benachbarten Normalen ist, so ist die Evolute der geometrische Ort der Schnittpunkte aller benachbarten Normalen, und als solcher die Enveloppe (Einhüllende) sämmtlicher Normalen der Curve.

Die Gleichung der Normalen in einem Punkte $P(x, y)$ einer durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

gegebenen Curve lautet:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0,$$

oder

$$(\xi - x) + (\eta - y)\,y' = 0.$$

Lässt man in dieser Gleichung x, y und y' verschiedene Werte annehmen, aber nur solche, welche der Gleichung der Curve $y = f(x)$ genügen, so erhält man nach und nach die Normalen in allen Punkten der Curve, also sämmtliche Normalen dieser Curve.

Werden also in der Gleichung

$$\xi - x + (\eta - y)\,y_1 = 0$$

x, y und $y_1$ als willkürliche Parameter angesehen, wobei aber, zufolge der Bedingungsgleichung $y = f(x)$, y und y' Functionen von x sind, so stellt diese die Schar aller Normalen der Curve vor.

Die Evolute der Curve ist die Enveloppe dieser Schar, demzufolge kann ihre Gleichung in der für die Gleichung der Enveloppen angegebenen Weise aufgestellt werden.

Durch Differentiation der Gleichung der Normale nach x, bei Berücksichtigung, dass y und y' Functionen von x sind, erhält man:

$$-1 - y'^2 + (\eta - y)\,y'' = 0$$

und hat nach der Theorie der Enveloppen für die Punkte der Evolute das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y &= f(x); \\ (\xi - x) + (\eta - y)\, y' &= 0, \\ -1 - y'^2 + (\eta - y)\, y'' &= 0, \end{aligned} \qquad [y' = f'(x),$$

aus welchem durch Elimination von $x$, $y$ und $y'$, $y''$ die Gleichung der Evolute erhalten wird.

**Beispiele:**

1. Es ist die Gleichung der Evolute der durch die Gleichung

$$y = \frac{p^2 + x^2}{2p}$$

gegebenen Parabel aufzustellen.

Aus der Gleichung der Parabel folgt:

$$y' = \frac{x}{p}; \quad y'' = \frac{1}{p}.$$

Mithin besteht für die Punkte der Evolute folgendes Gleichungssystem:

$$y = \frac{p^2 + x^2}{2p},$$

$$(\xi - x) + (\eta - y)\frac{x}{p} = 0,$$

$$-1 - \frac{x^2}{p^2} + (\eta - y)\frac{1}{p} = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen ist nun $x$ und $y$ zu eliminieren, was keinerlei Schwierigkeiten bereitet.

Dividiert man die zweite Gleichung durch $x$ und subtrahiert die dritte von derselben, so erhält man:

$$\frac{\xi - x}{x} = -1 - \frac{x^2}{p^2},$$

also

$$\xi = -\frac{x^3}{p^2}.$$

Aus der dritten Gleichung folgt unmittelbar:

$$\eta - y = p + \frac{x^2}{p} = \frac{p^2 + x^2}{p} = 2y,$$

also

$$\eta = 3y.$$

Man hat demnach

$$x = -\sqrt[3]{p^2 \xi}; \quad y = \frac{\eta}{3};$$

und erhält durch Einführung dieser Werte in die Parabelgleichung die Gleichung der Evolute

$$\frac{\eta}{3} = \frac{p^2 + \sqrt[3]{p^4 \xi^2}}{2p}$$

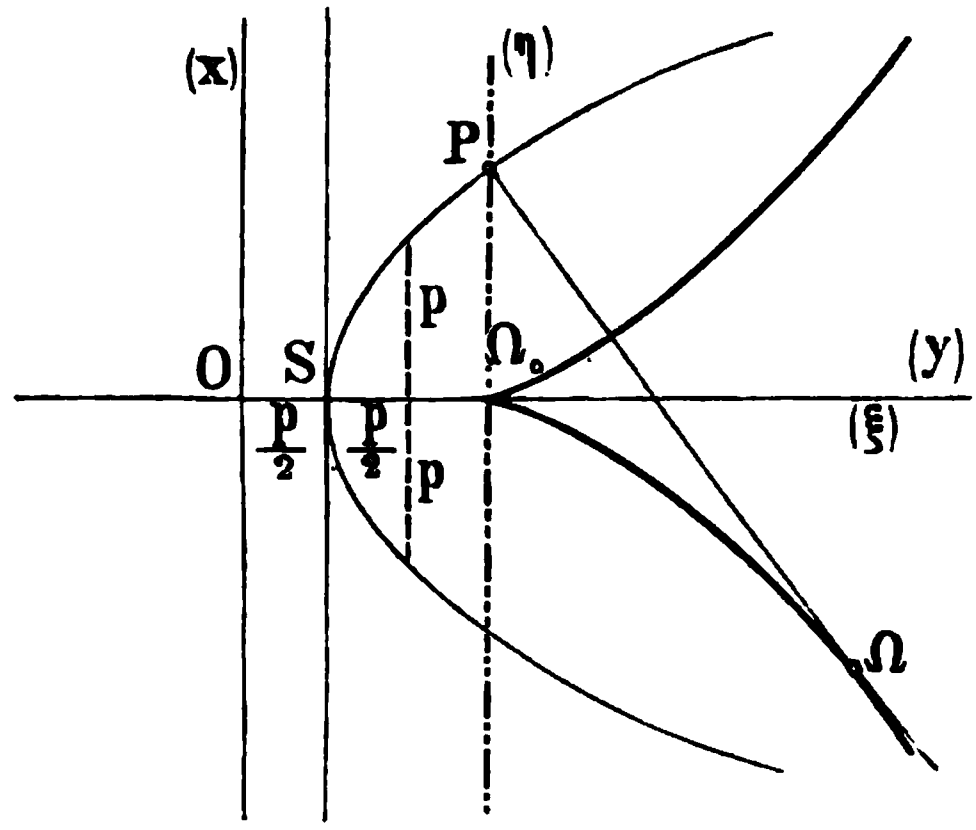
oder

$$\left(\frac{2}{3}\eta - p\right)^3 = p\,\xi^2.$$

$$\xi^2 = \frac{8}{27\,p}\left(\eta - \frac{3}{2}p\right)^3.$$

Es ist dies eine Curve der dritten Ordnung und führt den Namen Neil'sche Parabel. (Fig. 57.)

Fig. 57.




Vertauscht man die Coordinatenaxen und verschiebt den Ursprung um $\frac{3}{2}p$, so geht die Gleichung der Evolute in

$$\eta^2 = \frac{8}{27\,p}\,\xi^3,$$

also in die für diese Curve übliche Form

$$\eta^2 = a\,\xi^3$$

über. Es ist leicht zu erkennen, dass die Neil'sche Parabel eine reale Asymptote in der unendlich fernen Geraden besitzt.

2. Es ist die Gleichung der Evolute der Ellipse aufzustellen.

Zur Lösung dieser Aufgabe empfiehlt es sich, die parametrische Darstellung der Ellipse zu wählen.

Aus dem Gleichungssystem der Ellipse

$$x = a \cos t,$$

$$y = b \sin t$$

erhält man

$$dx = -a \sin t\, dt; \quad dy = b \cos t\, dt,$$

also

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos t}{a\sin t}.$$

Mithin ist die Gleichung einer Normalen:

$$(\xi - a\cos t) - (\eta - b\sin t)\frac{b\cos t}{a\sin t} = 0$$

oder

$$\frac{a\xi - a^2\cos t}{\cos t} - \frac{b\eta - b^2\sin t}{\sin t} = 0,$$

woraus schließlich

$$\frac{a\xi}{\cos t} - \frac{b\eta}{\sin t} = c^2$$

($c = \sqrt{a^2 - b^2}$ lineare Excentricität) folgt.

Diese nur den Parameter t enthaltende Gleichung stellt die Schar sämmtlicher Normalen der Ellipse vor. Durch Differentiation derselben nach t folgt:

$$\frac{a\xi}{\cos^2 t}\sin t + \frac{b\eta}{\sin^2 t}\cos t = 0$$

oder

$$\frac{a\xi}{\cos^3 t} = -\frac{b\eta}{\sin^3 t}.$$

Demnach ist nach der Theorie der Enveloppen das Gleichungssystem der Evolute:

$$\frac{a\xi}{\cos t} - \frac{b\eta}{\sin t} = c^2,$$

$$\frac{a\xi}{\cos^3 t} = -\frac{b\eta}{\sin^3 t},$$

aus welchem t zu eliminieren ist.

Setzt man behufs symmetrischer Durchführung der Rechnung:

$$\frac{a\xi}{\cos^3 t} = -\frac{b\eta}{\sin^3 t} = \sigma,$$

so folgt:

$$\frac{a\xi}{\cos t} = \sigma\cos^2 t; \quad -\frac{b\eta}{\sin t} = \sigma\sin^2 t,$$

also zufolge der ersten Gleichung

$$\sigma = c^2.$$

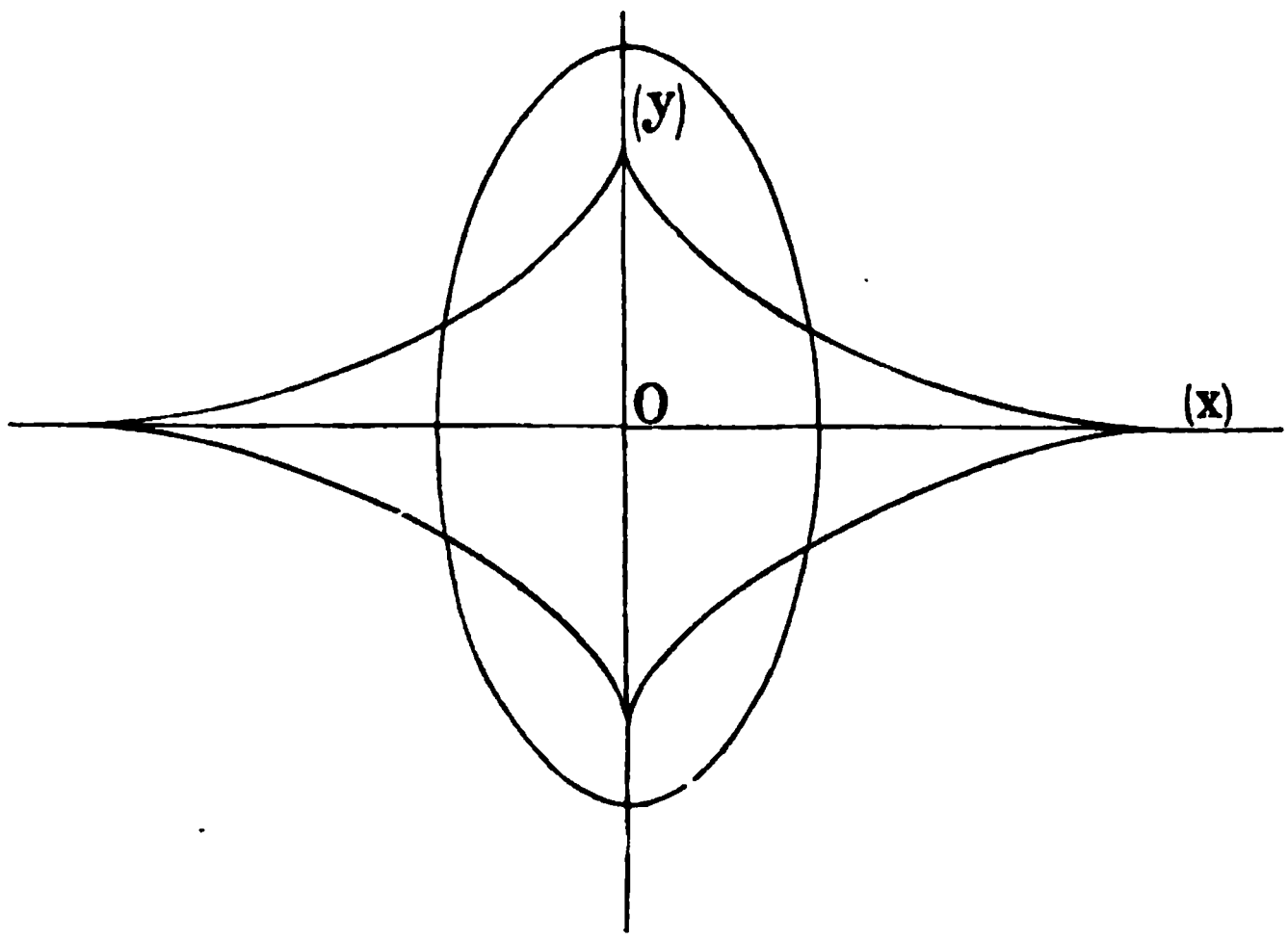
Man hat also:

$$\cos^3 t = \frac{a\xi}{c^2}; \quad \sin^3 t = -\frac{b\eta}{c^2},$$

$$\cos t = \frac{a^{\frac{1}{3}}\xi^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}; \quad \sin t = -\frac{b^{\frac{1}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}$$

und erhält nach Einsetzen dieser Werte in die Gleichung der Normalen:

Fig. 58.




$$\frac{a\xi}{a^{\frac{1}{3}}\xi^{\frac{1}{3}}} + \frac{b\eta}{b^{\frac{1}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}} = c^2,$$

$$a^{\frac{2}{3}}\xi^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}},$$

oder

$$\left(\frac{\xi}{\frac{c^2}{a}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{\frac{c^2}{b}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

als Gleichung der Evolute der Ellipse (Fig. 58).

Setzt man $\frac{c^2}{a} = \alpha$ und $\frac{c^2}{b} = \beta$, so nimmt diese die allgemein übliche Form an:

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

3. Es ist die Evolute der durch das Gleichungssystem

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

gegebenen Cykloide zu bestimmen.

Bei dieser Aufgabe ist es vortheilhafter, auch die Evolute in der parametrischen Form darzustellen, d. h. die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes als Functionen von t auszudrücken.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind:

$$\xi = x - \rho \frac{dy}{ds},$$

$$\eta = y + \rho \frac{dx}{ds}.$$

Zufolge der Cykloidengleichungen ist aber

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt = 2a \sin^2 \frac{t}{2}\,dt, \quad dy = a \sin t\,dt$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dt\,a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin t^2},$$

$$ds = dt\,a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = dt\,a\sqrt{2(1 - \cos t)}.$$

$$ds = 2a \sin \frac{t}{2}\,dt,$$

$$dy = a \sin t\,dt = 2a \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\,dt,$$

ferner:

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''} = -4a \sin \frac{t}{2}.$$

Demnach

$$\xi = a(t - \sin t) + 4a \sin \frac{t}{2} \frac{2a \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\,dt}{2a \sin \frac{t}{2}\,dt},$$

$$\eta = a(1 - \cos t) - 4a \sin \frac{t}{2} \frac{2a \sin^2 \frac{t}{2} dt}{2a \sin \frac{t}{2} dt}$$

oder

$$\xi = a(t - \sin t) + 4a \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2},$$

$$\eta = a(1 - \cos t) - 4a \sin^2 \frac{t}{2},$$

also schließlich

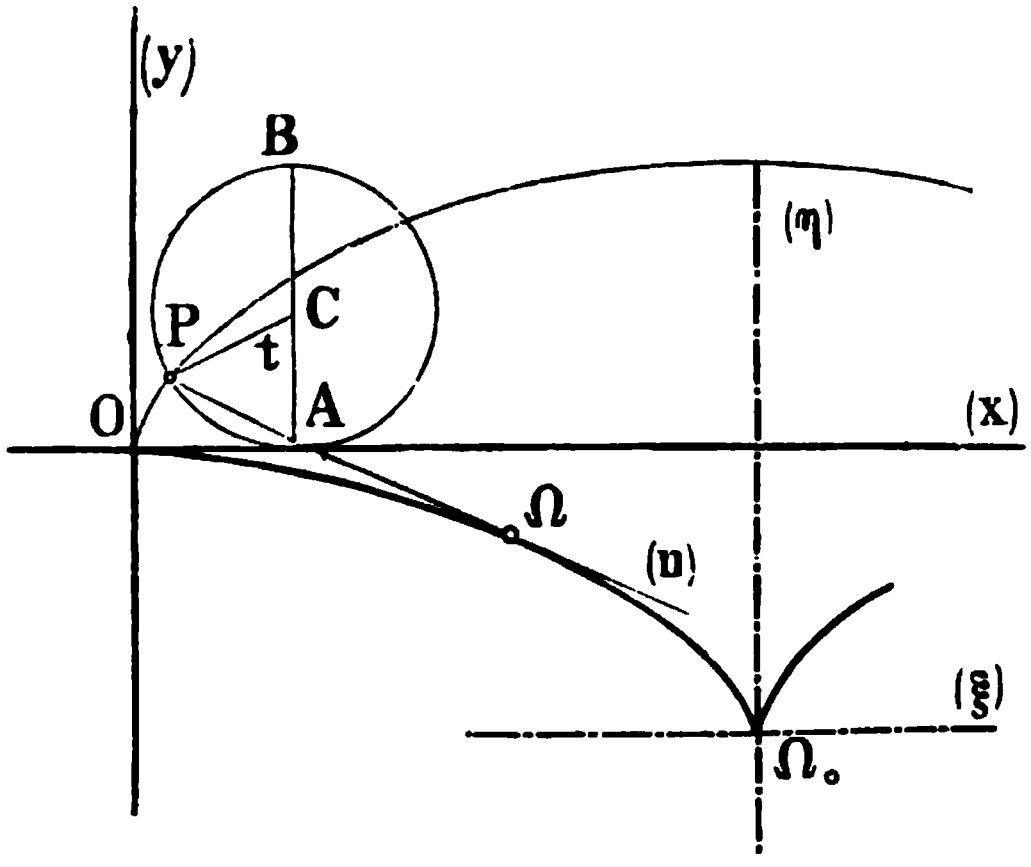
$$\xi = a(t + \sin t),$$

$$\eta = -a(1 - \cos t)$$

als Gleichungssystem der gesuchten Evolute.

Diese Curve ist wieder eine Cykloide, welche zur ursprünglichen congruent, aber in der Richtung der Basis x um $\pi a$, und in der Richtung der y-Axe um $-2a$ verschoben ist (Fig. 59.)

Fig. 59.




Denn setzt man $t = \pi + \tau$, so erhält man:

$$\xi = \pi a + a(\tau - \sin \tau),$$

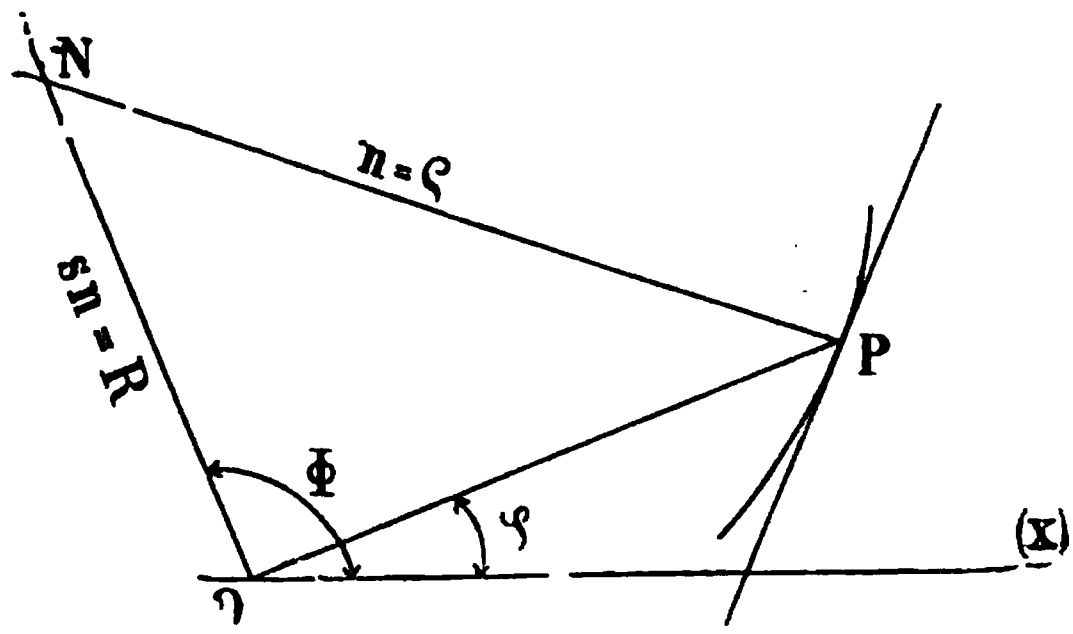
$$\eta = -a(1 + \cos \tau) = -2a + a - a \cos \tau = -2a + a(1 - \cos \tau),$$

woraus zu erkennen ist, dass bei Verschiebung des Coordinatensystems parallel zu sich selbst um die Größen $\pi a$ und $-2a$ die Gleichungen in jene einer gemeinen Cykloide übergehen.

4. Es ist die Evolute der logarithmischen Spirale zu bestimmen.

Bei dieser Curve wurde bereits gefunden, dass der Krümmungsradius der Polarnormale gleich ist.

Fig. 60.




Der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte ist demnach identisch mit jenem der Punkte N (Fig. 60), in welchem die Normale des Curvenpunktes die Senkrechte zum Radiusvector desselben Punktes schneidet.

Ein solcher Punkt N ist bestimmt durch seinen Radiusvector

$$R = sn = r' = ar = mae^{a\varphi},$$

und die Winkelamplitude

$$\Phi = \varphi + \frac{\pi}{2},$$

mithin ist die Gleichung der Evolute

$$R = ame^{a\left(\Phi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

oder

$$R = ame^{-\frac{a\pi}{2}} e^{a\Phi},$$

und nach Substitution

$$mae^{-\frac{a\pi}{2}} = n,$$

$$R = ne^{a\Phi}.$$

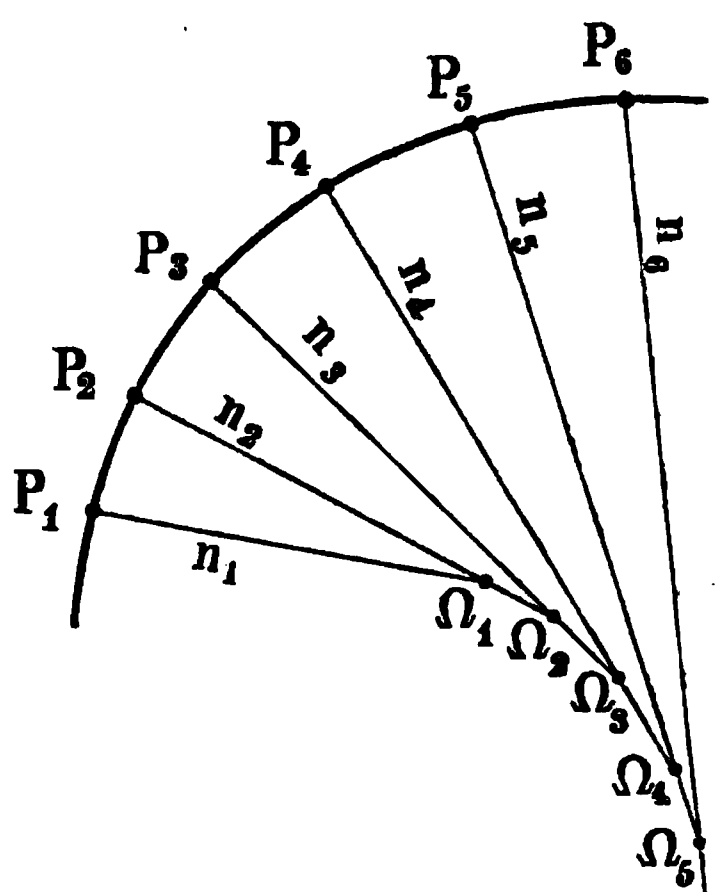
Die Evolute ist also wieder eine logarithmische Spirale, welche zur ursprünglichen congruent ist und nur so gegen das Coordinatensystem verschoben erscheint, dass sie die Polaraxe nicht im Abstande m sondern in der Entfernung n vom Ursprung schneidet.

Aus dem Umstande, dass der Krümmungsmittelpunkt als Schnittpunkt zweier benachbarten Normalen angesehen werden kann, lässt sich die Haupteigenschaft der Evoluten ableiten.

Sind $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ (Fig. 61) unbeschränkt nahe aneinanderliegende Punkte der Curve, und $n_1, n_2, n_3 \ldots n_n$ die Normalen in denselben, so sind deren Schnittpunkte $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$ die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte, also auch Punkte der Evolute.

Bezeichnet man mit $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ die Krümmungsradien in den Punkten $P_1, P_2, P_3, \ldots$ so ist

Fig. 61.




$$\rho_1 = \Omega_1 P_1 = \Omega_1 P_2,$$

$$\rho_2 = \Omega_2 P_2 = \Omega_2 P_3,$$

$$\rho_3 = \Omega_3 P_3 = \Omega_3 P_4,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\rho_{n-1} = \Omega_{n-1} P_{n-1} = \Omega_{n-1} P_n,$$

demnach:

$$\Omega_1 \Omega_2 = \rho_2 - \rho_1,$$

$$\Omega_2 \Omega_3 = \rho_3 - \rho_2,$$

$$\Omega_3 \Omega_4 = \rho_4 - \rho_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Omega_{n-1} \Omega_n = \rho_n - \rho_{n-1}.$$

Durch Summierung folgt hieraus:

$$\Omega_1 \Omega_2 + \Omega_2 \Omega_3 + \Omega_3 \Omega_4 + \ldots + \Omega_{n-1} \Omega_n = \rho_n - \rho_1,$$

d. h.

$$\text{arc}\, \Omega_1 \Omega_n = \rho_n - \rho_1,$$

$$\rho_n = \rho_1 + \text{arc}\, \Omega_1 \Omega_n.$$

Da die Normalen der Curve $P_1, P_2, \ldots P_n$ die Tangenten der Evolute sind, so folgt, dass, wenn eine Tangente der letzteren, von der Anfangslage $n_1$ beginnend, über die Evolute rollt, ohne zu gleiten, der Punkt $P_1$ dieser Tangente die Curve $P_1, P_2, \ldots P_n$ beschreibt, so dass $P_1, P_2, \ldots P_n$ die Evolvente der Curve $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n$ ist

Demzufolge kann nachstehender Satz ausgesprochen werden:

Ist $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n$ die Evolute einer Curve $P_1, P_2, \ldots P_n$, so ist umgekehrt die Curve $P_1, P_2, \ldots P_n$ eine Evolvente der Curve $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n$.

Die Gleichung

$$\text{arc}\, \Omega_1 \Omega_n = \rho_n - \rho_1$$

kann zur Bestimmung der Länge (Rectification) des Bogens einer Evolute benützt werden und zeigt an, dass ein Bogen der Evolute einer Curve construierbar ist, wenn die Krümmungsradien in den

Endpunkten des entsprechenden Curvenbogens geometrisch construiert werden können.

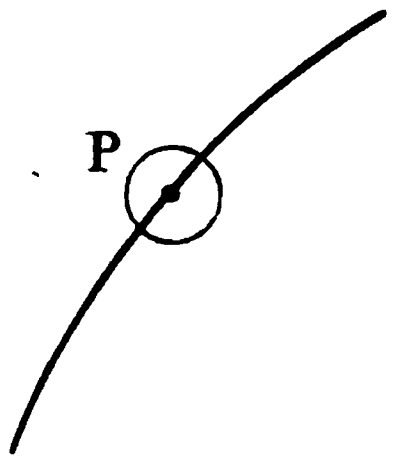
So liegt beispielsweise zwischen den Krümmungsmittelpunkten zweier unmittelbar aufeinander folgenden Scheitelpunkte der Ellipse der vierte Theil des Bogens der Evolute dieser Curve. Die diesen Punkten entsprechenden Krümmungsradien sind $\rho_b = \frac{a^2}{b}$ und $\rho_a = \frac{b^2}{a}$. Demnach ist die Länge des Viertelbogens der Evolute $\rho_b - \rho_a = \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 - b^3}{a\,b}$ und somit die Länge der Evolute der Ellipse $4\,\frac{a^3 - b^3}{a\,b}$.

Bei der Cykloide ist der größte Krümmungsradius $4\,a$, der kleinste 0; zwischen den diesen Krümmungsradien entsprechenden Punkten der Evolute liegt die Hälfte ihres Bogens, mithin ist die Länge der Evolute, und weil diese congruent mit der Cykloide, also auch der Cykloide selbst, $8\,a$.

## § 57. Besondere Punkte ebener Curven.

Denkt man sich um einen Punkt P (Fig. 62) einer ebenen Curve als Mittelpunkt einen Kreis von sehr kleinem Radius beschrieben, so wird dieser Kreis die Curve im allgemeinen in zwei Punkten schneiden. Die Radien nach den beiden Schnittpunkten werden miteinander einen Winkel einschließen, der sich von $\pi$ nur wenig unterscheidet.

Fig. 62.

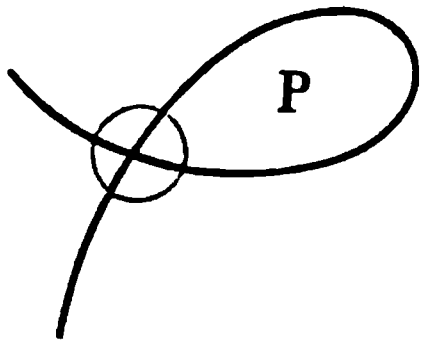



Treffen diese Voraussetzungen zu, so nennt man den Punkt P einen gewöhnlichen Punkt der Curve.

Trifft eine dieser Voraussetzungen nicht zu, so ist der Punkt P ein besonderer (singulärer) Punkt der Curve; sie weist in diesem Punkte eine Singularität auf.

Die gewöhnlichen Singularitäten sind folgende:

Fig. 63.



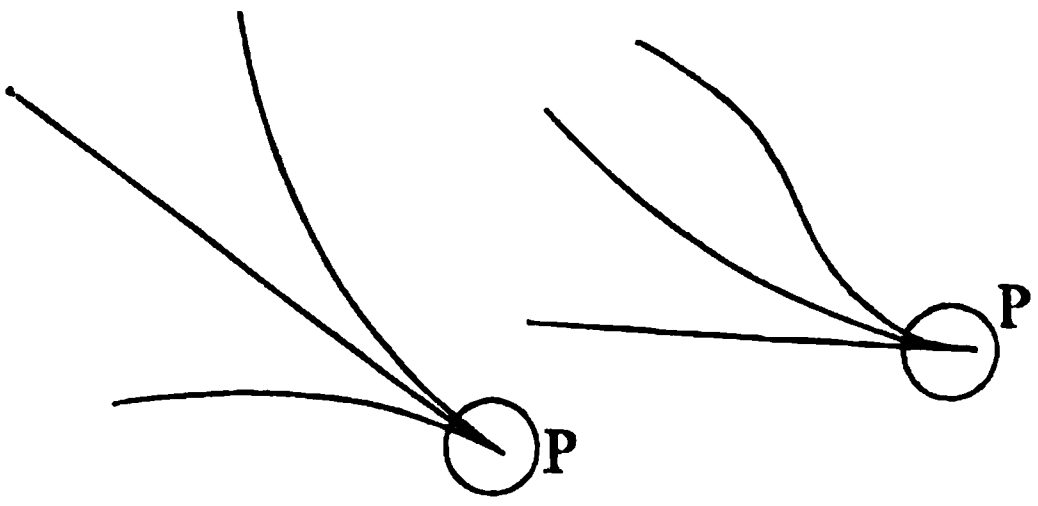

*a*) Der mehrfache Punkt (Fig. 63) ist ein Punkt, durch welchen mehrere Äste der Curve hindurchgehen, indem sie sich dort schneiden oder berühren.

Der um einen solchen Punkt beschriebene kleine Kreis schneidet die Curve in mehr als zwei Punkten.

*b*) Der isolierte oder conjugierte Punkt ist ein Punkt, in dessen unmittelbarer Umgebung sich keine anderen Punkte der Curve befinden. Der diesen Punkt umgebende hinreichende kleine Kreis schneidet die Curve in keinem realen Punkte.

*c*) Der Rückkehrspunkt (Fig. 64). auch stationärer Punkt oder Spitze genannt, ist ein Punkt, in welchem zwei Äste der Curve derart endigen, dass sie in demselben eine gemeinschaftliche Tangente haben.

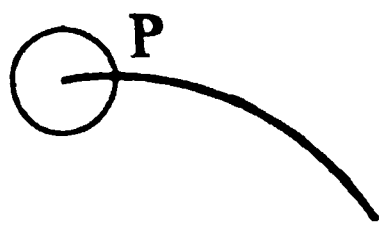
Fig. 64.




Der einen solchen Punkt umgebende kleine Kreis schneidet die Curve in zwei Punkten, aber die Radien nach denselben schließen einen sehr kleinen Winkel ein.

Man unterscheidet zwei Arten von Spitzen. Bei der Spitze der ersten Art liegen die Curvenäste auf verschiedenen Seiten der gemeinschaftlichen Tangente, bei der Spitze zweiter Art, der sogenannten Schnabelspitze. liegen beide Curvenäste auf derselben Seite der gemeinsamen Tangente.

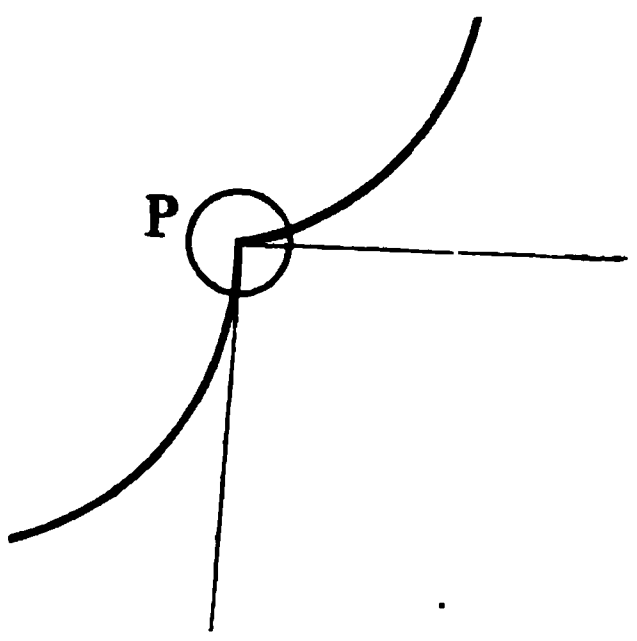
Fig. 65.




*d*) Der Endpunkt (Fig. 65) ist ein Punkt, in welchem ein Curvenast plötzlich abbricht. Der diesen Punkt umgebende kleine Kreis schneidet die Curve nur in einem realen Punkte.

*e*) Die Ecke (Fig. 66) ist ein Punkt, in welchem zwei Curvenäste endigen und verschiedene Tangenten haben. Der einen solchen Punkt umgebende kleine Kreis schneidet die Curve in zwei Punkten, die Radien nach diesen Punkten bilden aber einen Winkel, welcher sowohl von 0 als auch von $\pi$ wesentlich verschieden ist.

Fig. 66.




Die beiden letzteren Singularitäten (Endpunkt, Ecke) kommen nur bei transcendenten Curven vor.

So stellt beispielsweise die Gleichung

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

eine Curve vor, welche im Ursprung einen Endpunkt hat, denn für $x = 0$ wird $y = 0$, für negative Werte des x wird y imaginär.

Eine durch die Gleichung

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

gegebene Curve hat im Ursprung eine Ecke. (Fig. 67.)

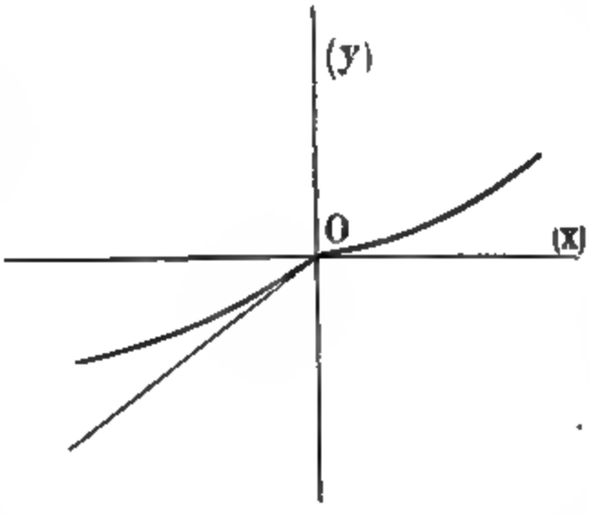
Für $x = 0$ wird nämlich $y = 0$, mithin ist der Ursprung ein Punkt der Curve. Bildet man den Quotienten

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}},$$

so bestimmt dieser durch seinen Grenzwert für $x = 0$ die Richtung der Tangente im Ursprung:

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = \lim_{x=0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

Fig. 67.




Dieser Grenzwert ist 1, wenn x aus dem Negativen gegen 0 wächst und 0, wenn x aus dem Positiven gegen Null abnimmt. (Siehe Grenzen).

Die Curve hat somit im Ursprung zwei Tangenten, nämlich die x-Axe und die aus dem Ursprung unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ gegen die x-Axe geneigte Gerade.

I. Ist $F(x, y) = 0$ die Gleichung der Curve und $F(x, y)$ eine durchaus stetige Function, so kann der Functionswert von $F(x, y)$ nur beim Überschreiten des Wertes Null sein Vorzeichen wechseln. Jedes Wertesystem von x und y aber, für welches der Functionswert 0 wird, gibt die Coordinaten eines Punktes der durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ dargestellten Curve.

Setzt man also in $F(x, y)$ für x und y die Coordinaten eines Punktes, welcher der Curve nicht angehört, so nimmt diese Function einen von 0 verschiedenen Wert an, welcher sich bei der Bewegung dieses Punktes gegen die Curve nur dem Betrage nach ändert, die Änderung des Vorzeichens erfolgt erst in dem Momente, in welchem der Punkt die Curve passiert, d. h. auf die andere Seite derselben übergeht.

Hat ein Punkt der Curve P die Coordinaten x und y, so besteht die Gleichung

$$F(x, y) = 0.$$

Betrachtet man nun einen anderen Punkt $P_1$ mit den Coordinaten $x - h$ $y + k$, welcher der Curve nicht angehört, so wird durch seine Coordinaten die Curvengleichung nicht befriedigt, es wird also

$$F(x + h, y + k)$$

einen von Null verschiedenen Wert haben.

Zufolge der Reihe von Taylor ist

$$F(x+h, y+k) = F(x, y) + h\frac{\partial F}{\partial x} + k\frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon_2,$$

wobei $\varepsilon_2$ die Summe aller übrigen Glieder bedeutet, welche mit h und k gleichzeitig verschwindet.*)

Da nun der Punkt P (x, y) auf der Curve liegt, also $F(x, y) = 0$ ist, so reduciert sich diese Gleichung auf

$$F(x+h, y+k) = h\frac{\partial F}{\partial x} + k\frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon_2.$$

Lässt man nun den Punkt $P_1$ gegen die Curve sich fortbewegen, betrachtet also h und k als Variable, so fällt dieser Punkt bei seiner Bewegung nur dann in die Curve, wenn die Größen h und k der Gleichung

$$F(x+h, y+k) = 0,$$

d. h.

$$h\frac{\partial F}{\partial x} + k\frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon_2 = 0$$

oder

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{k}{h}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\varepsilon_2}{h} = 0$$

genügen.

Setzt man nun voraus, dass h unbeschränkt klein ist, dass also der Punkt $P_1$ die Curve in unbeschränkter Nähe von P passiert, so verschwindet $\frac{\varepsilon_2}{h}$, während sich $\frac{k}{h}$ dem Grenzwerte $\frac{dy}{dx}$ nähert; die Gleichung geht also in

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

über. Der Punkt $P_1$ passiert somit die Curve nur in der Richtung der Tangente, welche, wenn $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ nicht gleichzeitig verschwinden, durch $\frac{dy}{dx}$ bestimmt ist.

In diesem Falle ist der Punkt P ein gewöhnlicher Punkt der Curve, denn es existiert nur eine Tangente in demselben.

Sind $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ gleichzeitig Null, dann ist

$$F(x+h, y+k) = \frac{1}{2!}\left[h^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + k^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right] + \varepsilon_3,$$

*) $\varepsilon_2 = \frac{1}{2!}\left[h^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + k^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right] + \frac{1}{3!}\left[h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right]^3 F + \ldots$

so dass sich für das Hineinfallen des Punktes in die Curve die Bedingung ergibt

$$h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \varepsilon_3 = 0.$$

oder

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{k}{h} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{k^2}{h^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon_3}{h^2} = 0$$

und an der Grenze für $\lim h = 0$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{dy}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

Diese Bedingungsgleichung ist bezüglich $\frac{dy}{dx}$ quadratisch, bestimmt also durch ihre zwei Wurzeln zwei Richtungen, in welchen der Punkt $P_1$ in die Curve fällt, also zwei Tangenten im Punkte P. Der Punkt P ist dann ein zweifacher Punkt der Curve.

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind real verschieden, real zusammenfallend oder conjugiert complex, je nachdem

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 \gtreqless 0$$

ist. Im ersten Falle, wenn nämlich

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0,$$

sind die beiden Richtungen der Tangente in P real und verschieden, der Punkt also ein sogenannter Knotenpunkt.

Im zweiten Falle, wenn

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0,$$

fallen die beiden Tangenten in P zusammen und der Punkt ist in der Regel eine Spitze.

Im dritten Falle endlich, wenn

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0,$$

sind die Richtungen der Tangenten imaginär und der Punkt ein isolierter Punkt der Curve.

Sollten für die Coordinaten x, y des Punktes P auch die zweiten partiellen Differentialquotienten gleichzeitig verschwinden, so muss bei der Entwicklung von $F(x+h, y+h)$ bis zu dem dritten Differentialquotienten gegangen werden. Diese Entwicklung liefert dann eine cubische Gleichung in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$. Der Punkt ist ein dreifacher Punkt und es ergeben sich die mannigfaltigsten Combinationen, auf welche aber nicht eingegangen wird.

Will man also die besonderen Punkte einer Curve aufsuchen, so stellt man das Gleichungssystem auf:

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

und untersucht, für welche Werte von x und y dasselbe gleichzeitig befriedigt wird. Diese Werte sind dann die Coordinaten besonderer Punkte, deren Natur durch die Untersuchung der höheren Differentialquotienten in der angegebenen Weise zu erkennen ist.

II. Ist der Ursprung ein Punkt einer algebraischen Curve, so ist es besonders leicht, die Natur desselben zu erforschen.

Bringt man die Gleichung der algebraischen Curve auf die Form

$$\varphi(x, y) + \psi(x, y) + \chi(x, y) + \ldots = 0,$$

wobei $\varphi$, $\psi$, $\chi$, ... Gruppen homogener Glieder vom Grade m, n, p, ... bedeuten, welche nach ihrem Grade steigend geordnet gedacht sind, d. h. $m < n < p < \ldots$, so kann man diese Gleichung ersetzen durch:

$$x^m \varphi\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^n \psi\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^p \chi\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots = 0$$

oder nach Division mit $x^m$:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-m} \psi\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{p-m} \chi\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Lässt man nun x gegen Null abnehmen, so nähert sich der Quotient $\frac{y}{x}$ seinem Grenzwerte, dem Richtungscoefficienten der Tangente im Ursprung, also dem Werte, welchen $y'$ für $x = 0$ annimmt, der mit $y'_0$ bezeichnet werden soll. Die ganze Gleichung reduciert sich, da alle übrigen Glieder x mit positiven Potenzexponenten, also Null zum Factor haben, auf

$$\varphi(1, y'_0) = 0,$$

woraus die Richtungscoefficienten der Tangenten im Ursprung bestimmt werden können.

Ist der Ursprung ein Punkt einer algebraischen Curve, so setze man in der niedrigst dimensionierten Gruppe der Glieder der Curvengleichung 1 an die Stelle von x und $y'_0$ an die Stelle von y und löse die dadurch erhaltene Gleichung nach $y'_0$ auf. So viel Lösungen diese hat, so viel Tangenten besitzt die Curve im Ursprung, welcher ein so vielfacher Punkt der Curve ist.

Ist die niedrigst dimensionierte Gruppe der Glieder der Curvengleichung linear, so ist der Ursprung ein einfacher Punkt, ist sie quadratisch, ein zweifacher Punkt u. s. w.

## Beispiele:

1. Die Lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

geht durch den Ursprung, weil für $x = 0$, $y = 0$.

Ihre nach Gruppen homogener Glieder geordnete Gleichung ist

$$-2a^2(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Die niedrigst dimensionierte Gruppe ist vom zweiten Grade,

$$x^2 - y^2.$$

demnach der Ursprung ein zweifacher Punkt.

Die Tangentenrichtungen ergeben sich nach der Regel aus

$$1 - y'_0{}^2 = 0,$$
$$y' = \pm 1,$$

folglich ist der Ursprung ein Knotenpunkt, die zwei Tangenten in demselben halbieren die Winkel der Coordinatenaxen.

Hat diese Curve auch noch andere mehrfache Punkte? Zur Beantwortung dieser Frage ist die allgemeine Untersuchung erforderlich.

Das Gleichungssystem

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2) - 4a^2 x = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2) + 4a^2 y = 0$$

wird nur durch $x = 0$ und $y = 0$ befriedigt, also ist kein anderer mehrfacher Punkt vorhanden.

2. Das Cartesische Blatt

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

geht durch den Ursprung.

Die niedrigst dimensionierten Glieder $-3axy$ sind quadratisch, demnach der Ursprung ein zweifacher Punkt.

Zur Bestimmung der Richtung der Tangente hätte man die Gleichung $-3ay'_0 = 0$, welche, da sie auch quadratisch sein muss, auf die Gleichung

$$0 \cdot y'_0 - 3a y'_0 = 0$$

zu ergänzen ist. Diese gibt zwei Wurzeln

$$y'_0 = \infty, \quad y'_0 = 0,$$

mithin sind beide Coordinatenaxen Tangenten an die Curve im Ursprung. Der Punkt ist ein Knotenpunkt.

3. Der Ursprung ist ein Punkt der Fußpunktscurve der Ellipse

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2.$$

Die niedrigst dimensionierten Glieder sind quadratisch,

$$-(a^2 x^2 + b^2 y^2),$$

demnach der Ursprung ein zweifacher Punkt.

Zur Bestimmung der Tangentenrichtungen im Ursprung dient die Gleichung

$$a^2 + b^2 y'_0{}^2 = 0;$$

diese gibt die beiden imaginären Wurzeln

$$y'_0 = \pm \frac{a}{b} i.$$

Mithin ist der Ursprung ein isolierter Punkt.

4. Bei der Cissoide

$$(x^2 + y^2)\,x = 2\,r\,y^2$$

sind die niedrigst dimensionierten Glieder $-2\,ry^2$ von der zweiten Dimension, demnach ist der Ursprung als Punkt der Curve ein zweifacher Punkt.

Zur Bestimmung der Richtungen der Tangenten in demselben dient nach der Regel die Gleichung

$$y'_0{}^2 = 0;$$

diese gibt zwei gleiche Wurzeln $y'_0 = 0$ und $y'_0 = 0$, demnach fallen die beiden Tangenten der Curve im Ursprung mit der x-Axe zusammen. Der Ursprung ist also eine Spitze, die x-Axe die Rückkehrtangente in demselben.

Dass hier die Spitze von der ersten Art ist, kann direct eingesehen werden, weil die Curve, wie schon seinerzeit gezeigt wurde, zur x-Axe symmetrisch liegt.

5. Die Curve

$$y^2 - 2\,x^2 y + x^4 + x^5 = 0$$

hat im Ursprung eine Spitze der zweiten Art (Schnabelspitze). Denn die niedrigst dimensionierten Glieder werden hier durch $y^2$ repräsentiert, man hat also zur Bestimmung der Tangentenrichtungen im Ursprung die Gleichung

$$y_0'^2 = 0,$$

welche anzeigt, dass die x-Axe eine Rückkehrtangente der Curve im Ursprung ist.

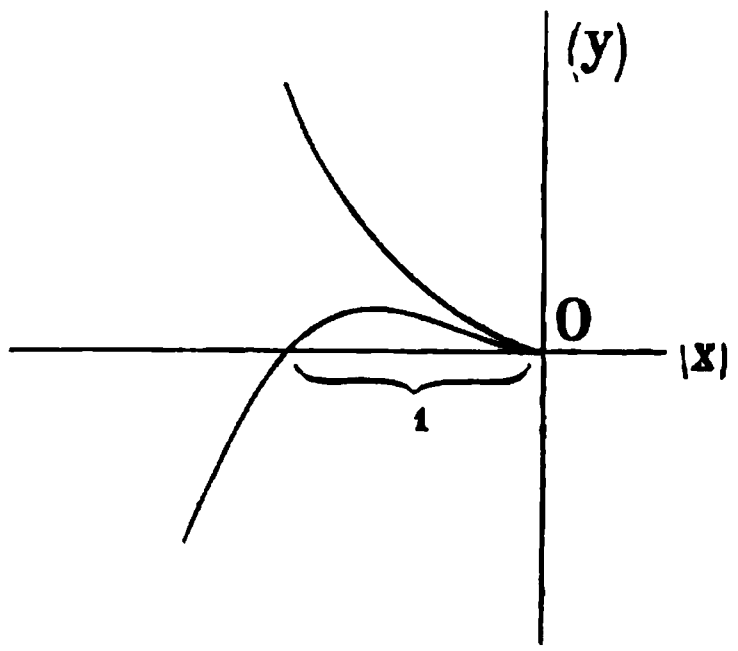
Die Auflösung der Curvengleichung nach y

$$y = x^2 \pm \sqrt{x^4 - x^4 - x^5},$$

$$y = x^2\,(1 \pm \sqrt{-x})$$

zeigt deutlich, dass nur zu negativen Werten des x reale Werte von y gehören, ferner dass, solange x numerisch kleiner ist als 1, beide Werte von y positiv sind, dass also bis zur Abscisse $x = -1$ beide Äste der Curve oberhalb der x-Axe liegen. (Fig. 68.)

Fig 68.




Der Ast, welcher dem positiven Vorzeichen der Wurzel entspricht, bleibt beständig oberhalb der x-Axe, jener dem negativen Vorzeichen der Wurzel entsprechende schneidet die x-Axe für $x = -1$ und tritt sodann auf die untere Seite derselben, muss also einen Wendepunkt haben u. s. w.

# 2. Abschnitt.

## Unebene Curven oder Curven doppelter Krümmung.

### § 58. Allgemeines über unebene Curven.

1. Jede continuierliche Reihe von Punkten heißt eine Curve. Fallen alle ihre Punkte in eine Ebene, so wird sie eine ebene Curve, sonst aber eine unebene Curve oder Curve doppelter Krümmung genannt.

Die Tangente in einem Punkte P jeder Curve, also auch einer unebenen Curve, wird definiert als Verbindungslinie dieses Punktes mit dem unmittelbar benachbarten Punkte (unbeschränkt nahe liegender Punkte) $P_1$ derselben.

Jede Gerade, welche durch P senkrecht zur Tangente in diesem Punkte geführt wird, heißt Normale der Curve im Punkte P. Alle Normalen in diesem Punkte liegen, weil sie auf einer Richtung senkrecht stehen, in einer Ebene, welche durch P geht und zur Tangente senkrecht ist. Diese Ebene wird die Normalebene der Curve im Punkte P genannt.

Eine unebene Curve hat somit in jedem Punkte eine Tangente, unendlich viele Normalen und eine Normalebene, welche alle Normalen enthält.

Jede Ebene, welche durch die Tangente im Punkte P geht, heißt Tangentenebene der Curve in diesem Punkte. Der Punkt P ist ihr Berührungspunkt. Die sämmtlichen Tangentenebenen in einem Punkte bilden ein Ebenenbüschel, dessen Träger (Axe) die Tangente in diesem Punkte ist.

Sowie die Tangente im Punkte P als Verbindungslinie dieses Punktes mit seinem Nachbarpunkte $P_1$ angesehen wird, ebenso ist die Tangente im Punkte $P_1$ als Verbindungslinie desselben mit seinem Nachbarpunkte $P_2$ aufzufassen.

Die Tangenten in den benachbarten Punkten P und $P_1$ sind benachbarte Tangenten. Sie schneiden sich in $P_1$ und bestimmen eine Ebene. Diese ist Tangentenebene sowohl im Punkte P, als auch im Punkte $P_1$ und geht durch die drei Curvenpunkte P, $P_1$ und $P_2$. Sie wird die Schmiegungsebene, Krümmungsebene oder osculatorische Ebene der Curve im Punkte P genannt.

Die Schmiegungsebene ändert ihre Stelle von Punkt zu Punkt und darin liegt die Charakteristik der unebenen Curven.

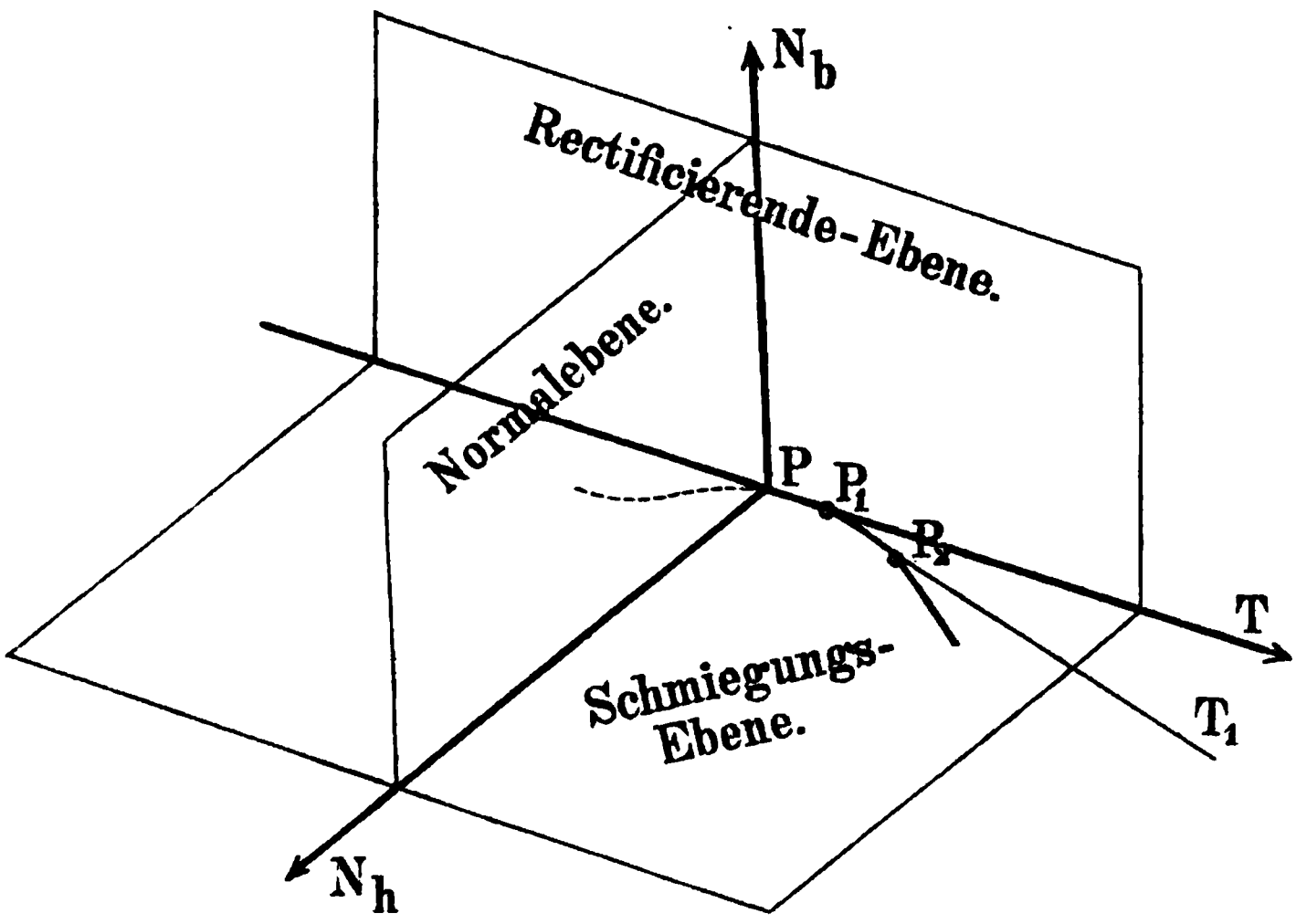
Bei einer ebenen Curve fallen alle Schmiegungsebenen mit der Ebene der Curve zusammen, bei einer unebenen Curve kann nur das Bogenelement (der unbeschränkt kleine Bogen) P $P_1$ $P_2$ als eben angesehen werden, und seine Ebene ist die Schmiegungsebene im Punkte P.

Von den unendlich vielen Normalen im Punkte P liegt eine in der Schmiegungsebene, sie ist die Schnittlinie der Normalebene mit der Schmiegungsebene und wird Hauptnormale genannt.

Diejenige Normale, welche senkrecht steht zur Schmiegungsebene, heißt Binormale der Curve.

Die von der Tangente und der Binormale bestimmte Ebene nennt man die rectificierende Ebene. (Fig. 69.) Diese ist, weil sie die Tangente enthält, auch eine Tangentenebene der Curve.

Fig. 69.




In jedem Punkte einer (unebenen) Curve sind also insbesondere drei zu einander senkrechte Geraden zu unterscheiden: Tangente. Hauptnormale und Binormale. Diese sind Schnittlinien dreier zu einander senkrechter Ebenen: der Schmiegungsebene, der Normalebene und der rectificierenden Ebene.

2. Eine unebene Curve kann als Schnittlinie zweier beliebiger Flächen angesehen und durch ein Gleichungssystem von zwei Gleichungen

$$F_1(x, y, z) = 0,$$
$$F_2(x, y, z) = 0$$

dargestellt werden, von welchen jede eine Fläche vorstellt.

Statt beliebiger Flächen, kann man auch Cylinderflächen wählen, welche die Curve als ihre Schnittlinie auf zwei Projectionsebenen projicieren:

$$F_1(x, y) = 0,$$
$$F_2(x, z) = 0$$

oder

$$y = f_1(x),$$
$$z = f_2(x).$$

Diese Gleichungen geben, wenn man zur ersten $z = 0$ und zur zweiten $y = 0$ hinzufügt, die Projectionen der Curve auf die xy-, beziehungsweise zx-Ebene.

Am häufigsten angewendet und am vortheilhaftesten ist die parametrische Darstellung der Curve durch drei Gleichungen mit Hilfe eines Parameters t

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$
$$z = \chi(t).$$

Durch Elimination von t aus diesen Gleichungen erhält man zwei von einander unabhängige Gleichungen zwischen den Punktcoordinaten x, y, z — weder mehr noch weniger — woraus folgt, dass diese drei Gleichungen thatsächlich eine Curve vorstellen und nicht etwa eine Fläche oder eine Gruppe von Punkten in beschränkter Zahl.

Aus der ersten dieser Gleichungen ergebe sich durch Auflösung nach t die Beziehung $t = \varphi_1(x)$, dann kann man das System durch

$$t = \varphi_1(x),$$
$$y = \psi[\varphi_1(x)] = \psi_1(x),$$
$$z = \chi[\varphi_1(x)] = \chi_1(x)$$

ersetzen, worin die 2. und 3. Gleichung die Form aufweisen, wie sie bei Darstellung durch projicierende Cylinderflächen gezeigt wurde.

## § 59. Tangente und Normalebene unebener Curven.

Die Tangente im Punkte P der Curve, welcher die Coordinaten x, y, z hat, besitzt als Verbindungslinie dieses Punktes mit seinem

Nachbarpunkte $P_1$ mit den Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Richtung

$$dx : dy : dz.$$

Bezeichnet man mit $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Coordinaten von Punkten, welche der Curve nicht angehören, so ist das Gleichungssystem der Tangente als jenes einer Geraden durch den Punkt P mit der Richtung $dx : dy : dz$

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz},$$

und die Gleichung der Normalebene als einer zu dieser Geraden im Punkte P senkrechten Ebene

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0.$$

In diesen Gleichungen sind die Differentiale entsprechend den gegebenen Gleichungen der Curve durch ihnen proportionale endliche Größen zu ersetzen.

Anmerkung: Bezeichnet man das Bogenelement $PP_1$ mit $ds$, und betrachtet dasselbe als Gerade, so ist dieses als Abstand der Punkte P und $P_1$ bestimmt durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

und da $dx$, $dy$ und $dz$ die orthogonalen Projectionen der Strecke $PP_1$ auf die Coordinatenaxen sind, hat man für die Richtungscoordinaten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der Tangente die Beziehungen:

$$dx = \alpha\,ds \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{dx}{ds},$$

$$dy = \beta\,ds \quad \text{»} \quad \beta = \frac{dy}{ds},$$

$$dz = \gamma\,ds \quad \text{»} \quad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Ist die Curve durch das Gleichungssystem

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$
$$z = \chi(t)$$

gegeben, so hat man:

$$dx = \varphi'(t)\,dt = x'\,dt,$$
$$dy = \psi'(t)\,dt = y'\,dt,$$
$$dz = \chi'(t)\,dt = z'\,dt.$$

Die Gleichungen der Tangente und der Normalebene gehen über in:

$$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'}$$

und

$$(\xi - x)\,x' + (\eta - y)\,y' + (\zeta - z)\,z' = 0.$$

Ist hingegen die Curve gegeben durch das Gleichungssystem

$$F_1(x, y, z) = 0,$$
$$F_2(x, y, z) = 0,$$

so bestehen zwischen den Differentialen $dx$, $dy$, $dz$ die Beziehungen

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F_1}{\partial z}\,dz = 0,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F_2}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F_2}{\partial z}\,dz = 0,$$

aus welchen, da sie nach $dx$, $dy$, $dz$ homogene Gleichungen vom ersten Grade sind,

$$dx : dy : dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

folgt. In diesem Falle gehen die Gleichungen der Tangente und der Normalebene, wenn man $dx$, $dy$ und $dz$ durch die ihnen proportionalen Determinanten ersetzt, in:

$$\frac{\xi - x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{\eta - y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{\zeta - z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

und

$$(\xi - x)\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} + (\eta - y)\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix} + (\zeta - z)\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

über. In allen diesen Gleichungen sind die Größen $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$, $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ ... als Constante anzusehen, da sie sich auf den bestimmten

Punkt P der Curve beziehen, in welchem die Tangente, beziehungsweise die Normalebene gelegt wurde.

## § 60. Schmiegungsebenen unebener Curven.

1. Die Schmiegungsebene ist bestimmt durch die drei benachbarten Punkte P, $P_1$, $P_2$.

Hat der Punkt P die Coordinaten x, y, z, so hat sein Nachbarpunkt $P_1$ die Coordinaten $x + dx$, $x + dy$, $z + dz$, welche aus jenen des Punktes P dadurch hervorgehen, dass man sie um die entsprechenden Differentiale zunehmen lässt.

Der Punkt $P_2$ ist ein Nachbarpunkt von $P_1$, man erhält also seine Coordinaten, wenn man jene des Punktes $P_1$ um ihre Differentiale zunehmen lässt:

$$x + dx + d(x + dx) = x + 2dx + d^2x,$$
$$y + dy + d(y + dy) = y + 2dy + d^2y,$$
$$z + dz + d(z + dz) = z + 2dz + d^2z.$$

Die Gleichung der Schmiegungsebene als einer Ebene durch drei Punkte mit den Coordinaten x, y, z; $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; $x + 2dx + d^2x$, $y + 2dy + d^2y$, $z + 2dz + d^2z$ ist sonach:

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ dx & dy & dz \\ 2dx + d^2x & 2dy + d^2y & 2dz + d^2z \end{vmatrix} = 0$$

und geht nach Subtraction der doppelten zweiten Zeile von der dritten in

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0$$

über. Entwickelt man die Determinante nach den Elementen der ersten Zeile, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$(\xi - x)\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix} + (\eta - y)\begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix} + (\zeta - z)\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix} = 0.$$

2. Die Binormale ist eine aus dem Punkte P zu dieser Ebene senkrechte Gerade, hat also das Gleichungssystem:

$$\frac{\xi - x}{\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}} = \frac{\eta - y}{\begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}} = \frac{\zeta - z}{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}.$$

**Anmerkung:** Die Hauptnormale ist senkrecht zur Tangente und zur Binormale. Diese haben die Richtungsverhältnisse:

$$\cdot\, dx : dy : dz,$$

$$\left|\begin{matrix} dy\, dz \\ d^2y\, d^2z \end{matrix}\right| : \left|\begin{matrix} dz\, dx \\ d^2z\, d^2x \end{matrix}\right| : \left|\begin{matrix} dx\, dy \\ d^2x\, d^2y \end{matrix}\right|.$$

Demnach hat die Hauptnormale das Richtungsverhältnis:

$$\left[dy \left|\begin{matrix} dx\, dy \\ d^2x\, d^2y \end{matrix}\right| - dz \left|\begin{matrix} dz\, dx \\ d^2z\, d^2x \end{matrix}\right|\right] : \left[dz \left|\begin{matrix} dy\, dz \\ d^2y\, d^2z \end{matrix}\right| - dx \left|\begin{matrix} dx\, dy \\ d^2x\, d^2y \end{matrix}\right|\right] :$$

$$: \left[dx \left|\begin{matrix} dz\, dx \\ d^2z\, d^2x \end{matrix}\right| - dy \left|\begin{matrix} dy\, dz \\ d^2y\, d^2z \end{matrix}\right|\right].$$

Entwickelt man die Klammerausdrücke und bedenkt, dass

$$\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 + \overline{dz}^2 = \overline{ds}^2,$$

also

$$dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z = ds\, d^2s,$$

so erhält man als Richtungsverhältnis der Hauptnormale

$$\left|\begin{matrix} ds\, dx \\ d^2s\, d^2x \end{matrix}\right| : \left|\begin{matrix} ds\, dy \\ d^2s\, d^2y \end{matrix}\right| : \left|\begin{matrix} ds\, dz \\ d^2s\, d^2z \end{matrix}\right|$$

und schließlich, wenn man $ds$ als die unabhängige Variable betrachtet, so dass also $d^2s = 0$ wird:

$$d^2x : d^2y : d^2z.$$

Ist die Curve durch das Gleichungssystem gegeben:

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$
$$z = \chi(t),$$

so ist

$$dx = \varphi'(t)\, dt = x'\, dt,$$
$$dy = \psi'(t)\, dt = y'\, dt,$$
$$dz = \chi'(t)\, dt = z'\, dt$$

und

$$d^2x = \varphi''(t)\, \overline{dt}^2 = x''\, \overline{dt}^2,$$
$$d^2y = \psi''(t)\, \overline{dt}^2 = y''\, \overline{dt}^2,$$
$$d^2z = \chi''(t)\, \overline{dt}^2 = z''\, \overline{dt}^2.$$

Man erhält in diesem Falle durch Einführung der berechneten Werte für die Differentiale nach Wegschaffung von $dt$ als Gleichungen der Schmiegungsebene und Binormale:

$$(\xi - x)\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} + (\eta - y)\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} + (\zeta - z)\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

nd

$$\frac{\xi - x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{\eta - y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{\zeta - z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}.$$

## § 61. Krümmung und Windung unebener Curven.

1. Unter mittlerer (relativer) Krümmung K einer unebenen Curve i einem Punkte P versteht man analog wie bei einer ebenen Curve as Verhältnis des im Bogenmaße gemessenen Winkels $d\vartheta$ der Tanenten in den Endpunkten des Bogenelementes $ds$ $[\overset{\frown}{PP_1}]$ zur Länge ieses Bogenelementes $ds$

$$K = \frac{d\vartheta}{ds}.$$

Dieses Bogenelement liegt in der Schmiegungsebene des Punktes P nd kann als eben angesehen werden.

Denkt man sich in der Schmiegungsebene einen Kreis, welcher ie Curve im Punkte P berührt und in diesem dieselbe mittlere rümmung besitzt wie die Curve, so nennt man diesen Kreis den rümmungskreis der Curve im Punkte P und seinen Radius $\rho$ den rümmungsradius in diesem Punkte.

Wie bereits bei den ebenen Curven entwickelt wurde, ist der rümmungsradius gleich dem reciproken Werte der mittleren rümmung, also

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\vartheta}.$$

Um den Krümmungsradius einer unebenen Curve zu bestimmen, at man nur die Größen $ds$ und $d\vartheta$ aus den Curvengleichungen entprechend auszudrücken.

Bekanntlich ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Der Winkel $d\vartheta$, den die benachbarten Tangenten einschließen, ird analog wie bei den ebenen Curven Contingentswinkel genannt.

Er ist der Winkel, den die Richtungen der Verbindungslinien $P_1$ (Tangente in P) und $P_1P_2$ (Tangente in $P_2$) miteinander einchließen.

Die drei in Betracht kommenden Punkte haben die Coordinaten

$$\begin{array}{lll} P \ldots x, & y, & z, \\ P_1 \ldots x + dx, & y + dy, & z + dz, \\ P_2 \ldots x + 2dx + d^2x, & y + 2dy + d^2y, & z + 2dz + d^2z. \end{array}$$

mithin hat die Verbindungsgerade $PP_1$ das Richtungsverhältnis

$$dx : dy : dz,$$

jene $P_1 P_2$

$$(dx + d^2x) : (dy + d^2y) : (dz + d^2z).$$

Nun ist aber

$$\overline{dx^2} + \overline{dy^2} + \overline{dz^2} = \overline{ds^2},$$

und

$$(dx + d^2x)^2 + (dy + d^2y)^2 + (dz + d^2z)^2 = \overline{dx^2} + \overline{dy^2} + \overline{dz^2} +$$

$$+ 2[dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z] + [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] = ds^2,$$

weil die Klammerausdrücke als unendlich kleine Größen der dritten beziehungsweise vierten Ordnung, gegenüber jenen der zweiten Ordnung verschwindend klein sind, also vernachlässigt werden können.

Demzufolge haben diese zwei Verbindungsgeraden die Richtungscoordinaten (Richtungscosinus)

$$\alpha = \frac{dx}{ds}; \quad \beta = \frac{dy}{ds}; \quad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

$$\alpha_1 = \frac{dx + d^2x}{ds}; \qquad \beta = \frac{dy + d^2y}{ds}; \qquad \gamma = \frac{dz + d^2z}{ds}.$$

Der Sinus des Winkels $d\vartheta$ als Winkel dieser beiden Richtungen ist somit gegeben durch (1. Band, Artikel 14):

$$\sin^2 d\vartheta = \left|\begin{matrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ \frac{dx + d^2x}{ds} & \frac{dy + d^2y}{ds} \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{dy + d^2y}{ds} & \frac{dz + d^2z}{ds} \end{matrix}\right|^2 +$$

$$+ \left|\begin{matrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{dz + d^2z}{ds} & \frac{dx + d^2x}{ds} \end{matrix}\right|^2.$$

Bei unbeschränkt kleinen Winkeln kann statt des Sinus der Bogen gesetzt werden, demnach ist

$$\sin^2 \vartheta = \overline{d\vartheta^2},$$

also, wenn man in den Determinanten die erste Zeile von der zweiten subtrahiert und $\frac{1}{ds^4}$ als Factor heraushebt:

$$d\vartheta^2 = \frac{\left|\begin{matrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{matrix}\right|^2}{ds^4}.$$

Man erhält mithin schließlich:

$$\rho = \frac{ds}{d\vartheta} = \frac{\overline{ds^3}}{\sqrt{\left|\begin{matrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{matrix}\right|^2}}$$

oder

$$\rho = \frac{(\overline{dx^2} + \overline{dy^2} + \overline{dz^2})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left|\begin{matrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{matrix}\right|^2}}.$$

Ist die Curve speciell durch das Gleichungssystem

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$
$$z = \chi(t)$$

gegeben, so kann man für $dx$, $dy$, $dz$, $d^2x$, ... $ds$ die aus diesem zu bestimmenden Werte

$$dx = x' dt \ldots d^2x = x'' \overline{dt^2} \ldots ds^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)\overline{dt^2}$$

einführen und erhält für den Krümmungsradius:

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left|\begin{matrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{matrix}\right|^2}},$$

Da ferner

$$\left|\begin{matrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{matrix}\right|^2 = \left|\begin{matrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{matrix}\right|^2 =$$

$$= \left|\begin{matrix} \overline{dx^2} + \overline{dy^2} + \overline{dz^2} & dx\,d^2x + dy\,d^2y\,dz\,d^2z \\ dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z & (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 \end{matrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{matrix} \overline{ds^2} & ds\,d^2s \\ ds\,d^2s & (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 \end{matrix}\right| = \overline{ds^2}[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2],$$

so ist auch

$$\rho = \frac{d\,s^2}{\sqrt{(d^2\,x)^2 + (d^2\,y)^2 + (d^2\,z)^2 - (d^2\,s)^2}},$$

und wenn s als unabhängige Variable gewählt wird [$t = f(s)$; $d^2\,s = 0$]

$$\rho = \frac{d\,s^2}{\sqrt{(d^2\,x)^2 + (d^2\,y)^2 + (d^2\,x)^2}}.$$

2. Die Schmiegungsebene ändert bei einer unebenen Curve von Punkt zu Punkt ihre Stellung.

Die Änderung der Stellung der Schmiegungsebene ruft die zweite Krümmung oder Windung der Curve hervor.

Bezeichnet man den Winkel, den zwei benachbarte Schmiegungsebenen miteinander einschließen (Torsionswinkel) mit $d\,\tau$, so ist die mittlere Windung im Punkte P analog der Krümmung

$$w = \frac{d\,\tau}{d\,s}.$$

Um die Windung zu berechnen, hat man nur wieder $d\,s$ und $d\,\tau$ aus den Curvengleichungen entsprechend auszudrücken.

Bekanntlich ist

$$d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2 = d\,s^2.$$

Die Normale der Schmiegungsebene im Punkte P hat das Richtungsverhältnis

$$\begin{vmatrix} d\,y & d\,z \\ d^2\,y & d^2\,z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d\,z & d\,x \\ d^2\,z & d^2\,x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d\,x & d\,y \\ d^2\,x & d^2\,y \end{vmatrix}$$

oder, wenn man die Determinanten mit $\xi$, $\eta$, $\zeta$ (sie sind unendlich kleine Größen dritter Ordnung) bezeichnet,

$$\xi : \eta : \zeta.$$

Demnach sind die Richtungscoordinaten der Normalen dieser Schmiegungsebene (Binormale)

$$\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}; \quad \beta = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}; \quad \gamma = \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}.$$

Der benachbarte Punkt $P_1$ hat die Coordinaten

$$x + d\,x, \quad y + d\,y, \quad z + d\,z.$$

Das Richtungsverhältnis der Normalen der Schmiegungsebene in $P_1$ wird man demnach erhalten, wenn man in den eben gefundenen Verhältniszahlen die Variablen x, y, z um ihre Differentiale $d\,x$, $d\,y$, $d\,z$ zunehmen lässt; dann gehen aber $\xi$, $\eta$, $\zeta$ über in

$$\mathfrak{x} + \mathrm{d}\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y} + \mathrm{d}\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{z} + \mathrm{d}\mathfrak{z}$$

und man hat als Richtungsverhältnis der Normalen der Schmiegungsebene in $P_1$

$$(\mathfrak{x} + \mathrm{d}\mathfrak{x}) : (\mathfrak{y} + \mathrm{d}\mathfrak{y}) : (\mathfrak{z} + \mathrm{d}\mathfrak{z}).$$

Nun ist aber

$$(\mathfrak{x} + \mathrm{d}\mathfrak{x})^2 + (\mathfrak{y} + \mathrm{d}\mathfrak{y})^2 + (\mathfrak{z} + \mathrm{d}\mathfrak{z})^2 = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 +$$
$$+ 2(\mathfrak{x}\,\mathrm{d}\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\,\mathrm{d}\mathfrak{y} + \mathfrak{z}\,\mathrm{d}\mathfrak{y}) + \overline{\mathrm{d}\mathfrak{x}^2} + \mathrm{d}\overline{\mathfrak{y}^2} + \overline{\mathrm{d}\mathfrak{z}^2} = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2,$$

weil die Klammerausdrücke rechts als unendlich kleine Größen der siebenten, beziehungsweise achten Ordnung gegenüber $\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2$ (sechste Ordnung) verschwindend klein sind. Mithin sind die Richtungscoordinaten der Binormale

$$\alpha_1 = \frac{\mathfrak{x} + \mathrm{d}\mathfrak{x}}{\sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}}; \quad \beta_1 = \frac{\mathfrak{y} + \mathrm{d}\mathfrak{y}}{\sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}}; \quad \gamma_1 = \frac{\mathfrak{z} + \mathrm{d}\mathfrak{z}}{\sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}}.$$

Der Sinus des Winkels $\mathrm{d}\tau$, den die Schmiegungsebenen in den Nachbarpunkten P und $P_1$ bilden, ist demnach gegeben durch

$$\sin^2 \mathrm{d}\tau = \frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{y} \\ \mathfrak{x} + \mathrm{d}\mathfrak{x} & \mathfrak{y} + \mathrm{d}\mathfrak{y} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y} & \mathfrak{z} \\ \mathfrak{y} + \mathrm{d}\mathfrak{y} & \mathfrak{z} + \mathrm{d}\mathfrak{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{z} & \mathfrak{x} \\ \mathfrak{z} + \mathrm{d}\mathfrak{z} & \mathfrak{x} + \mathrm{d}\mathfrak{x} \end{vmatrix}^2}{[\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2]^2}.$$

Wenn man bedenkt, dass der Sinus eines unbeschränkt kleinen Winkels diesem gleichgesetzt werden kann; wenn man ferner in den Determinanten die ersten Zeilen von den zweiten subtrahiert, so erhält man:

$$\overline{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{y} \\ \mathrm{d}\mathfrak{x} & \mathrm{d}\mathfrak{y} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y} & \mathfrak{z} \\ \mathrm{d}\mathfrak{y} & \mathrm{d}\mathfrak{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{z} & \mathfrak{x} \\ \mathrm{d}\mathfrak{z} & \mathrm{d}\mathfrak{x} \end{vmatrix}^2}{[\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2]^2};$$

mithin ergibt sich die Größe der mittleren Windung in P:

$$w = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{y} \\ \mathrm{d}\mathfrak{x} & \mathrm{d}\mathfrak{y} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y} & \mathfrak{z} \\ \mathrm{d}\mathfrak{y} & \mathrm{d}\mathfrak{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{z} & \mathfrak{x} \\ \mathrm{d}\mathfrak{z} & \mathrm{d}\mathfrak{x} \end{vmatrix}^2}}{\mathrm{d}s\,[\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2]}.$$

Führt man den Windungsradius ein $r = \frac{1}{w}$, so ist dieser

$$r = \frac{\mathrm{d}s\,(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)^2}{\sqrt{\begin{vmatrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{y} \\ \mathrm{d}\mathfrak{x} & \mathrm{d}\mathfrak{y} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y} & \mathfrak{z} \\ \mathrm{d}\mathfrak{y} & \mathrm{d}\mathfrak{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{z} & \mathfrak{x} \\ \mathrm{d}\mathfrak{z} & \mathrm{d}\mathfrak{x} \end{vmatrix}^2}}.$$

Diese Formel für den Windungsradius kann noch weiter umgestaltet werden. Es ist nämlich

$$\mathfrak{x} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}^2y & \mathrm{d}^2z \end{vmatrix} = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2z - \mathrm{d}z\,\mathrm{d}^2y,$$

also

$$\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}^3z + \mathrm{d}^2y\,\mathrm{d}^2z - \mathrm{d}z\,\mathrm{d}^3y - \mathrm{d}^2z\,\mathrm{d}^2y = \begin{vmatrix} \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}^3y & \mathrm{d}^3z \end{vmatrix}$$

und analog findet man:

$$\mathrm{d}\eta = \begin{vmatrix} \mathrm{d}z & \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}^3z & \mathrm{d}^3x \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{d}\zeta = \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}^3x & \mathrm{d}^3y \end{vmatrix}.$$

Demnach sind $\xi$, $\eta$, $\zeta$; $\mathrm{d}\xi$, $\mathrm{d}\eta$, $\mathrm{d}\zeta$ die Unterdeterminanten $\Delta_{31}$, $\Delta_{32}$, $\Delta_{33}$; $\Delta_{21}$, $\Delta_{22}$, $\Delta_{23}$ der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}^2x & \mathrm{d}^2y & \mathrm{d}^2z \\ \mathrm{d}^3x & \mathrm{d}^3y & \mathrm{d}^3z \end{vmatrix}.$$

Werden nun in der Reciproken

$$D = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix}$$

die Unterdeterminanten mit $D_{ik}$ bezeichnet, so ist offenbar

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \mathrm{d}\xi & \mathrm{d}\eta \end{vmatrix} = -D_{13} = -\mathrm{d}z\,.\,\Delta;$$

$$\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \mathrm{d}\eta & \mathrm{d}\zeta \end{vmatrix} = -D_{12} = -\mathrm{d}y\,.\,\Delta;$$

$$\begin{vmatrix} \zeta & \xi \\ \mathrm{d}\zeta & \mathrm{d}\xi \end{vmatrix} = -D_{11} = -\mathrm{d}x\,.\,\Delta;$$

mithin geht in der Formel für den Windungsradius r der Nenner über in:

$$\sqrt{\Delta^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)} = \sqrt{\Delta^2\,.\,\mathrm{d}s^2} = \Delta\,.\,\mathrm{d}s.$$

Ferner ist (siehe letzte Gleichung auf Seite 417):

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \mathrm{d}s^2\,[(\mathrm{d}^2x)^2 + (\mathrm{d}^2y)^2 + (\mathrm{d}^2z)^2 - (\mathrm{d}^2s)^2],$$

so dass man schließlich erhält:

$$r = \frac{\mathrm{d}s^2\,[(\mathrm{d}^2x)^2 + (\mathrm{d}^2y)^2 + (\mathrm{d}^2z)^2 - (\mathrm{d}^2s)^2]}{\begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}^2x & \mathrm{d}^2y & \mathrm{d}^2z \\ \mathrm{d}^3x & \mathrm{d}^3y & \mathrm{d}^3z \end{vmatrix}},$$

nd wenn insbesondere s als unabhängige Variable gewählt wird $|\,d^2s = 0\,|$,

$$r = \frac{ds^2\,[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2]}{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}}.$$

**Anmerkung:** Bei einer ebenen Curve ist $w = 0$, also $r = \infty$, demnach das ennzeichen einer ebenen Curve

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0$$

der auch

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

So ist z. B. zu erkennen, dass das Gleichungssystem

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$
$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$$
$$z = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

ine ebene Curve vorstellt. Denn aus diesem Gleichungssystem folgt:

$$x' = a_1 + 2a_2 t \qquad x'' = 2a_2 \qquad x''' = 0$$
$$y' = b_1 + 2b_2 t \qquad y'' = 2b_2 \qquad y''' = 0$$
$$z' = c_1 + 2c_2 t \qquad z'' = 2c_2 \qquad z''' = 0,$$

lso

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ z''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

**Beispiel:**

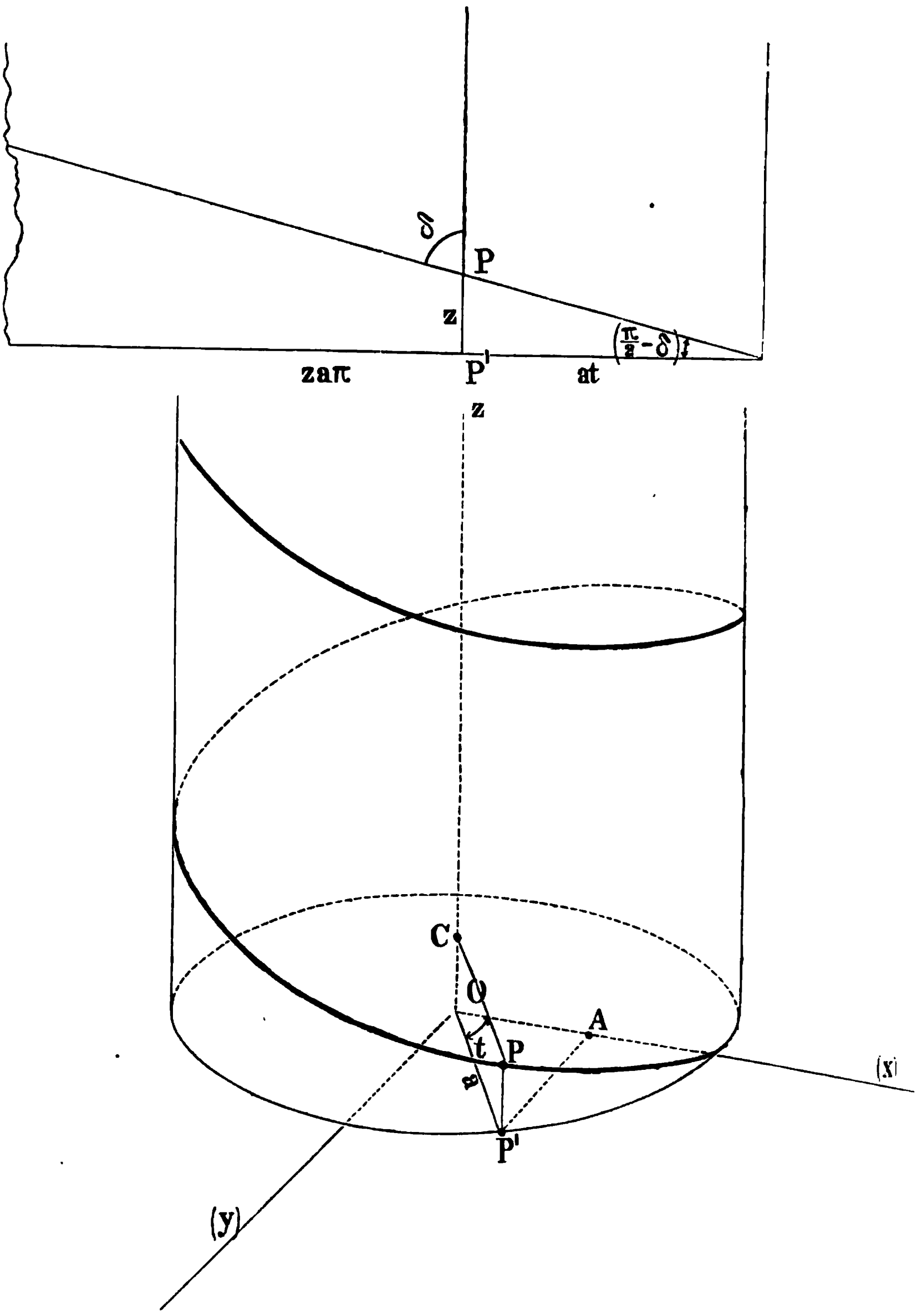
## Die Schraubenlinie.

Die Schraubenlinie ist eine auf einem Kreiscylinder beschriebene urve, welche alle Erzeugenden desselben unter demselben Winkel chneidet.

Breitet man die Cylinderfläche in eine Ebene aus, so bleiben ie Erzeugenden parallel, die Kreise, in welchen sie von Ebenen senkecht zur Axe geschnitten wird, gehen in Gerade über, welche auf en Erzeugenden senkrecht stehen. Die Schraubenlinie geht aber, da ie mit allen Erzeugenden denselben Winkel $\delta$ einschließt, in eine zu

den Erzeugenden unter diesem Winkel geneigte Gerade über. Bezeichnet man den Radius des Kreiscylinders mit a, so lassen sich die Coor-

Fig. 70.




dinaten eines Punktes P der Schraubenlinie als Functionen des Winkels $P'OA = t$ (siehe Fig. 70) ausdrücken.

Man findet:

$$x = a \cos t,$$

$$y = a \sin t,$$

$$z = a\,t \operatorname{cotg} \delta,$$

s Gleichungssystem dieser Curve.

Daraus ergibt sich:

$$x' = -a \sin t, \quad x'' = -a \cos t, \quad x''' = a \sin t,$$

$$y' = a \cos t, \quad y'' = -a \sin t, \quad y''' = -a \cos t,$$

$$z' = a \operatorname{cotg} \delta, \quad z'' = 0, \quad z''' = 0.$$

Mithin ist das Gleichungssystem der Tangente:

$$\frac{\xi - a \cos t}{-\sin t} = \frac{\eta - a \sin t}{\cos t} = \frac{\zeta - a\,t \operatorname{cotg} \delta}{\operatorname{cotg} \delta},$$

nd die Gleichung der Normalebene

$$-(\xi - a \cos t) \sin t + (\eta - a \sin t) \cos t + (\zeta - a\,t \operatorname{cotg} \delta) \operatorname{cotg} \delta = 0,$$

der

$$\xi \sin t - \eta \cos t - (\zeta - a\,t \operatorname{cotg} \delta) \operatorname{cotg} \delta = 0.$$

Der Schnittpunkt der Normalebene mit der z-Axe ergibt sich, venn man in der Gleichung derselben

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \eta = 0$$

etzt:

$$\zeta = a\,t \operatorname{cotg} \delta = z,$$

lerselbe hat also von der xy-Ebene denselben Abstand wie der Punkt P der Curve.

Das Richtungsverhältnis der Normalen der Schmiegungsebene indet man:

$$\begin{vmatrix} y''z' \\ y'''z'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z' & x' \\ z''x'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x' & y' \\ x''y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t \operatorname{cotg} \delta \\ \sin t \quad 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \operatorname{cotg} \delta & -\sin t \\ 0 & \cos t \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{vmatrix},$$

also

$$-\sin t \operatorname{cotg} \delta : \cos t \operatorname{cotg} \delta : -(\sin^2 t + \cos^2 t)$$

oder

$$\sin t \operatorname{cotg} \delta : -\cos t \operatorname{cotg} \delta : 1,$$

$$\sin t : -\cos t : \operatorname{tang} \delta.$$

Aus diesem Richtungsverhältnisse kann man die Richtungscoordinaten bestimmen und erhält speciell

$$\gamma = \cos(z\,n) = \frac{\tang\delta}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \tg^2\delta}} = \frac{\tang\delta}{\sqrt{1+\tg^2\delta}}.$$

$$\gamma = \frac{\tang\delta}{\sec\delta} = \sin\delta.$$

d. h. alle Schmiegungsebenen haben zur z-Axe, also zur x y-Ebene dieselbe Neigung, weil $\delta$ constant ist. Dasselbe gilt demnach auch von der Binormalen.

Die Schmiegungsebene hat die Gleichung:

$$\xi\sin t - \eta\cos t + (\zeta - a\,t\,\cotg\delta)\tang\delta = 0.$$

Ihr Schnittpunkt mit der z-Axe ergibt sich aus ihrer Gleichung durch die Substitutionen $\xi = 0$ und $\eta = 0$:

$$\xi = 0,\ \eta = 0,\ \zeta = a\,t\cos\delta = z.$$

Er ist identisch mit dem Punkte C, in welchem die z-Axe von der Normalebene geschnitten wird. Die Hauptnormale eines Punktes P als Schnittlinie der Normalebene mit der Schmiegungsebene geht also durch diesen Punkt C und ist demnach zur x y-Ebene parallel.

Die Hauptnormalen der Schraubenlinie sind alle senkrecht zur Axe der Schraubenlinie (z-Axe).

**Anmerkung: Betrachtet man im Gleichungssystem der Tangente**

$$\frac{\xi - a\cos t}{-\sin t} = \frac{\eta - a\sin t}{\cos t} = \frac{\zeta - a\,t\,\cotg\delta}{\cotg\delta}$$

**t als einen willkürlichen Parameter, so repräsentiert dieses Gleichungssystem die Gesammtheit der Tangenten der Schraubenlinie, also auch die von ihnen gebildete Fläche.**

**Diese wird Schraubenfläche genannt, ist eine abwickelbare Regelfläche und kann ihre Gleichung in $\xi$ und $\eta$ durch Elimination des Parameters t erhalten werden.**

Die von den Hauptnormalen der Schraubenlinie gebildete Fläche ist eine nicht abwickelbare Regelfläche und wird Wendelfläche genannt. Die Erzeugenden derselben sind senkrecht zur Axe der Schraubenlinie.

Irgend eine Erzeugende dieser Fläche kann analytisch dargestellt werden, indem man die Coordinaten eines beliebigen Punktes Q (Fig. 71) derselben, welche von der z-Axe den Abstand r hat, als Function von r und t ausdrückt.

Man findet:

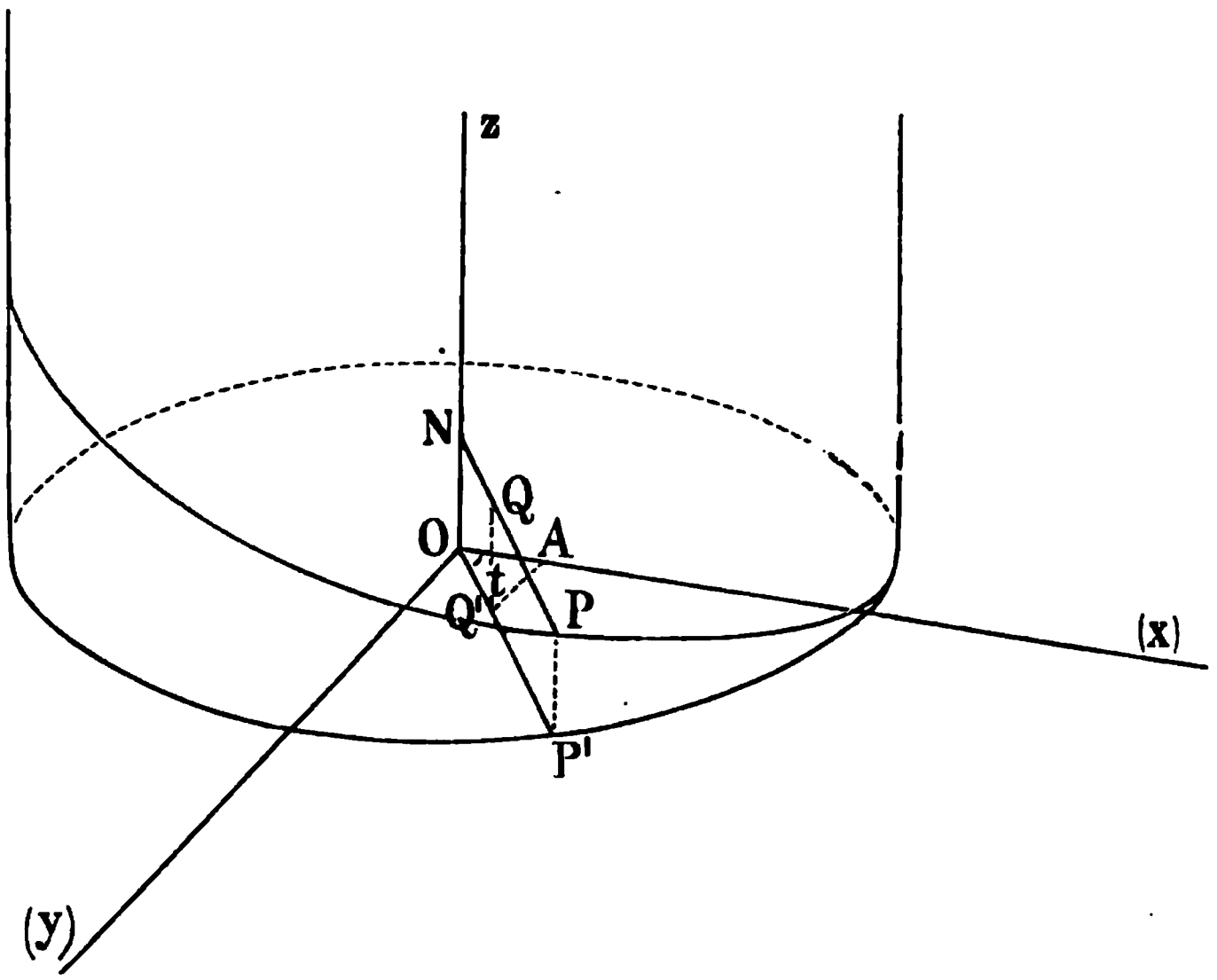
$$O\,Q' = x = r\cos t,$$

$$A\,Q' = y = r\sin t,$$

$$Q'\,Q = z = a\,t\,\cotg\delta.$$

Betrachtet man in diesem Gleichungssystem r und t als willkürliche Parameter, so repräsentiert dieses Gleichungssystem alle Haupt-

Fig. 71.




normalen der Curve, mithin die von ihnen gebildete Wendelfläche. Die Parameter lassen sich leicht eliminieren.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$\frac{y}{x} = \text{tang}\, t \quad \text{oder} \quad t = \text{arc tg}\, \frac{y}{x},$$

und wenn man diesen Wert von t in die dritte Gleichung einführt

$$z = a\, \text{cotg}\, \delta\, \text{arc tang}\, \frac{y}{x},$$

als Gleichung der Wendelfläche.

Für die Schraubenlinie ist ferner

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2\, \text{cotg}^2\, \delta = a^2 (1 + \text{cotg}^2\, \delta) = \frac{a^2}{\sin^2 \delta},$$

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t \\ -a \cos t & -a \sin t \end{vmatrix} = +a^2 [+\sin^2 t + \cos^2 t] = a^2,$$

$$\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos t & a\, \text{cotg}\, \delta \\ -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = a^2 \sin t\, .\, \text{cotg}\, \delta,$$

$$\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cot g\,\delta & -a\sin t \\ 0 & -a\cos t \end{vmatrix} = -a^2\cos t\cot g\,\delta,$$

also

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 = a^4(1+\sin^2 t\cot g^2\delta + \cos^2 t\cot g^2\delta =$$

$$= a^4(1+\cot g^2\delta) = \frac{a^4}{\sin^2\delta},$$

demnach:

$$\rho = \frac{\frac{a^3}{\sin^3\delta}}{\frac{a^2}{\sin\delta}} = \frac{a}{\sin^2\delta},$$

d. h. der Krümmungsradius ist für alle Punkte der Schraubenlinie constant.

Da

$$\mathfrak{x} = \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} \overline{dt^3} = a^3\cot g\,\delta\,.\sin t\,\overline{dt^3}$$

u. s. w., so hat man:

$$\mathfrak{x} = a^2\cot g\,\delta\sin t\,dt^3, \qquad d\mathfrak{x} = a^2\cot g\,\delta\cos t\,\overline{dt^4},$$
$$\mathfrak{y} = a^2\cot g\,\delta\cos t\,\overline{dt^3}, \qquad d\mathfrak{y} = a^2\cot g\,\delta\sin t\,\overline{dt^4},$$
$$\mathfrak{z} = a^2\,\overline{dt^3}, \qquad d\mathfrak{z} = 0,$$

also

$$\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2 = \frac{a^4}{\sin^2\delta}\,\overline{dt^6}.$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{y} \\ d\mathfrak{x} & d\mathfrak{y} \end{vmatrix} = a^4\cot g^2\delta \begin{vmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{vmatrix} \overline{dt^7} = a^4\cot g^2\delta\,\overline{dt^7},$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{y} & \mathfrak{z} \\ d\mathfrak{y} & d\mathfrak{z} \end{vmatrix} = a^4\cot g\,\delta \begin{vmatrix} -\cos t & 1 \\ \sin t & 0 \end{vmatrix} \overline{dt^7} = a^4\cot g\,\delta\sin t\,\overline{dt^7},$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{z} & \mathfrak{x} \\ d\mathfrak{z} & d\mathfrak{x} \end{vmatrix} = a^4\cot g\,\delta \begin{vmatrix} 1 & \sin t \\ 0 & \cos t \end{vmatrix} \overline{dt^7} = a^4\cot g\,\delta\cos t\,\overline{dt^7},$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{y} \\ d\mathfrak{x} & d\mathfrak{y} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y} & \mathfrak{z} \\ d\mathfrak{y} & d\mathfrak{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{z} & \mathfrak{x} \\ d\mathfrak{z} & d\mathfrak{x} \end{vmatrix}^2 =$$

$$= a^8[\cot g^4\delta + \cot g^2\delta(\sin^2 t+\cos^2 t)]\,\overline{dt^{14}} = a^8\cot g^2\delta(1+\cot g^2\delta)\,\overline{dt^{14}} =$$

$$= a^8\cot g^2\delta\,\frac{1}{\sin^2\delta}\,\overline{dt^{14}} = a^8\,\frac{\cos^2\delta}{\sin^4\delta}\,\overline{dt^{14}},$$

$$\overline{ds^2} = (x'^2 + y'^2 + z'^2)\,\overline{dt^2} = \frac{a^2}{\sin^2\delta}\,\overline{dt^2}.$$

Demnach ist die Windung der Schraubenlinie:

$$w = -\frac{a^4\,\frac{\cos\delta}{\sin^4\delta}\,\overline{dt^7}}{\frac{a}{\sin\delta}\,dt\,\frac{a^2}{\sin^2\delta}\,\overline{dt^6}} = \frac{\sin\delta\,\cos\delta}{a}$$

und der Windungsradius:

$$r = -\frac{a}{\sin\delta\,\cos\delta}.$$

Der Windungshalbmesser ist somit auch für alle Punkte der Schraubenlinie constant.

---

# 3. Abschnitt.

# Krumme Flächen.

## § 62. Tangenten, Tangentenebenen und Normalen der krummen Flächen.

Die Tangente einer Fläche im Punkte P wird definiert als die Verbindungslinie dieses Punktes mit einem der unendlich vielen benachbarten Punkte $P_1$ dieser Fläche, welche um P herum gedacht werden können.

Man kann nun zeigen, dass alle Tangenten der Fläche im Punkte P in einer Ebene liegen und diese wird die Tangentenebene im Punkte P genannt.

Die Normale zur Tangentenebene in dem Punkte P heißt Normale der Fläche.

Die Fläche sei gegeben durch die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0.$$

Ist P ein Punkt der Fläche, so müssen seine Coordinaten x, y, z die Gleichung derselben befriedigen.

Geht man vom Punkte P auf einen unbeschränkt nahe gelegenen Punkt (Nachbarpunkt) $P_1$ über, so sind dessen Coordinaten

$$x + dx,\ y + dy,\ z + dz,$$

wobei aber die Differentiale der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0$$

genügen müssen. wenn auch der Punkt $P_1$ ein Punkt der Fläche sein soll.

Da nun die drei Differentiale nur der einen Bedingungsgleichung unterworfen sind, so gibt es unendlich viele solcher Nachbarpunkte $P_1$. welche um den Punkt P auf der Fläche liegen.

Die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0,$$

geometrisch gedeutet, sagt, dass die Richtungen, welche durch die Richtungsverhältnisse

$$dx : dy : dz$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

bestimmt sind, aufeinander senkrecht stehen.

Das erste Richtungsverhältnis bestimmt die Richtung der Verbindungslinie der Punkte $P\,|\,x, y, z\,|$ und $P_1\,|\,x + dx, y + dy, z + dz\,|$. also die Richtung einer beliebigen Tangente im Punkte P an die Fläche. Das zweite Richtungsverhältnis ist aber, wenn der Punkt P ein bestimmter Punkt der Fläche ist, vollkommen bestimmt, weil die partiellen Differentialquotienten von $F(x, y, z)$ für einen bestimmten Punkt bestimmte Werte annehmen, repräsentiert also eine für diesen Punkt P charakteristische, bestimmte Richtung.

Jede Tangente an die Fläche im Punkte P steht zufolge der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0$$

auf dieser Richtung senkrecht, d. h. alle Tangenten in P liegen in einer Ebene, der Tangentenebene, welche auf der Richtung

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

senkrecht steht.

Die mit dieser Richtung durch den Punkt P gelegte Gerade ist die Normale der Fläche in diesem Punkte.

Eine Fläche hat demnach in jedem Punkte eine Normale und eine Tangentialebene, in welcher die unendlich vielen Tangenten liegen.

Das Richtungsverhältnis der Normalen ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z},$$

mithin sind die Richtungscomponenten derselben:

$$\alpha = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial F}{\partial x}; \quad \beta = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial F}{\partial y}; \quad \gamma = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Bezeichnet man die Coordinaten von Punkten, welche der Fläche nicht angehören, mit $\xi$, $\eta$ und $\zeta$, so ist das Gleichungssystem der Normalen, als Geraden aus dem Punkte P mit der angegebenen Richtung:

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Die Gleichung der Tangentenebene als einer aus dem Punkte P zur Normalen senkrechten Ebene ist:

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Ist die Gleichung der Fläche in der entwickelten Form gegeben:

$$z = f(x, y),$$

so kann man setzen:

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z,$$

und findet:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

In diesem Falle ist das Richtungsverhältnis der Normale

$$\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} : -1,$$

mithin sind ihre Richtungscoordinaten

$$\alpha = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial z}{\partial x}; \quad \beta = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial z}{\partial y}; \quad \gamma = -\frac{1}{\lambda};$$

$$\lambda = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Die Gleichungen der Normale und der Tangentenebene sind:

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -(\zeta - z)$$

und

$$(\xi - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial z}{\partial y} - (\zeta - z) = 0.$$

**Beispiele:**

1. Es soll für ein Ellipsoid das Gleichungssystem der Normalen und die Gleichung der Tangentialebene aufgestellt werden.

Aus der Gleichung des Ellipsoides

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{c^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{x}{a^2} : \frac{y}{b^2} : \frac{z}{c^2}.$$

Demnach ist das Gleichungssystem der Normalen:

$$\frac{a^2(\xi - x)}{x} = \frac{b^2(\eta - y)}{y} = \frac{c^2(\zeta - z)}{z}.$$

und die Gleichung der Tangentenebene:

$$\frac{x}{a^2}(\xi - x) + \frac{y}{b^2}(\eta - y) + \frac{z}{c^2}(\zeta - z) = 0$$

oder

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} + \frac{z\zeta}{c^2} - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = 0,$$

also schließlich:

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} + \frac{z\zeta}{c^2} - 1 = 0.$$

2. Die Tangentialebene in einem Punkte des Ellipsoides bildet mit den Coordinatenebenen ein Tetraeder.

In welchem Punkte muss die Tangentialebene gelegt werden, damit das Volumen dieses Tetraeders ein Minimum wird?

Aus der Gleichung der Tangentialebene (Beispiel 1)

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} + \frac{z\zeta}{c^2} - 1 = 0$$

ergeben sich die Axenabschnitte m, n, p derselben

$$m = \frac{a^2}{x}, \quad n = \frac{b^2}{y}, \quad p = \frac{c^2}{z}.$$

Die drei Kanten des Tetraeders, welche die Länge der Axenabschnitte haben, stehen aufeinander senkrecht, mithin ist das Volumen desselben

$$V = \frac{1}{6} m n p = \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{x y z}.$$

Dieses Volumen wird zu einem Minimum, wenn

$$x \,.\, y \,.\, z$$

ein Maximum wird.

Die Größen x, y, z sind von einander nicht unabhängig, sondern müssen der Gleichung des Ellipsoides genügen (weil der Punkt ein Punkt des Ellipsoides sein muss), also der Bedingung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

entsprechen. Es muss also, da es sich um ein relatives Maximum handelt (siehe relative Maxima und Minima), die Function

$$x \,.\, y \,.\, z - \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

zu einem absoluten Maximum werden.

Diese Function wird aber zu einem Maximum für das Wertesystem, welches die drei Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz - 2\lambda \frac{x}{a^2} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz - 2\lambda \frac{y}{b^2} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy - 2\lambda \frac{z}{c^2} = 0$$

und die Gleichung des Ellipsoides gleichzeitig befriedigt.

Multipliciert man die erste Gleichung mit x, die zweite mit y und die dritte mit z, so findet man durch Vergleich

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2};$$

und weil zufolge der Gleichung des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}.$$

Mithin sind die Coordinaten der Punkte, welche den Anforderungen der Aufgabe entsprechen

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \pm \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

(Dies gibt acht Punkte, in jedem Octanten einen.)

3. Auf den Normalen des eintheiligen Hyperboloides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

werden durch die Fläche und die x y-Ebene Strecken abgeschnitten.

Es ist der geometrische Ort der Mittelpunkte dieser Strecken zu bestimmen.

Aus der Gleichung der Fläche erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{2z}{c^2},$$

mithin ist das Gleichungssystem der Normalen

$$\frac{a^2(\xi - x)}{x} = \frac{b^2(\eta - y)}{y} = -\frac{c^2(\zeta - z)}{z}.$$

Die Coordinaten des Schnittpunktes dieser Normalen mit der x y-Ebene ergeben sich, wenn man $\zeta = 0$ setzt,

$$\xi_0 = x + \frac{c^2 x}{a^2}, \quad \eta_0 = y + \frac{c^2 y}{b^2}, \quad \zeta = 0.$$

Die Coordinaten des Curvenpunktes sind x, y, z, demnach sind die Coordinaten des Mittelpunktes der von diesen zwei Punkten begrenzten Strecke:

$$X = x\left(1 + \frac{c^2}{2a^2}\right), \quad Y = y\left(1 + \frac{c^2}{2b^2}\right), \quad Z = \frac{z}{2}.$$

Löst man diese Gleichungen nach den Coordinaten x, y, z des Flächenpunktes auf, so erhält man

$$x = \frac{X}{1 + \frac{c^2}{2a^2}}, \quad y = \frac{Y}{1 + \frac{c^2}{2b^2}}, \quad z = 2Z$$

Da x, y, z der Gleichung des Hyperboloides genügen, erhält man durch die Einführung derselben in die genannte Gleichung eine von den Coordinaten x, y, z des Flächenpunktes unabhängige Beziehung zwischen X, Y, Z, also die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes:

$$\frac{X^2}{a^2\left(1 + \frac{c^2}{2a^2}\right)^2} + \frac{Y^2}{b^2\left(1 + \frac{c^2}{2b^2}\right)^2} - \frac{Z^2}{\frac{c^2}{4}} - 1 = 0.$$

Der geometrische Ort der Mittelpunkte dieser Strecken ist demnach wieder ein eintheiliges Hyperboloid, welches zum gegebenen coaxial ist (dieselben Geraden zu Axen hat).

4. Eine Fläche $F(x, y, z) = 0$ sei durch parallele Lichtstrahlen mit den Richtungscoordinaten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ beleuchtet. Es ist die Trennungslinie zwischen Licht und Schatten zu bestimmen.

Die Punkte dieser Trennungslinie sind diejenigen, in welchen die Fläche von den Lichtstrahlen berührt wird.

In solchen Punkten steht der Lichtstrahl zur Normalen der Fläche senkrecht, mithin besteht für die berührenden Strahlen die Beziehung:

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Alle Punkte der Fläche, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen, sind Punkte der gesuchten Curve. Diese ist also dargestellt durch das Gleichungssystem

$$F(x, y, z) = 0,$$

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Speciell bei der Wendelfläche, deren Gleichung

$$z = a \operatorname{cotg} \delta \,.\, \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} = m \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$$

ist, hat man, wenn $F(x, y, z) = m \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - z$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = m \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{my}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = m \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{mx}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

Demnach als Gleichungssystem der Trennungslinie von Licht und Schatten

$$z = m \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x},$$

$$-\alpha \frac{my}{x^2 + y^2} + \beta \frac{mx}{x^2 + y^2} - \gamma = 0.$$

Die Fläche, welche die Wendelfläche in dieser Trennungslinie schneidet, hat die Gleichung

$$-\alpha \frac{my}{x^2 + y^2} + \beta \frac{mx}{x^2 + y^2} - \gamma = 0$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2\frac{\beta m}{2\gamma}x + 2\frac{\alpha m}{2\gamma}y = 0,$$

sie ist ein Kreiscylinder, dessen Erzeugende parallel zur z-Axe und dessen Leitlinie ein durch den Ursprung gehender Kreis ist. Die Coordinaten des Kreismittelpunktes sind, wie leicht einzusehen, $\frac{\beta m}{2\gamma}$ und $-\frac{\alpha m}{2\gamma}$.

Eine beliebige Tangente an den Kreis bildet mit der x-Axe einen Winkel, dessen Tangente durch

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x - \frac{\beta}{\gamma}m}{2y - \frac{\alpha}{\gamma}m}$$

bestimmt ist.

Die Richtung der Tangente im Ursprung wird erhalten, wenn man hierin $x = 0$ und $y = 0$ setzt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Die Tangente an den Kreis (Leitlinie des Cylinders) im Ursprung hat somit das Richtungsverhältnis

$$dx : dy = \alpha : \beta,$$

also dasselbe, wie die Projection des Lichtstrahles auf die x y-Ebene, d. h. die Tangente an diesen Kreis im Ursprung ist eine Parallele zur Projection des Lichtstrahles auf die x y-Ebene.

5. Es soll der geometrische Ort der Fußpunkte aller Senkrechten aus dem Ursprunge auf die Tangentenebenen einer gegebenen Fläche

$$F(x, y, z) = 0$$

bestimmt werden.

Die Gleichung der Tangentenebene in einem Punkte P der Fläche ist:

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Die Senkrechte aus dem Ursprung auf die Tangentenebene hat das Gleichungssystem

$$\frac{\xi}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Diese Gleichungen können zur Berechnung der Coordinaten des Fußpunktes Q benützt werden.

Ändert man x, y und z derart, dass der Punkt P sich auf der Fläche fortbewegt, so erhält man nach und nach alle Punkte Q.

Der geometrische Ort dieser Fußpunkte wird also durch das Gleichungssystem

$$F(x, y, z) = 0,$$

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\xi}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

repräsentiert. Eliminiert man aus demselben die als Parameter anzusehenden Coordinaten x, y, z der Flächenpunkte, so erhält man eine Gleichung zwischen $\xi$, $\eta$ und $\zeta$ als Gleichung der Fußpunktsfläche.

Gleichwie bei den Fußpunktscurven lässt sich auch hier eine allgemein alle Fußpunktsflächen umfassende Construction der Normalen angeben.

Setzt man

$$\frac{\xi}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{1}{m},$$

so ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = m\xi, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = m\eta, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = m\zeta.$$

Führt man diese Werte in die Gleichung der Tangentenebene ein und lässt den gemeinschaftlichen Factor m weg, so erhält man:

$$(\xi - x)\xi + (\eta - y)\eta + (\zeta - z)\zeta = 0$$

oder

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (x\xi + y\eta + z\zeta) = 0.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung folgt:

$$2\xi\,d\xi + 2\eta\,d\eta + 2\zeta\,d\zeta - (x\,d\xi + y\,d\eta + z\,d\zeta) -$$
$$- (\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz) = 0.$$

Da nun

$$\xi : \eta : \zeta$$

das Richtungsverhältnis des auf die Tangentenebene geführten Perpendikels,

$$dx : dy : dz$$

das Richtungsverhältnis irgend einer in der Tangentenebene liegenden Tangente der Fläche im Punkte P ist, also diese Richtungen zueinander senkrecht stehen, so besteht die Beziehung

$$\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz = 0,$$

und es reduciert sich die gefundene Differentialgleichung auf:

$$(2\xi - x)\,d\xi + (2\eta - y)\,d\eta + (2\zeta - z)\,d\zeta = 0$$

oder

$$\left(\xi - \frac{x}{2}\right)d\xi + \left(\eta - \frac{y}{2}\right)d\eta + \left(\zeta - \frac{z}{2}\right)d\zeta = 0.$$

Diese Gleichung sagt, dass die Richtung

$$d\xi : d\eta : d\zeta$$

senkrecht steht zur Richtung

$$\left(\xi - \frac{x}{2}\right) : \left(\eta - \frac{y}{2}\right) : \left(\zeta - \frac{z}{2}\right).$$

Die erstere ist die Richtung einer beliebigen Tangente im Punkte Q der Fußpunktsfläche, letztere die Richtung der Verbindungslinie des Punktes Q mit dem Halbierungspunkte C des Radius OP, welcher den Ursprung mit dem Punkte P der Fläche verbindet.

Die Gerade CQ ist senkrecht zu irgend einer der Tangenten, also zur Tangentenebene im Punkte Q der Fußpunktsfläche, mithin die Normale dieser Fläche.

Als Beispiel soll die Gleichung der Fußpunktsfläche des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

aufgestellt werden.

Die Gleichung der Tangentenebene in einem Punkte P desselben ist:

$$\frac{x\,\xi}{a^2} + \frac{y\,\eta}{b^2} + \frac{z\,\zeta}{c^2} - 1 = 0.$$

Die Gleichungen des Perpendikels aus dem Ursprung

$$\frac{a^2\,\xi}{x} = \frac{b^2\,\eta}{y} = \frac{c^2\,\zeta}{z}.$$

Setzt man behufs symmetrischer Durchführung der Elimination von x, y, z aus den drei Gleichungen

$$\frac{a^2\,\xi}{x} = \frac{b^2\,\eta}{y} = \frac{c^2\,\zeta}{z} = \rho,$$

so erhält man

$$\frac{x}{a} = \frac{a\,\xi}{\rho}; \quad \frac{y}{b} = \frac{b\,\eta}{\rho}; \quad \frac{z}{c} = \frac{c\,\zeta}{\rho},$$

und wenn man diese Werte in die Gleichung der Tangentenebene setzt,

$$\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\rho} - 1 = 0$$

oder

$$\rho = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Durch Einführen derselben Werte in die Gleichung des Ellipsoides findet man

$$\rho^2 = a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2$$

und erhält durch Gleichsetzen der beiden Werte von $\rho$ die Gleichung der Fußpunktsfläche

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2.$$

---

# 4. Abschnitt.

## Quadratur und Rectification ebener Curven.

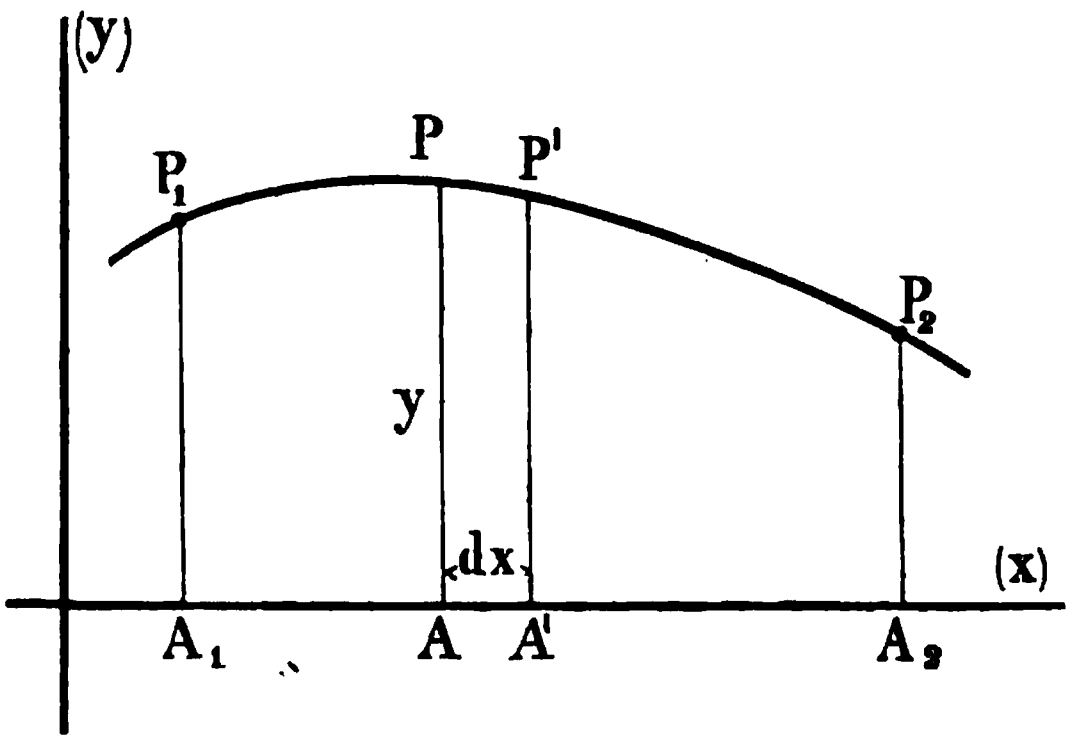
### § 63. Quadratur ebener Curven.

I. Die Aufgabe der Quadratur ebener Curven besteht in der Berechnung der Flächen von Figuren, welche durch dieselben begrenzt sind.

Alle hiehergehörigen Aufgaben lassen sich auf bestimmte einfache Fälle zurückführen.

Ist die Curve durch ihre Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten gegeben, so kann die Aufgabe der Quadratur auf folgende Aufgabe zurückgeführt werden:

Fig. 72.




Es ist die Fläche $A_1 A_2 P_2 P_1$ (Fig. 72) zu berechnen, welche von der x-Axe, der Curve und zwei zur y-Axe parallelen Geraden begrenzt wird.

Diese Aufgabe ist schon aus der Lehre über das bestimmte Integral bekannt.

Man theilt die Fläche in parallele Streifen von der Breite $dx$ (wie $AA'P'P$) und summiert alle diese Elementarstreifen über die ganze Breite der zu quadrierenden Figur.

Ein solcher Elementarstreifen kann als Rechteck angesehen werden und hat demnach die Fläche

$$dF = y\,dx,$$

welche das Flächendifferential genannt wird.

Mithin ist die Summe aller, zwischen den Ordinaten für die Abscissen $x_1$ und $x_2$ gelegenen Elementarstreifen die gesuchte Fläche. und wird bestimmt durch

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx.$$

Ist die Gleichung der Curve

$$y = f(x),$$

so folgt:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

**Beispiele:**

*1. Parabel.*

Eine Parabel sei durch die Gleichung

$$x^2 = 2py$$

gegeben (Fig. 73); es soll der Inhalt der Figur OPB bestimmt werden.

Die Aufgabe kann auf die allgemein gelöste zurückgeführt werden, denn der Inhalt der Figur OPB ist, gleich dem Inhalte des Rechteckes OAPB, vermindert um den Inhalt der Figur OAP.

Den Inhalt F der Figur OAP findet man

$$F = \int_0^x y\,dx = \int_0^x \frac{x^2}{2p}\,dx = \left[\frac{1}{2p}\,\frac{x^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{6p}.$$

Nun ist aber

$$\frac{x^3}{6p} = \frac{1}{3}x\frac{x^2}{p},$$

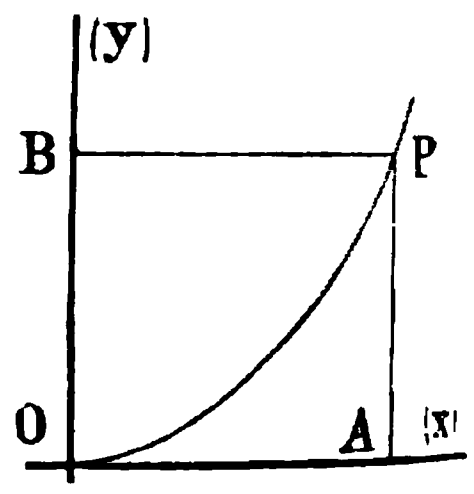
demnach:

$$F = \frac{1}{3}xy = \frac{1}{3}OAPB,$$

also der Flächeninhalt von OPB:

$$xy - \frac{1}{3}xy = \frac{2}{3}xy.$$

Fig. 73.



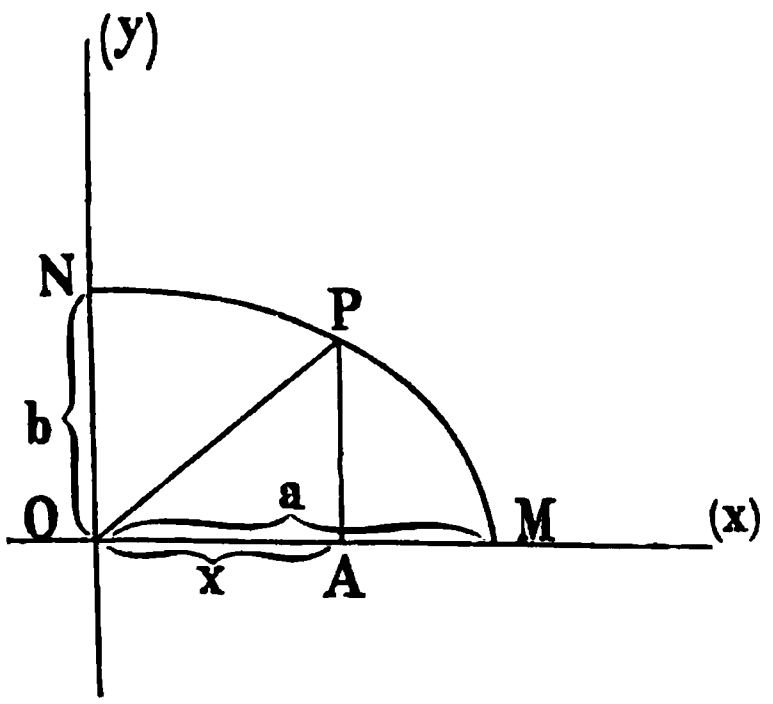
*2. Ellipse.*

Es soll der Flächeninhalt einer Ellipse von den Halbaxen a und b (Fig. 74) berechnet werden.

Wählt man die Axen der Ellipse zu Coordinatenaxen, so ist ihre Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Fig. 74.




Der Flächeninhalt der Ellipse ist gleich dem vierfachen Inhalt ihres Quadranten OMN.

Aus der Gleichung der Curve folgt:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Demnach ist die Fläche f der Figur OAPN:

$$f = \int_0^x y\,dx = \int_0^x \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

oder

$$f = \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^x$$

(siehe Integralrechnung, Formel 82 a),
also

$$f = \frac{x}{2}\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a\,b}{2}\arcsin\frac{x}{a} = \frac{xy}{2} + \frac{a\,b}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

Da $\frac{x\,y}{2}$ die Fläche des Dreieckes OAP darstellt, so muss

$$\frac{a\,b}{2}\arcsin\frac{x}{a}$$

die Fläche des Sectors OPN bedeuten.

Man hat also

$$\text{Sector OPN} = \frac{a\,b}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

Wird $x = a$, so wird der Sector identisch mit dem Quadranten der Ellipse, es ist also

$$\text{area OMN} = \frac{a\,b}{2}\arcsin 1 = \frac{a\,b\,\pi}{4}.$$

Die ganze Fläche der Ellipse ist demnach

$$E = a\,b\,\pi.$$

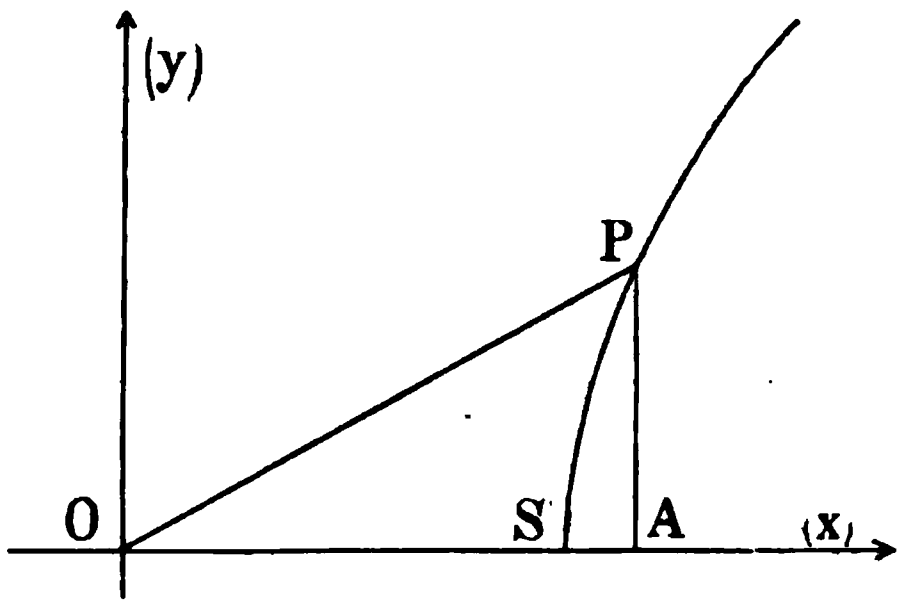
Ist $a = b = r$, so geht die Ellipse in einen Kreis über, dessen Fläche $r^2\pi$ ist.

*3. Hyperbel.*

Die in der Fig. 75 gezeichnete Hyperbel habe die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Fig. 75.




Es soll die Fläche der Figur SAP berechnet werden.

Aus der Gleichung der Hyperbel folgt:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

demnach ist

$$F = \int_a^x y\,dx = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\,dx.$$

also (Integralrechnung, Formel 83 a)

$$F = \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}l\,(x + \sqrt{x^2 - a^2})\right]_a^x =$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}[l\,(x + \sqrt{x^2 - a^2}) - l\,a]\right] =$$

$$= \frac{x}{2}\,\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a\,b}{2}\,l\,\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \frac{x\,y}{2} - \frac{a\,b}{2}\,l\,\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Da $\frac{x\,y}{2}$ die Fläche des Dreieckes OAP darstellt, so hat der Sector OSP die Fläche

$$\frac{a\,b}{2}\,l\,\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a},$$

und weil

$$\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \frac{y}{b},$$

so ist

$$\text{Sector OSP} = \frac{a\,b}{2}\,l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Rückt der Punkt P ins Unendliche, so werden x und y unendlich groß, also auch

$$l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Mithin ist die ganze Fläche, welche zwischen der Hyperbel und der Asymptote liegt, unendlich groß.

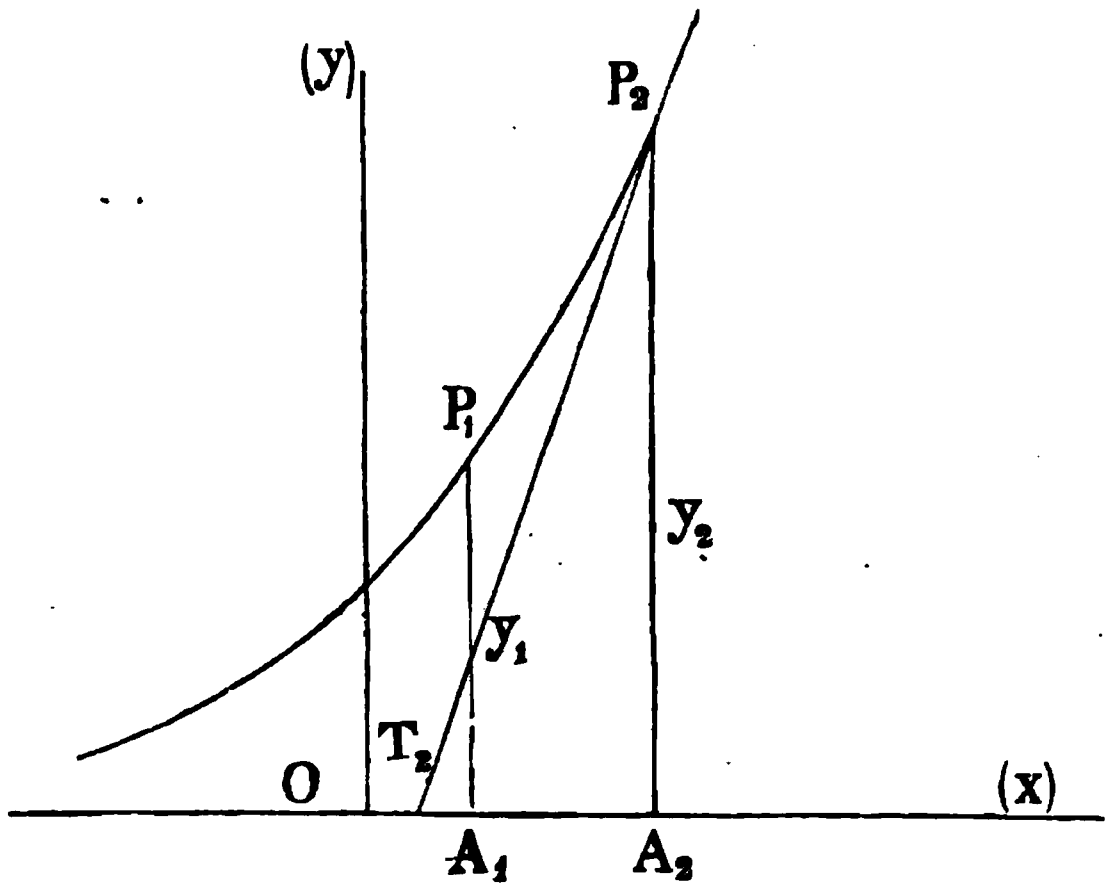
*4. Logarithmische Linie.*

Es soll die Fläche $A_1 A_2 P_2 P_1$ (Fig. 76) berechnet werden, welche von der x-Axe, den beiden Ordinaten $A_1 P_1$ und $A_2 P_2$ und einer durch die Gleichung

$$y = m e^{\frac{x}{m}}$$

gegebenen logarithmischen Linie begrenzt wird.

Fig. 76.




Die gesuchte Fläche ist:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = m\int_{x_1}^{x_2} e^{\frac{x}{m}}\,dx = m\left[e^{\frac{x}{m}}.m\right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$= m\left[e^{\frac{x_2}{m}}.m - e^{\frac{x_1}{m}}.m\right] = m\,(y_2 - y_1).$$

Rückt der Punkt $P_1$ nach links ins Unendliche, so wird $y_1 = 0$ und die Fläche des unendlich langen Streifens ist

$$m\,y_2 = 2\,\text{area}\ T_2 A_2 P_2$$

(Subtangente TA constant $= m$).

*5. Kettenlinie.*

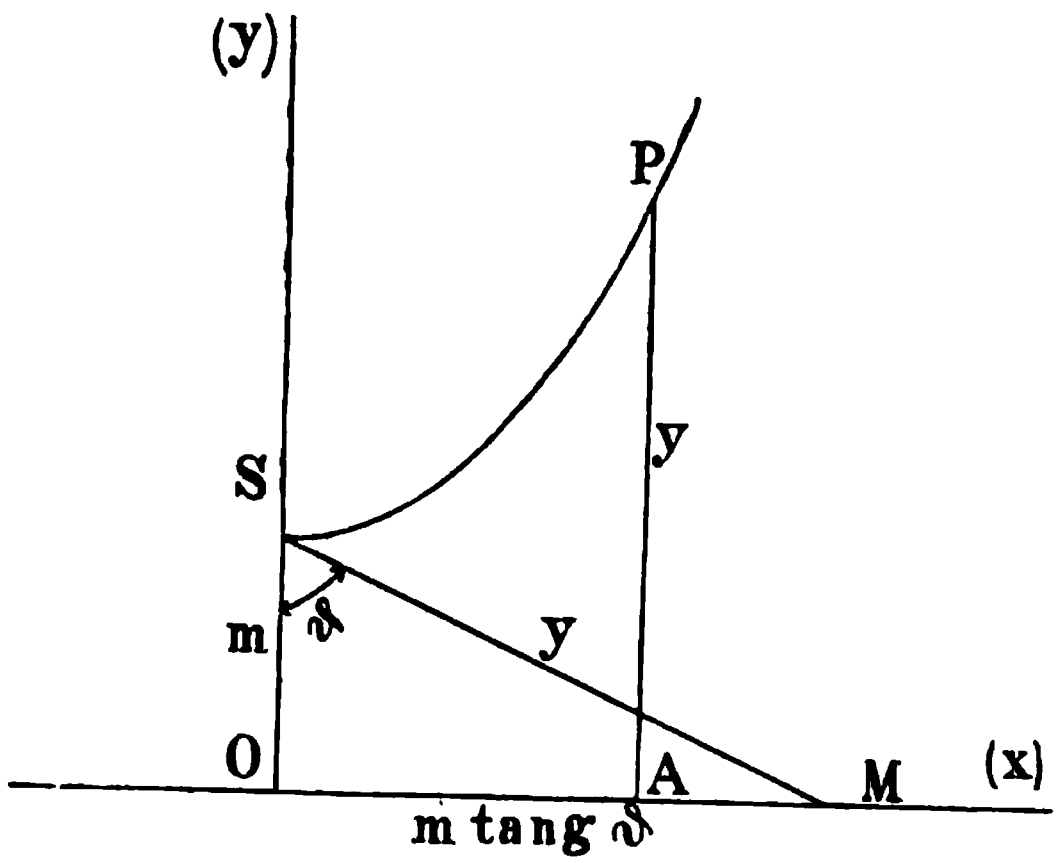
Die Curve sei eine durch die Gleichung

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

gegebene Kettenlinie.

Es ist die Fläche O A P S (Fig. 77) zu berechnen.

Fig. 77.




Diese Fläche ist:

$$F = \int_0^x y\,dx = \frac{m}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) dx = \frac{m^2}{2}\left[e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right]_0^x =$$

$$= \frac{m^2}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right).$$

Da ferner:

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = y' = \operatorname{tang}\vartheta,$$

so ist

$$F = m^2 \operatorname{tang}\vartheta$$

oder

$$F = m \,.\, m \operatorname{tang}\vartheta = 2 \operatorname{area} OMS.$$

(tang $\vartheta = \sqrt{\frac{y^2 - m^2}{m^2}}$, siehe Seite 321).

*6. Cykloide.*

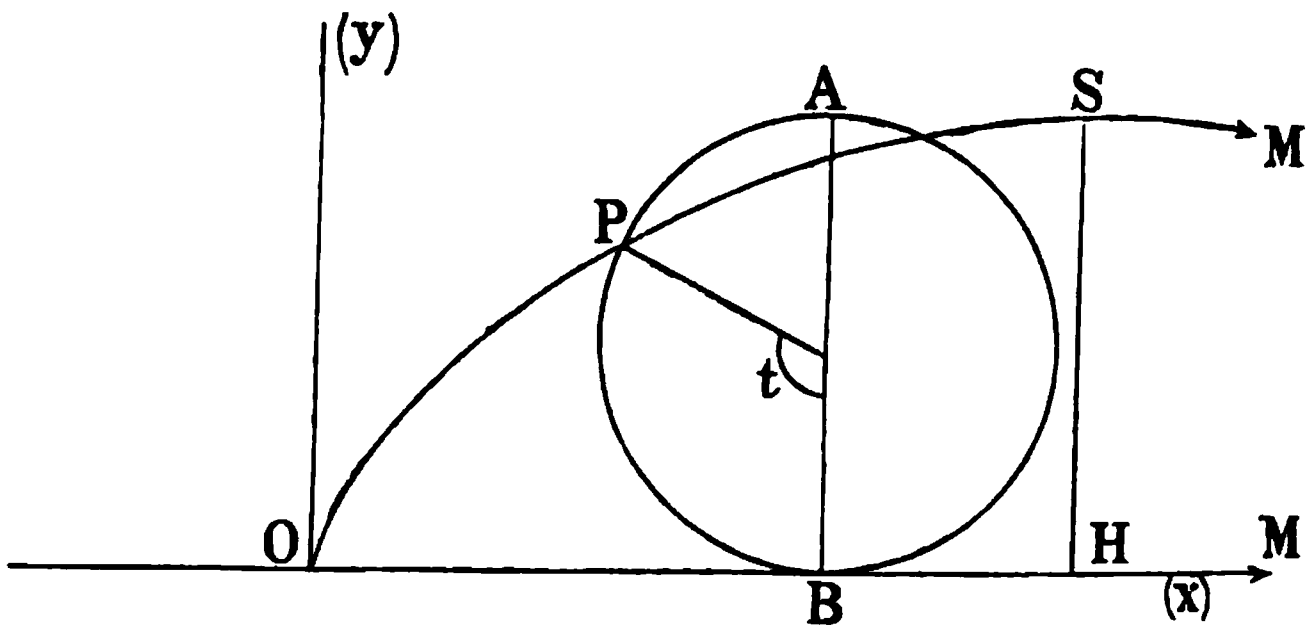
Es soll der Inhalt der Fläche O M S O (Fig. 78) berechnet werden, welche zwischen der x-Axe und einer durch ihr Gleichungssystem

$$x = a\,(t - \sin t),$$
$$y = a\,(1 - \cos t)$$

gegebenen Cykloide liegt.

Diese Fläche ist das Doppelte der Fläche OHS.

Fig. 78.




Aus dem Gleichungssystem der Curve folgt

$$dx = a\,(1 - \cos t)\,dt,$$

also

$$y\,dx = a^2\,(1 - \cos t)^2\,dt = a^2\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2 dt.$$

Der Abscisse x in O entspricht der Wälzungswinkel $t = 0$, jener für den Punkt S der Winkel $t = \pi$, mithin ist die gesuchte Fläche:

$$F = 2\,\text{area}\,OHS = 2\int_0^{\pi} 4\,a^2 \sin^4\frac{t}{2}\,dt.$$

$$F = 8\,a^2\int_0^{\pi}\sin^4\frac{t}{2}\,dt.$$

Setzt man $\frac{t}{2} = z$, so gehen die Integralgrenzen in 0 und $\frac{\pi}{2}$ über, ferner ist $dt = 2\,dz$, demnach:

$$F = 8\,.\,2\,.\,a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 z\,dz = 16\,a^2\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$$

(siehe bestimmte Integrale, Formel 113),
also schließlich:

$$F = 3\,a^2\,\pi.$$

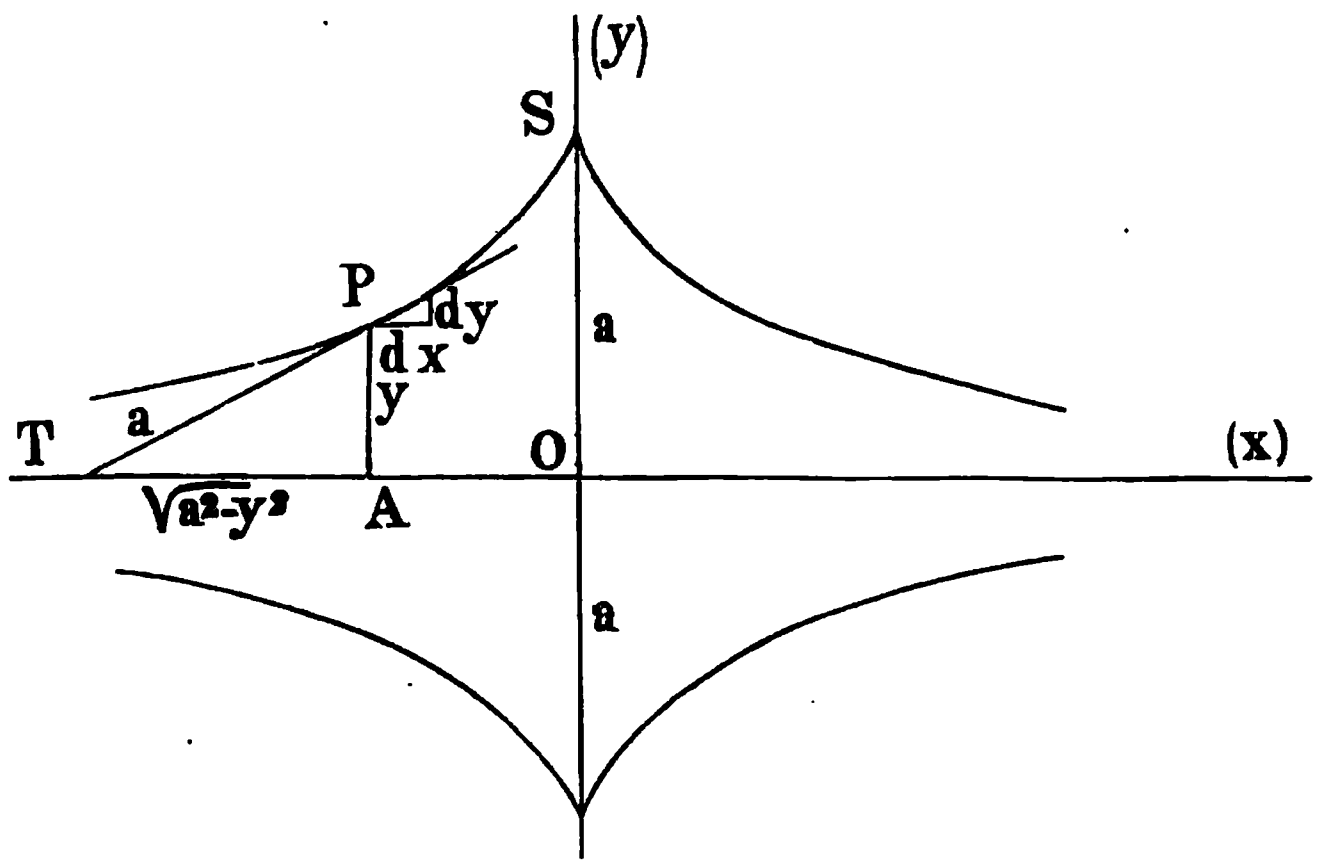
Die Fläche ist dreimal so groß als jene des rollenden Kreises.

### *7. Die Tractorie.*

Oft ist es gar nicht nöthig, die Gleichung der Curve zu kennen, um ihre Fläche zu berechnen.

Ein Beispiel hiefür bietet die Tractorie, eine Curve, deren Tangentenstück constante Länge hat. (Fig. 79.)

Fig. 79.




Aus dieser Eigenschaft der Curve ist zu erkennen, dass sie aus vier zu den Coordinatenaxen symmetrischen Ästen besteht, welche zur x-Axe asymptotisch verlaufen und in zwei Spitzen zusammenstoßen, durch welche man die y-Axe legen kann.

Das constante Tangentenstück sei a, dann ist die Subtangente

$$\sqrt{a^2 - y^2},$$

und es gibt das Verhältnis

$$\sqrt{a^2 - y^2} : y$$

die Richtung der Tangente in einem Curvenpunkte.

Demzufolge besteht die Beziehung:

$$dx : dy = \sqrt{a^2 - y^2} : y,$$

also

$$y\,dx = \sqrt{a^2 - y^2}\,dy.$$

Das Flächendifferential

$$y\,dx$$

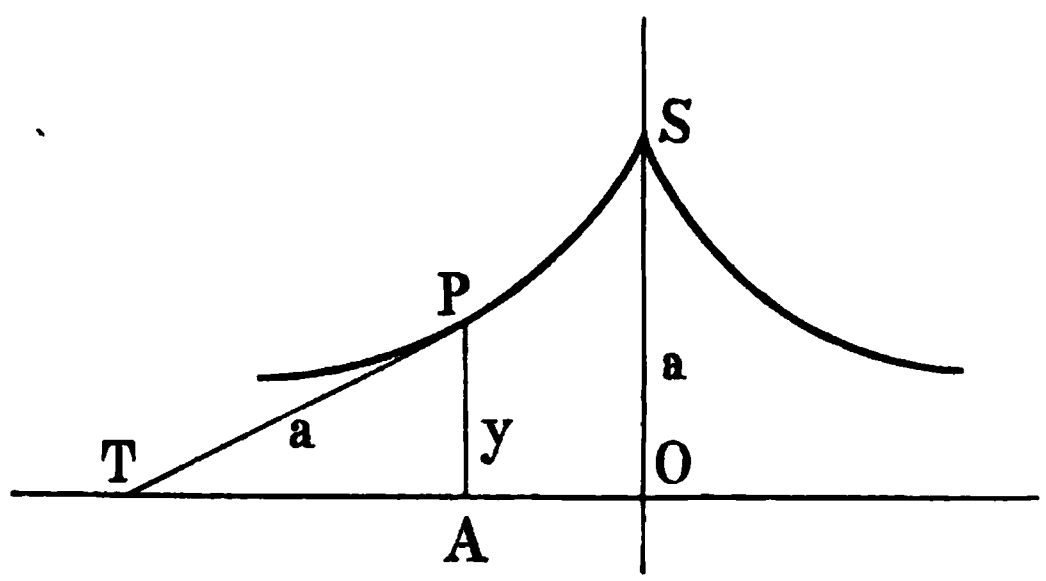
erscheint hier durch den Ausdruck

$$\sqrt{a^2 - y^2}\, dy$$

dargestellt.

Soll nun die Fläche OAPS (Fig. 80) berechnet werden, so hat man dieses Flächendifferential zwischen den Grenzen y und a zu integrieren und erhält:

Fig. 80.




$$F_0 = \int_y^a \sqrt{a^2 - y^2}\, dy.$$

Rückt der Punkt P ins Unendliche, so wird $y = 0$ und man erhält dann ein Viertel der ganzen Fläche der Tractorie

$$\frac{F}{4} = \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{y}{a}\right]_0^a,$$

d. h.

$$\frac{F}{4} = \frac{a^2}{2} \arcsin 1 = \frac{a^2 \pi}{4}.$$

Die ganze nach zwei Richtungen ins Unendliche sich erstreckende Fläche ist

$$F = a^2 \pi,$$

also gleich der Fläche eines Kreises vom Radius a.

II. Ist die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten gegeben, so muss die Berechnung der von der Curve eingeschlossenen Fläche entsprechend der Eigenthümlichkeit der Polarcoordinaten auf eine andere einfache Aufgabe wie bei Anwendung von rechtwinkligen Coordinaten zurückgeführt werden.

Diese Aufgabe ist folgende:

$P_1 P_2$ (Fig. 81) sei ein Bogen einer durch die Gleichung

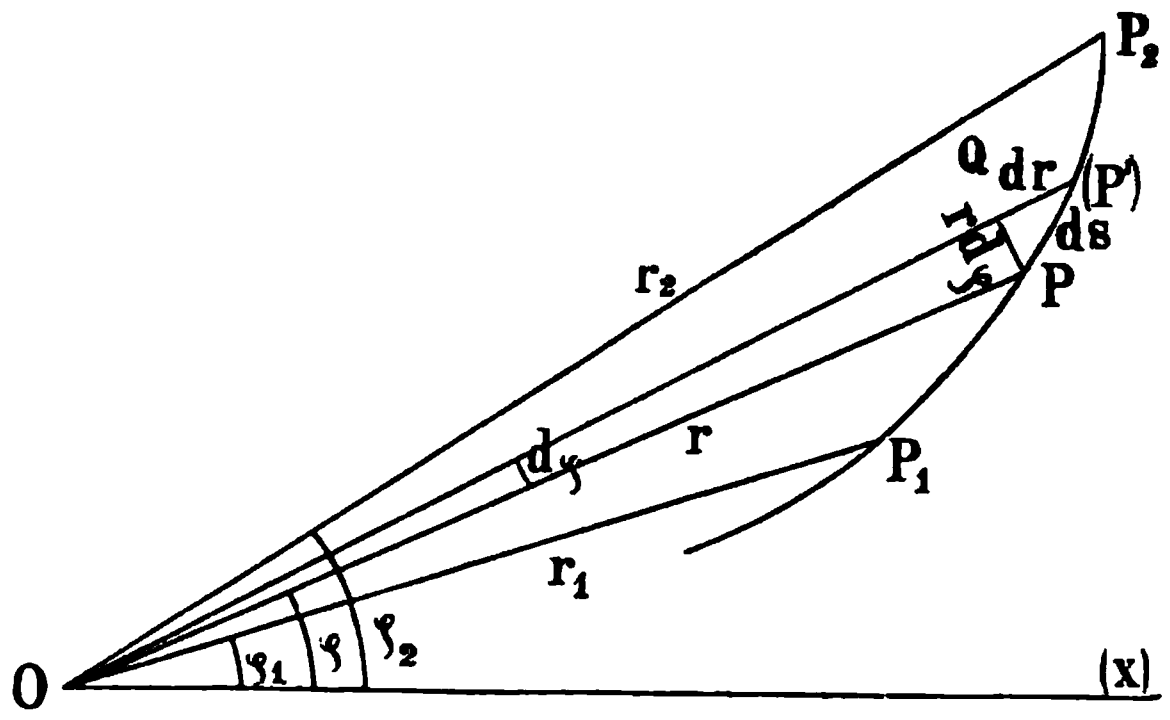
$$r = f(\varphi)$$

gegebenen Curve, und es soll die Fläche des Sectors $OP_1P_2$ berechnet werden.

Zerlegt man den Winkel $P_1 O P_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ in unbeschränkt viele Winkel von der Größe $d\varphi$, so entpricht jedem solchen Winkel

ein Sector von der Form POP'. Die Summe aller innerhalb $P_1OP_2$ gelegenen solchen Sectoren ist der gesuchten Fläche $P_1OP_2$ gleich.

Fig. 81.




Man kann nun mit unbeschränkter Annäherung statt des Sectors POP', welcher dem unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ entspricht, den Kreissector POQ setzen, dessen Fläche

$$dF = r\,d\varphi \cdot \frac{r}{2} = \frac{1}{2} r^2\,d\varphi$$

ist. Man nennt sie das **Flächendifferential** bei Anwendung der Polarcoordinaten.

Die gesuchte Fläche ergibt sich als Summe aller dieser Flächendifferentiale, welche in dem von zu den Amplituden $\varphi_1$ und $\varphi_2$ gehörenden Radienvectoren gebildeten Winkel liegen

$$F = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi.$$

**Beispiele:**

*1. Cardioide.*

Es soll die Fläche berechnet werden, welche von der Axe des Polarcoordinatensystems x (Fig. 82) und der durch ihre Gleichung in Polarcoordinaten

$$r = 2a \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

gegebenen Cardioide begrenzt wird.

Die gesuchte Fläche ist hier

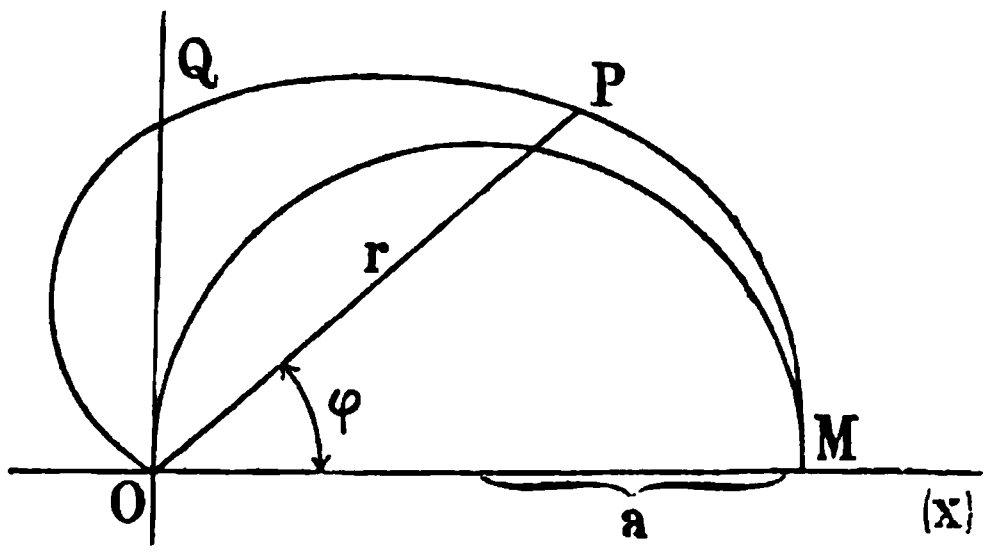
$$F = 2a^2 \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{\varphi}{2} \, d\varphi.$$

Substituiert man

$$\frac{\varphi}{2} = z \qquad d\varphi = 2\, dz,$$

so gehen die Grenzen in 0 und $\frac{\pi}{2}$ über und man hat

Fig. 82.




$$F = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 z \, dz = 4a^2 \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

(siehe bestimmte Integrale, Formel 114 und 113), also

$$F = \frac{3}{4} \pi a^2.$$

Die ganze von der Cardioide eingeschlossene Fläche ist demnach

$$2F = \frac{3}{2} \pi a^2,$$

d. h. $\frac{3}{2}$ der Fläche jenes Kreises, dessen Fußpunktscurve sie ist.

*2. Lemniscate.*

Es soll die von einer durch ihre Gleichung

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

gegebenen Lemniscate eingeschlossene Fläche berechnet werden.

Die Fläche des Sectors OMP (Fig. 83), welcher der Amplitude $\varphi$ entspricht, ist:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} r^2 \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\varphi} \cos 2\varphi \, d\varphi,$$

also

$$F = \frac{a^2}{2} \left[ \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\varphi} = \frac{a^2}{4} \sin 2\varphi.$$

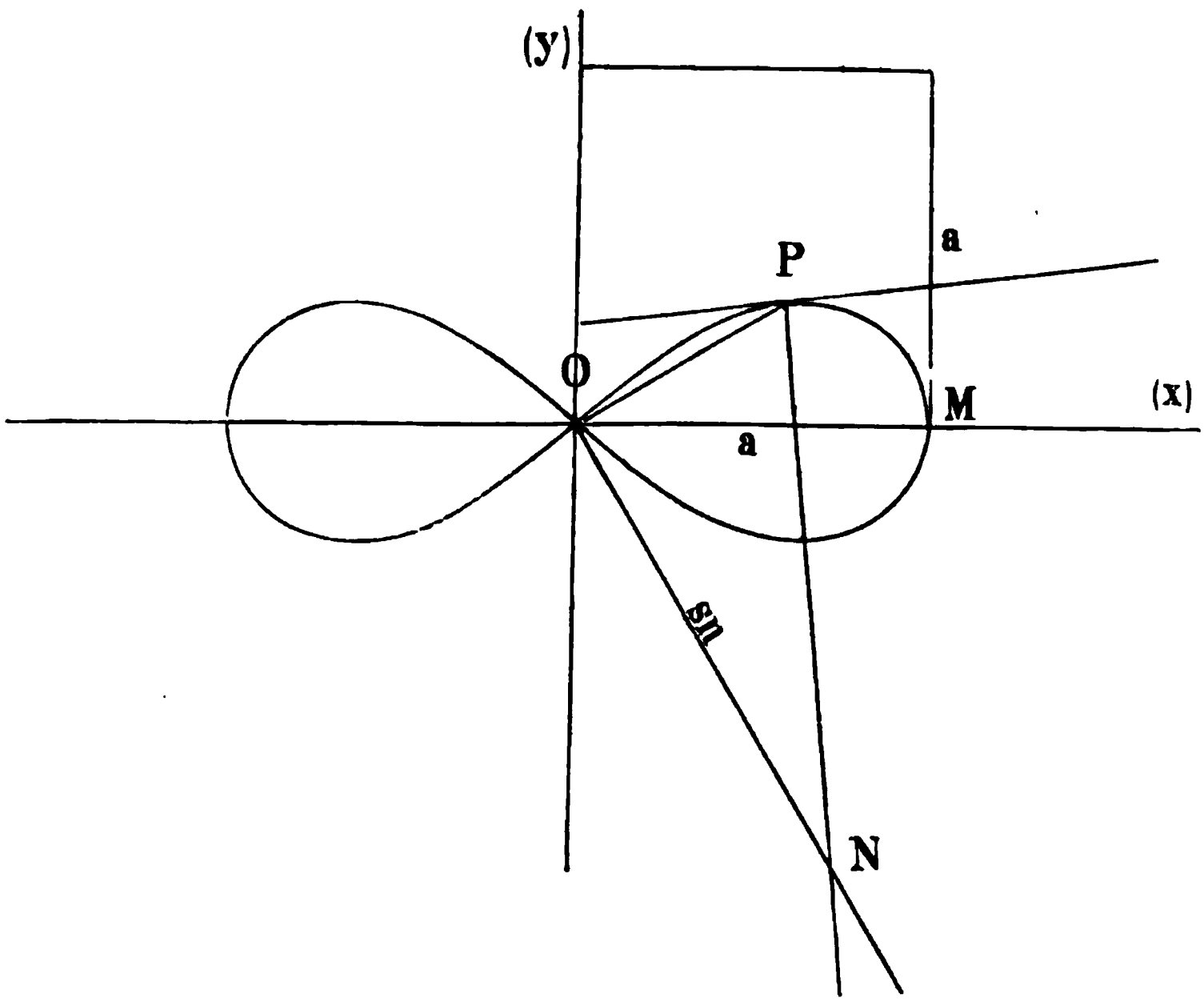
Nun folgt aber aus der Gleichung der Curve durch Differentiation:

$$r\, r' = -\, a^2 \sin 2\varphi,$$

und weil $r' = s\,n$, so ist, abgesehen vom Vorzeichen

$$F = \frac{r \,.\, s\,n}{4} = \frac{1}{2} \text{ area } OPN.$$

Fig. 83.




Die Fläche eines Quadranten der Lemniscate ergibt sich, wenn $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gesetzt wird,

$$4\,F_q = \frac{a^2}{4}.$$

Demnach ist die ganze von der Curve eingeschlossene Fläche

$$4\,F_q = a^2,$$

also gleich dem über dem Hauptradius a errichteten Quadrate.

## § 64. Näherungsweise Berechnung der Flächen und näherungsweise Berechnung des Wertes eines bestimmten Integrals.

Die Gleichung

$$y = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$$

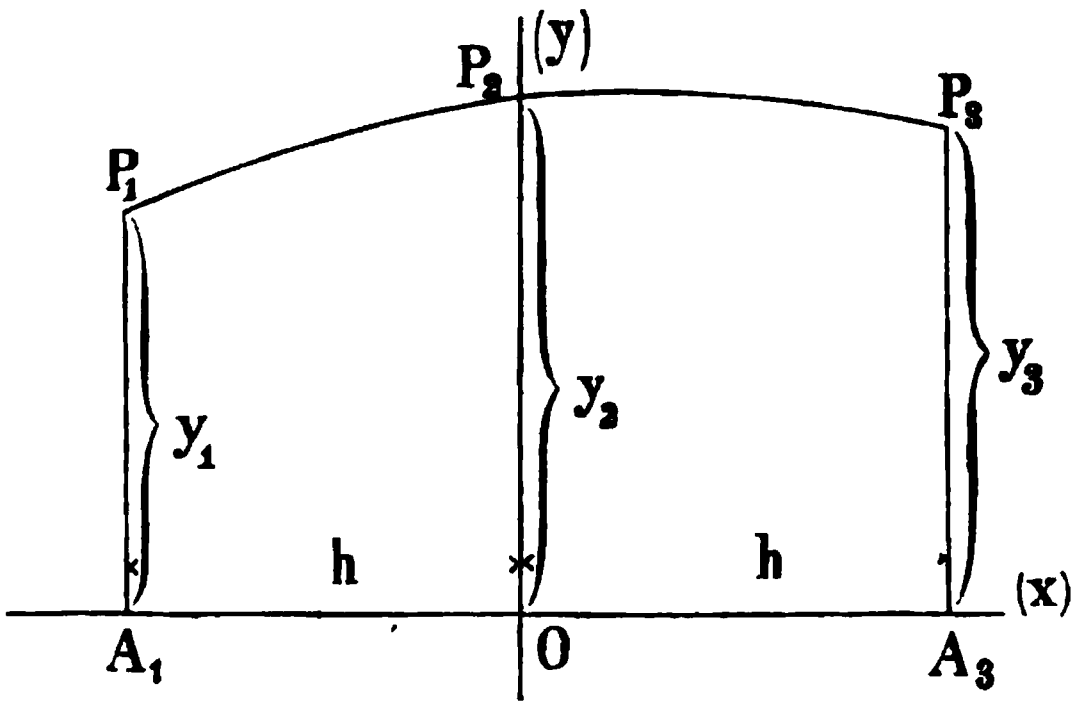
stellt eine Parabel vor, deren Axe parallel ist zur y-Axe.

Die Gleichung enthält drei Coefficienten, welche derart bestimmt werden können, dass die Curve durch drei gegebene Punkte geht.

Setzt man nämlich die Coordinaten der drei gegebenen Punkte successive in die Gleichung ein, so erhält man drei lineare Bedingungsgleichungen, aus welchen die Coefficienten $a_0$, $a_1$ und $a_2$ berechnet werden können.

Zunächst sei nun vorausgesetzt, dass die drei Punkte $P_1$, $P_2$ und $P_3$ (Fig. 84), durch welche die Curve geht, derart liegen, dass $P_2$ in die y-Axe fällt, während die anderen von dieser Axe um h abstehen.

Fig. 84.




In diesem Falle findet man die Fläche F der Figur $A_1 A_3 P_3 P_1$

$$F = \int_{-h}^{+h} y \, dx = \int_{-h}^{+h} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \, dx =$$

$$= \left[ a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} \right]_{-h}^{+h},$$

also

$$F = a_0 h + \frac{a_1 h^2}{2} + \frac{a_2 h^3}{3} - \left[ - a_0 h + \frac{a_1 h^2}{2} - \frac{a_2 h^3}{3} \right] =$$

$$= 2 a_0 h + \frac{2}{3} a_2 h^3$$

und schließlich:

$$F = \frac{h}{3} (6 a_0 + 2 a_2 h^2).$$

Da $P_1$, $P_2$ und $P_3$ Punkte der Parabel sind, müssen ihre Coordinaten der Gleichung der Parabel genügen, es bestehen also die Beziehungen:

$$y_1 = a_0 - a_1 h + a_2 h^2,$$
$$y_2 = a_0,$$
$$y_3 = a_0 + a_1 h + a_2 h^2.$$

Aus diesen findet man durch Addition, nach Multiplication der zweiten Gleichung mit 4

$$y_1 + 4 y_2 + y_3 = 6 a_0 + 2 a_2 h^2$$

und hat demzufolge

$$F = \frac{h}{3}(y_1 + 4 y_2 + y_3).$$

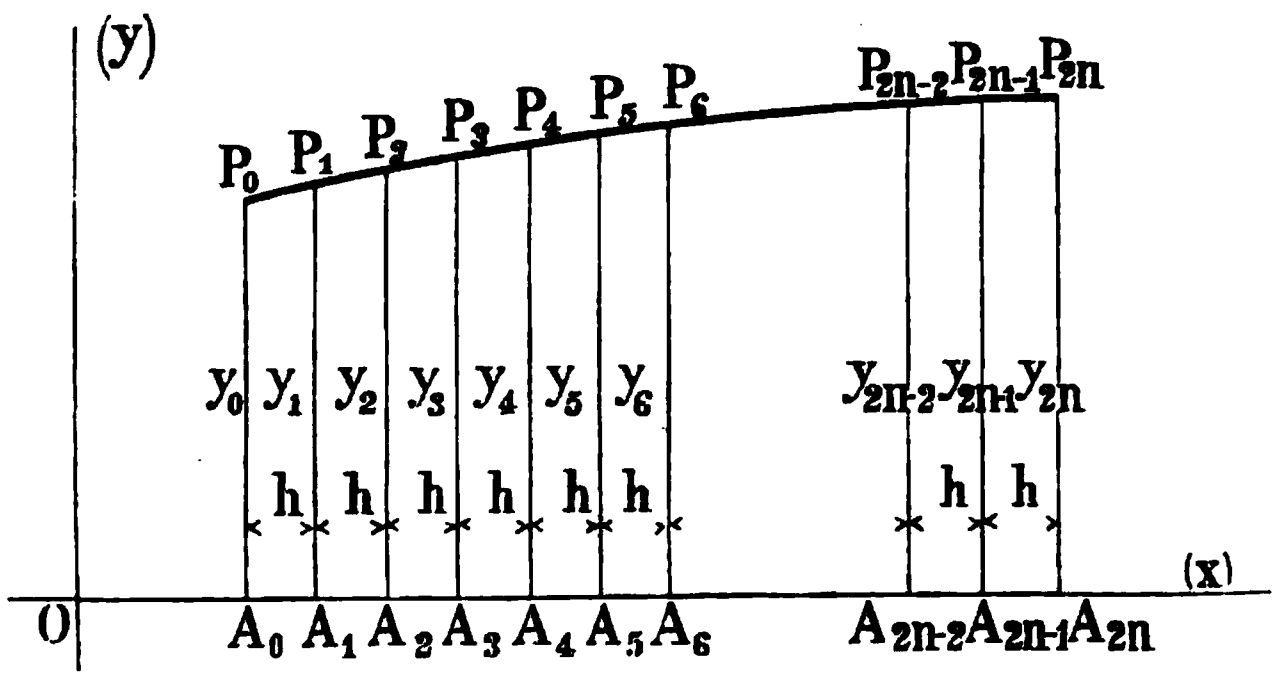
Diese Formel drückt die gesuchte Fläche durch die Größen h, $y_1$, $y_2$, $y_3$ aus, enthält daher außer den Ordinaten der Punkte $P_1, P_2, P_3$ nur den halben Abstand der Punkte $A_1, A_3$, gilt also auch dann, wenn der Punkt $P_2$ nicht in die y-Axe fällt, sondern eine beliebige Abscisse hat.

Sie bietet ein Mittel zur Berechnung der Fläche einer ganz willkürlichen Curve, deren Gleichung entweder unbekannt ist oder auf nicht integrable Flächendifferentiale führt.

Das hiezu von Simpson angegebene Verfahren sei an folgender Aufgabe dargestellt.

Es ist die Fläche zu bestimmen, welche von einer gezeichneten Curve $P_0 P_2 \ldots P_{2n}$ (Gleichung unbekannt) (Fig. 85), der x-Axe sowie den Ordinaten $A_0 P_0$ und $A_{2n} P_{2n}$ begrenzt wird.

Fig. 85.




Zur Lösung dieser Aufgabe theilt man die Strecke $A_0 A_{2n}$ in n gleiche Theile von der Breite 2h und führt in den Theilpunkten $P_2 P_4 P_6 \ldots$ die Ordinaten.

Diese Ordinaten zerlegen die zu bestimmende Fläche in n Parallelstreifen von der Breite 2h.

Führt man in den Parallelstreifen die Mittellinien, so bestimmen diese je einen Punkt der Curve, wie $P_1$, $P_3$, $P_5$ ...

Ersetzt man nun in jedem Parallelstreifen das denselben begrenzende Curvenstück durch den Parabelbogen einer Parabel, deren Axe parallel ist zur y-Axe und welche durch die angeführten drei Punkte des betreffenden Curvenstückes geht, so kann zur Berechnung der Flächen dieser modificierten Parallelstreifen die gefundene Formel

$$F = \frac{h}{3}(y_1 + 4\,y_2 + y_3)$$

angewendet werden.

Je kleiner h gewählt wurde, desto mehr schmiegt sich die substituierte Parabel der wirklichen Curve an, desto mehr nähert sich der Flächeninhalt des modificierten Parallelstreifens dem Flächeninhalte des thatsächlich gegebenen, d. h. desto genauer gibt die Formel den Inhalt eines derartigen Parallelstreifens.

Die Anwendung der Formel gibt für die Flächen der einzelnen Parallelstreifen:

$$A_0\,A_2\,P_2\,P_0 \qquad f_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4\,y_1 + y_2),$$

$$A_2\,A_4\,P_4\,P_2 \qquad f_2 = \frac{h}{3}(y_2 + 4\,y_3 + y_4),$$

$$A_4\,A_6\,P_6\,P_4 \qquad f_3 = \frac{h}{3}(y_4 + 4\,y_5 + y_6),$$

. . . . . .

$$A_{2n-2}\,A_{2n}\,P_{2n}\,P_{2n-2} \qquad f_n = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4\,y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Die Summe dieser Parallelstreifen liefert den Flächeninhalt der gegebenen Figur:

$$F = \frac{h}{3}[(y_0 + 4\,y_1 + y_2) + (y_2 + 4\,y_3 + y_4) + (y_4 + 4\,y_5 + y_6) + \ldots + (y_{2n-2} + 4\,y_{2n-1} + y_{2n})],$$

d. h.

$$F = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{2n-2})].$$

Diese unter dem Namen Simpsons Formel bekannte Gleichung ermöglicht die Berechnung der Fläche einer durch die Zeichnung ge-

gebenen Curve, deren Gleichung nicht bekannt ist, wobei die Ordinaten ihrer Punkte der Figur durch Messung entnommen werden.

Sie kann aber auch in Fällen benützt werden. in welchen die Integration des Flächendifferentials $y\,dx$ große Schwierigkeiten bereitet oder ganz unausführbar wird.

Der zuletzt angeführte Fall ihrer Anwendung gibt auch ein Mittel zur näherungsweisen Berechnung des Wertes eines bestimmten Integrals.

Ist nämlich das unbestimmte Integral der Differentialfunction in

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\,dx$$

in geschlossener Form nicht darstellbar, so theilt man das Integrationsintervall $x_{2n} - x_0$ in $2n$ Theile und erhält $\frac{x_{2n} - x_0}{2n} = h$, bestimmt sodann die Functionswerte:

$$y_0 = f(x_0) \quad y_1 = f(x_0 + h) \quad y_2 = f(x_0 + 2h) \ldots y_{2n} =$$
$$= f(x_0 + 2nh) = f(x_{2n}),$$

und hat dann, weil das bestimmte Integral die Fläche darstellt, welche von der Curve $y = f(x)$, der Abscissenaxe und den beiden Ordinaten $y_0 = f(x_0)$ und $y_{2n} = f(x_{2n})$ eingeschlossen wird, infolge Simpsons Formel:

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\frac{x_{2n} - x_0}{2n}\Big([f(x_0) + f(x_{2n})] +$$
$$+ 4[f(x_0 + h) + f(x_0 + 3h) + f(x_0 + 5h) + \ldots] +$$
$$+ 2[f(x_0 + 2h) + f(x_0 + 4h) + \ldots + f(x_0 + 2[n-2]h)]\Big).$$

Die Anwendung der Simpson'schen Formel zur Berechnung eines bestimmten Integrals soll, um gleichzeitig zu zeigen, dass sie schon bei ziemlich großem h sehr genaue Resultate liefert, an dem Integral

$$\int_1^5 5x^4\,dx,$$

dessen wirklicher Wert 3124 ist, demonstriert werden.

Nimmt man $2n = 4$, so ist im gegebenen Falle $h = \frac{5-1}{4} = 1$. also ziemlich groß, und man findet:

$$f(x_0) = f(1) = 5 \cdot 1$$
$$f(x_0 + h) = f(1 + 1) = f(2) = 5 \cdot 16$$
$$f(x_0 + 2h) = f(1 + 2) = f(3) = 5 \cdot 81$$
$$f(x_0 + 3h) = f(1 + 3) = f(4) = 5 \cdot 256$$
$$f(x_0 + 4h) = f(1 + 4) = f(5) = 5 \cdot 625$$

demnach

$$\int_1^5 5x^4 dx = \frac{5}{3}\left[626 + 4(16 + 256) + 162\right] = \frac{5}{3}1876 = \frac{9380}{3} = 3126{\cdot}6.$$

Der Fehler beträgt also bei dem ganz bedeutenden h 0·085%.

Für das Integral

$$\int_1^4 \frac{dx}{x} = \left[lx\right]_1^4 = l\,4 = 1{\cdot}38629$$

erhält man durch Anwendung der Simpson'schen Formel bei der Annahme

$$n = 6, \quad \text{also} \quad h = \frac{4 - 1}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{x} = \frac{1}{6}\left[1 + \frac{1}{4} + 4\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7}\right) + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\right] = 1{\cdot}3877.$$

## § 65. Rectification ebener Curven.

Unter der Rectification einer Curve versteht man die Bestimmung der Länge des zwischen zwei gegebenen Punkten gelegenen Curvenbogens.

Zur Lösung dieser Aufgabe theilt man den Bogen in eine unendlich große Zahl unendlich kleiner Bogentheile (Bogendifferentiale) und summiert dieselben durch Integration über die ganze Länge des Bogens.

I. Ist die Gleichung der Curve in rechtwinkligen Parallelcoordinaten gegeben

$$y = f(x),$$

so ist ein solcher unendlich kleiner Bogentheil (das Bogendifferential Fig. 86) gegeben durch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}.$$

also

$$1 + y'^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{l^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}},$$

mithin

$$ds = \sqrt{\frac{l^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\, dx = l^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx,$$

und man erhält für den Bogen MN

$$s = \text{arc } MN = l^{\frac{1}{3}} \int_0^l x^{-\frac{1}{3}} dx,$$

d. h.

$$s = l^{\frac{1}{3}} \left[\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right]_0^l = l^{\frac{1}{3}} \frac{l^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} l.$$

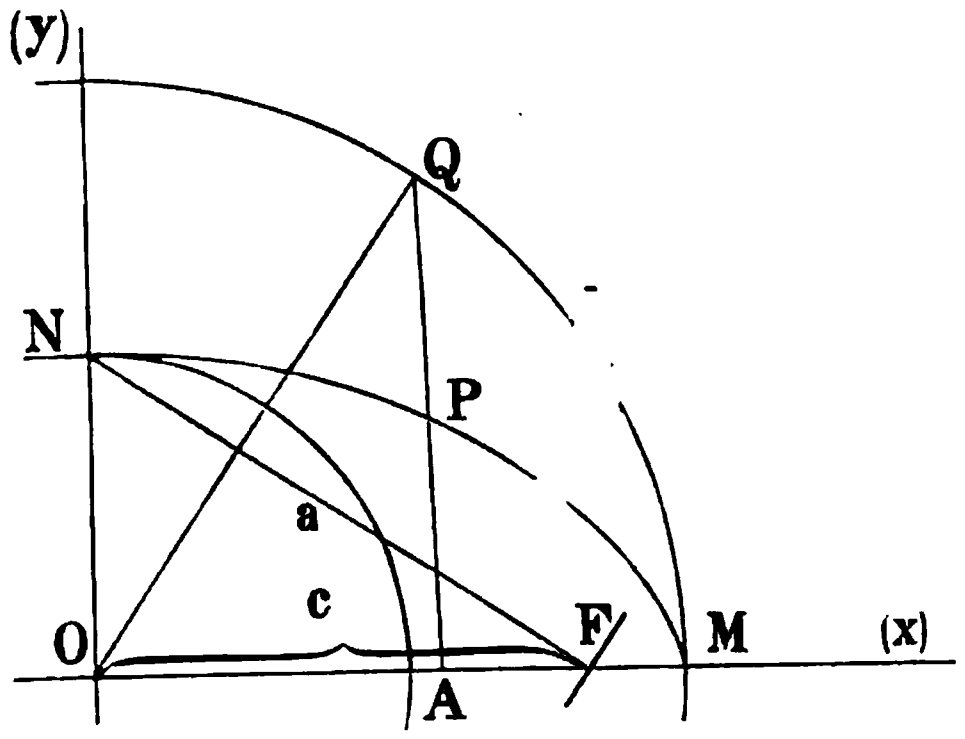
*3. Die Ellipse.*

Es ist der Umfang einer durch das Gleichungssystem

$$x = a \cos t,$$
$$y = b \sin t$$

gegebenen Ellipse zu bestimmen.

Fig. 89.




Der Umfang der Ellipse ist gleich der vierfachen Länge eines Quadranten MN (Fig. 89) derselben.

Durch Differentiation des Gleichungssystems erhält man:

$$dx = -a \sin t\, dt,$$
$$dy = b \cos t\, dt.$$

Demzufolge

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)\, dt^2,$$

also

$$ds = dt \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

Nach Einführung der linearen Excentricität c, welche sich aus $b^2 = a^2 - c^2$ ergibt, erhält man:

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + (a^2 - c^2)\cos^2 t}\, dt = \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t}\, dt$$

oder

$$ds = a\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\cos^2 t}\, dt.$$

Das Verhältnis $\frac{c}{a} = \varepsilon$ wird numerische Excentricität genannt und ist stets ein echter Bruch.

Durch Einführung von $\varepsilon$ erhält man schließlich:

$$ds = a\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt$$

und als Länge eines Ellipsenquadranten:

$$s = \text{arc } MN = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt.$$

Das hier auftretende Integral kann für keinen Wert der oberen Grenze in geschlossener Form dargestellt werden. Es ist das elliptische Integral zweiter Gattung; sein Wert kann durch Reihenentwicklung annähernd wie folgt bestimmt werden:

Weil $\varepsilon^2 \cos^2 t$ ein echter Bruch ist, so gibt die Entwicklung von $\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} = (1 - \varepsilon^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}}$ nach der Reihe von Newton eine convergente Reihe, und zwar

$$(1 - \varepsilon^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}} = 1 - \binom{\frac{1}{2}}{1}\varepsilon^2 \cos^2 t + \binom{\frac{1}{2}}{2}\varepsilon^4 \cos^4 t - \binom{\frac{1}{2}}{3}\varepsilon^6 \cos^6 t + \binom{\frac{1}{2}}{4}\varepsilon^8 \cos^8 t - \ldots$$

oder, da

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2},$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{1 \cdot 2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{2 \cdot 4},$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6},$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{4} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8},$$

. . . . . .

$$(1 - \varepsilon^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 t - \frac{1}{2.4}\varepsilon^4 \cos^4 t - \frac{1.3}{2.4.6}\varepsilon^6 \cos^6 t - \\ - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\varepsilon^8 \cos^8 t - \ldots$$

Multipliciert man nun auf beiden Seiten mit $dt$ und integriert zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so erhält man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt - \frac{1}{2.4}\varepsilon^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt - \\ - \frac{1.3}{2.4.6}\varepsilon^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t\, dt - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\varepsilon^8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 t\, dt - \ldots$$

Von den rechts auftretenden Integralen hat das erste den Wert $\frac{\pi}{2}$, die übrigen haben die Form:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx,$$

wobei n eine gerade Zahl ist. Der Wert eines solchen Integrals wurde bereits gefunden und ist:

$$\frac{1.3.5 \ldots n-1}{2.4.6 \ldots n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(siehe bestimmte Integrale, Formel 113).

Demnach hat man:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2.4}\varepsilon^4 \frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2} - \\ - \frac{1.3}{2.4.6}\varepsilon^6 \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\pi}{2} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\varepsilon^8 \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{\pi}{2} - \ldots$$

oder

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varepsilon^4\right)^2 - \ldots\right],$$

d. h. für die Länge des Ellipsenquadranten

$$s = \text{arc}\,MN = a\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varepsilon^4\right)^2-\ldots\right]$$

und schließlich für den Umfang der Ellipse:

$$U = 2a\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varepsilon^4\right)^2-\ldots\right].$$

Ist $\varepsilon$ sehr klein, d. h. nähert sich die Gestalt der Ellipse jener eines Kreises, so werden die höheren Potenzen von $\varepsilon$ im Vergleiche zur ersten Potenz sehr klein, und man kann, ohne einen bedeutenden Fehler zu begehen, die Glieder der Reihe vom dritten angefangen vernachlässigen.

Dadurch erhält man eine zur Berechnung des Umfanges der Ellipse gut brauchbare Näherungsformel:

$$U = 2a\pi\left[1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right].$$

Wird $\varepsilon = 0$, so geht die Ellipse in einen Kreis über. Die Glieder der Reihe verschwinden bis auf das erste und man erhält für den Kreisumfang richtig

$$u = 2a\pi.$$

*4. Die Cykloide.*

Es ist die Länge eines Bogens der gemeinen Cykloide zu bestimmen.

Aus dem Gleichungssystem dieser Curve

$$x = at - a\sin t,$$
$$y = a - a\cos t$$

folgt durch Differentiation:

$$dx = (a - a\cos t)\,dt = a(1-\cos t)\,dt,$$
$$dy = a\sin t\,dt,$$

mithin

$$\overline{ds^2} = \overline{dx^2} + \overline{dy^2} = a^2(1-\cos t)^2\,\overline{dt^2} + a^2\sin^2 t\,\overline{dt^2},$$
$$= a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)\,\overline{dt^2},$$
$$= 2a^2(1-\cos t)\,\overline{dt^2} = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}\,\overline{dt^2},$$

also

$$ds = 2a \sin \frac{t}{2} dt.$$

Demzufolge ist

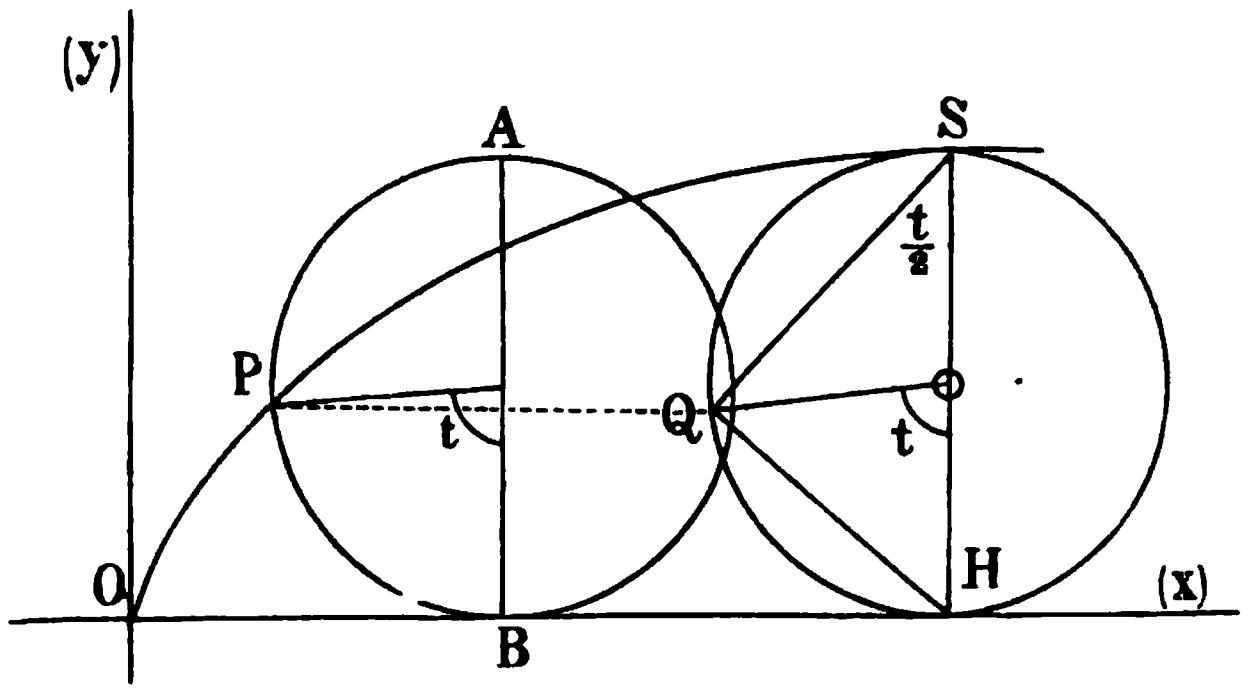
$$\text{arc } PS = 2a \int_t^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2a \left[ -2 \cos \frac{t}{2} \right]_t^{\pi},$$

$$\text{arc } PS = 4a \cos \frac{t}{2} = 2QS.$$

Um speciell den halben Cykloidenbogen arc OS (Fig. 90) zu bestimmen, hat man nur $t = 0$ zu setzen und erhält

$$\text{arc } OS = 4a.$$

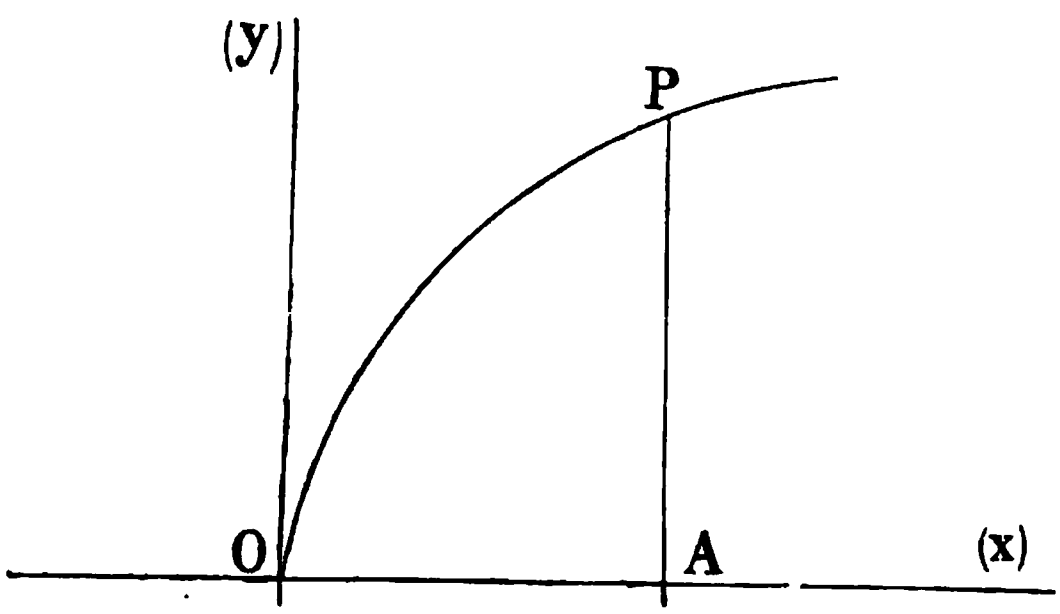
Fig. 90.




Der ganze Bogen der gemeinen Cykloide ist somit 8a.

*5. Die Parabel.*

Fig. 91.




Es ist die Länge des zwischen dem Scheitel und einem beliebigen Punkt P (Fig. 91) der Parabel gelegenen Bogens zu bestimmen.

Aus der Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2px$$

folgt durch Differentiation:

$$y\,y' = p, \quad \text{also} \quad y' = \frac{p}{y}.$$

Mithin ist

$$ds = \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}}\, dx.$$

Nimmt man y als die unabhängige Variable an, so muss der Ausdruck für das Bogendifferential entsprechend transformiert werden.

Es besteht offenbar die Gleichung

$$ds = \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}\frac{dx}{dy}}\, dy,$$

und weil

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{y}{p}.$$

auch

$$ds = \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}\frac{y}{p}}\, dy = \frac{1}{p}\sqrt{p^2 + y^2}\, dy.$$

Der zwischen dem Scheitel und dem Punkte mit der Ordinate y gelegene Parabelbogen ist somit gegeben durch:

$$s = \frac{1}{p}\int_0^y \sqrt{p^2 + y^2}\, dy,$$

also zufolge Formel 83a

$$s = \frac{1}{p}\left[\frac{y}{2}\sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p^2}{2} l(y + \sqrt{p^2 + y^2})\right].$$

*6. Die Tractorie.* (Fig. 92.)

Aus der bekannten Eigenschaft dieser Curve, dass das Tangentenstück constant ist,

$$t = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2} = a,$$

folgt, weil

$$\frac{y}{y'} = \frac{y\, dx}{dy}$$

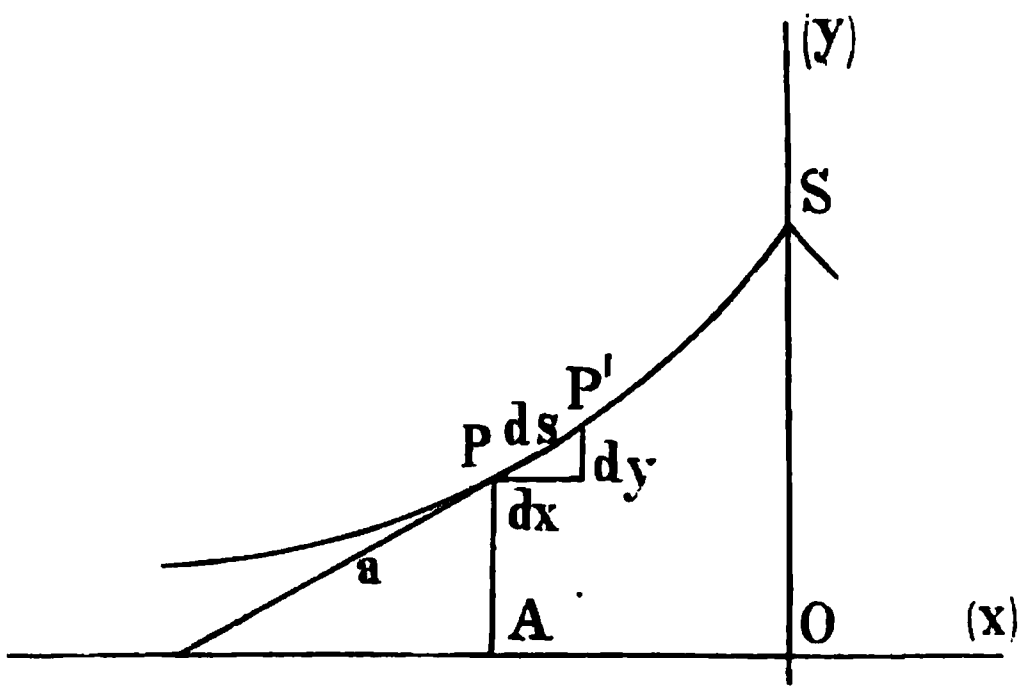
und

$$dx\sqrt{1 + y'^2} = ds,$$

$$\frac{y\, ds}{dy} = a$$

oder

Fig. 92.




$$ds = \frac{a}{y}\, dy.$$

Demnach ist

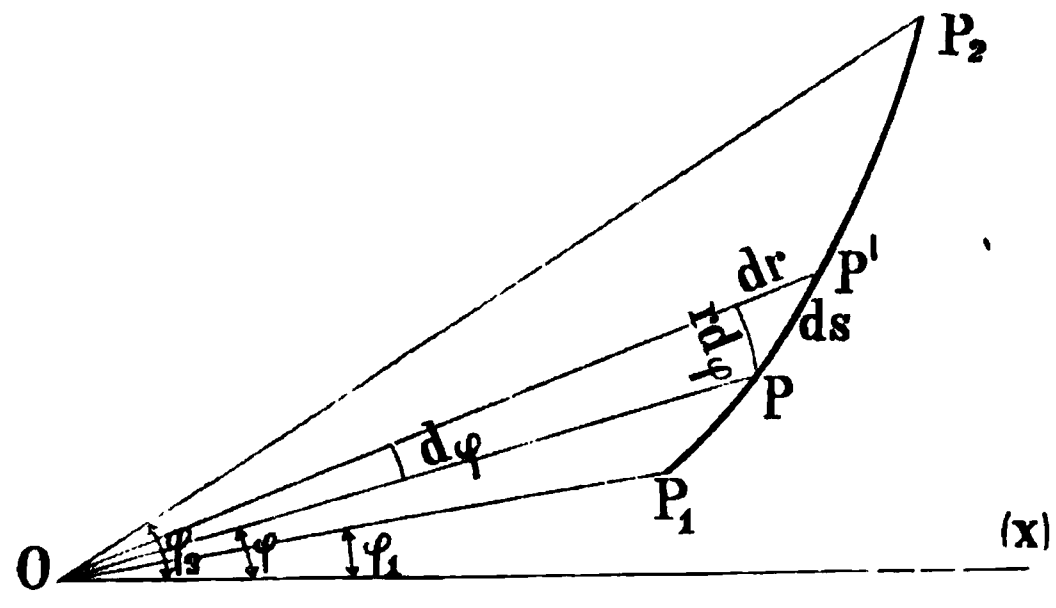
$$\text{arc}\,PS = a\int_y^a \frac{dy}{y} = a\Big[\,l\,y\,\Big]_y^a = a\,l.\frac{a}{y}.$$

Speciell für $a = 1$ erhält man

$$\text{arc}\,PS = l\frac{1}{y} = -\,l\,y.$$

II. Ist die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten gegeben, so ist das Bogendifferential

Fig. 93.




$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\varphi^2} = d\varphi\sqrt{r^2 + r'^2},$$

mithin der Bogen zwischen den Punkten $P_1$ und $P_2$ (Fig. 93), welchen die Amplituden $\varphi_1$ und $\varphi_2$ entsprechen:

$$\text{arc}\,P_1P_2 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\,\sqrt{r^2 + r'^2}.$$

**Beispiele:**

*1. Die logarithmische Spirale.*

Aus der Gleichung dieser Curve

$$r = m\,e^{a\varphi}$$

folgt:

$$r' = m\,a\,e^{a\varphi} = a\,r,$$

demnach

$$ds = d\varphi\sqrt{r^2 + r'^2} = r\sqrt{1 + a^2}\,d\varphi$$

oder

$$ds = m\,e^{a\varphi}\,d\varphi\sqrt{1 + a^2}.$$

Man findet also die Länge des zwischen den Punkten $P_0$ und $P$ gelegenen Bogens (Fig. 94)

$$\text{arc}\,P_0P = m\sqrt{1 + a^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{a\varphi}\,d\varphi,$$

also

$$\text{arc}\,P_0P = \frac{m}{a}\sqrt{1 + a^2}\,[e^{a\varphi} - e^{a\varphi_0}],$$

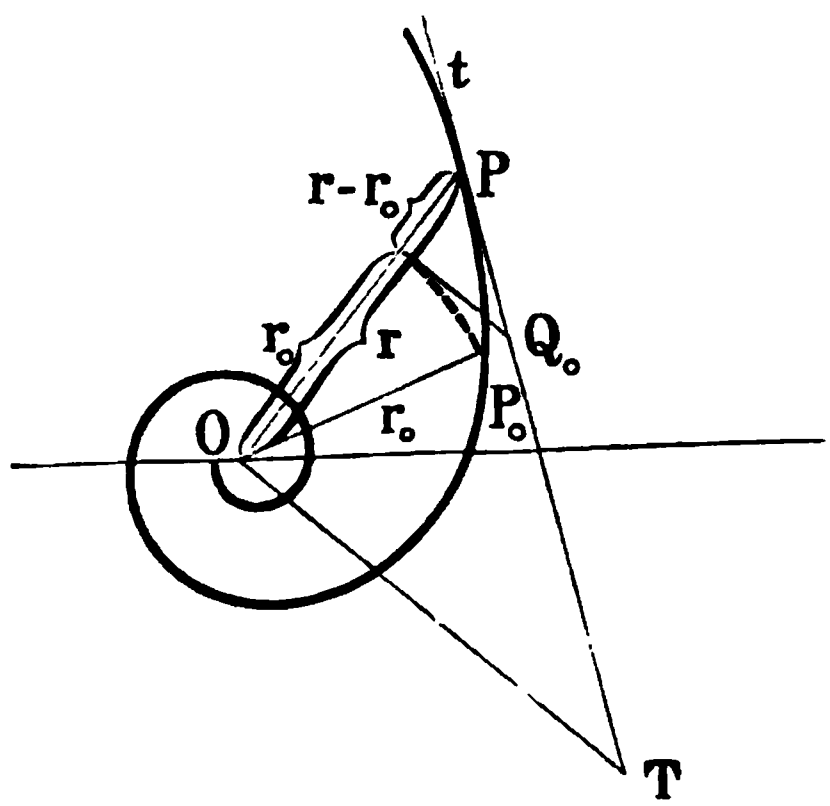
d. h.

$$\text{arc } P_0 P = \frac{r - r_0}{a}\sqrt{1 + a^2} = \frac{r - r_0}{\cos \theta} = Q_0 P.$$

Um die ganze Länge des Bogens zu erhalten, welcher zwischen dem Ursprung O, den die Curve in unendlich vielen Windungen umkreist, und dem Punkte P läuft, hat man nur $r_0 = 0$ zu setzen und findet:

$$s = \text{arc } OP = \frac{r}{a}\sqrt{1 + a^2}.$$

Fig. 94.




Der zwischen dem Ursprung und dem Punkte P gelegene Curvenbogen der logarithmischen Spirale ist gleich der Polartangente in diesem Punkte

$$s = \text{arc } OP = TP.$$

Denn es ist

$$OT = s\,t = \frac{r}{a},$$

$$PT = \sqrt{OT^2 + OP^2} = \sqrt{\frac{r^2}{a^2} + r^2} = \frac{r}{a}\sqrt{1 + a^2}.$$

*2. Die Cardioide.*

Aus der Gleichung der Curve

$$r = a\,(1 + \cos\varphi)$$

erhält man:

$$r' = -\,a \sin\varphi,$$

also

$$r^2 + r'^2 = a^2\,(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2\,a^2\,(1 + \cos\varphi)$$

oder

$$r^2 + r'^2 = 4\,a^2 \cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

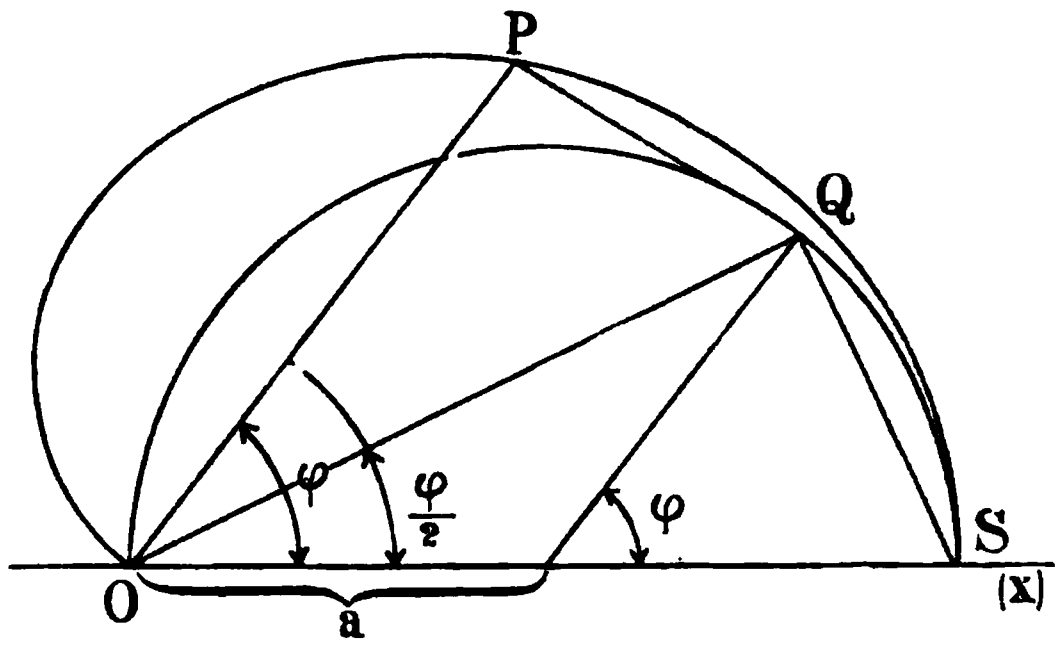
Demnach ist das Bogendifferential

$$d\,s = 2\,a \cos\frac{\varphi}{2}\,d\,\varphi$$

und der zwischen den Punkten S und P (Fig. 95) gelegene Bogen

$$\text{arc PS} = 2\,a \int_0^{\varphi} \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 2\,a\left[2\sin\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\varphi},$$

Fig. 95.




also

$$\text{arc SP} = 4\,a \sin\frac{\varphi}{2} = 2\,\text{SQ}.$$

Will man den halben Umfang der Cardioide bestimmen, so hat man nur $\varphi = \pi$ zu setzen und erhält:

$$\text{arc SPO} = 4\,a.$$

Der ganze Umfang dieser Curve ist demnach 8 a.

## § 66. Rectification unebener Curven.

Die Curve ist gegeben entweder durch die Parametergleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

oder als Schnittlinie zweier Flächen durch das Gleichungssystem

$$F_1(x, y, z) = 0; \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Der Punkt P (Fig. 96) habe die Coordinaten x, y, z, sein Nachbarpunkt die Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; das Bogendifferential ist also als Entfernung dieser beiden Punkte:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Führt man wieder die Bezeichnungen ein

$$\frac{dx}{dt} = x' = \varphi'(t), \quad \frac{dy}{dt} = y' = \psi'(t), \quad \frac{dz}{dt} = z' = \chi'(t),$$

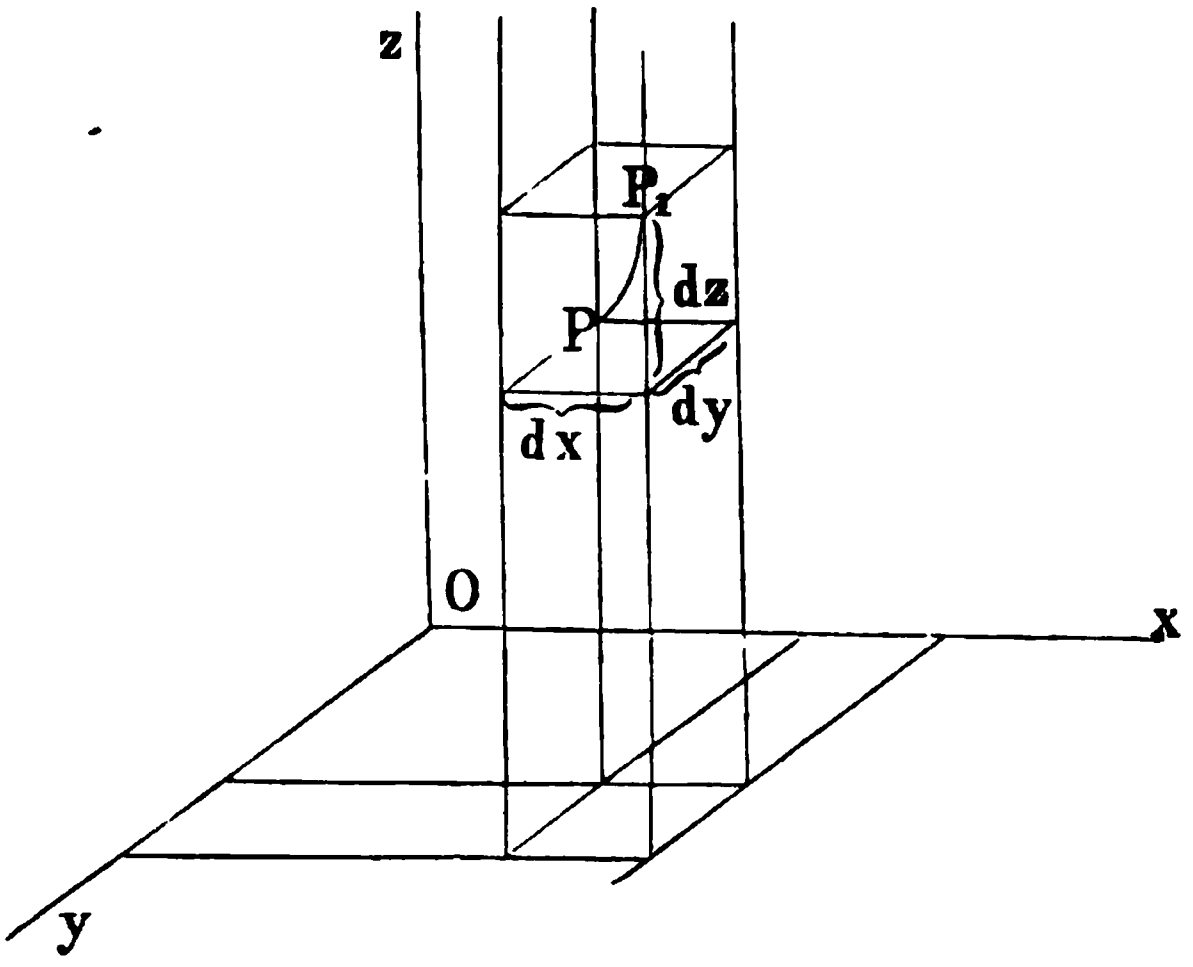
so ist

$$dx = x'dt, \quad dy = y'dt, \quad dz = z'dt,$$

also

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,.\,dt.$$

Fig. 96.




Daraus folgt durch Integration die Länge des Bogens:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,.\,dt.$$

**Beispiel:**

Die Schraubenlinie sei gegeben durch ihre Gleichungen:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = a\,t\,\operatorname{cotg}\delta.$$

Durch Differentiation erhält man:

$$x' = -a\sin t, \quad y' = a\cos t, \quad z' = a\operatorname{cotg}\delta,$$

also

$$ds = \sqrt{a^2(1 + \operatorname{cotg}^2\delta)}\,.\,dt = a\operatorname{cosec}\delta\,.\,dt = \frac{a}{\sin\delta}\,dt.$$

Durch Integration findet man:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \frac{a}{\sin\delta}\,.\,dt = \frac{a}{\sin\delta}(t_2 - t_1).$$

Für eine volle Windung ist

$$s = \int_0^{2\pi} \frac{a}{\sin\delta}\,.\,dt = \frac{2a\pi}{\sin\delta}.$$

# 5. Abschnitt.

## Cubatur krummer Flächen.

Unter der Cubatur einer krummen Fläche versteht man die Bestimmung des Volumens eines Körpers, welcher ganz oder theilweise von dieser Fläche begrenzt wird.

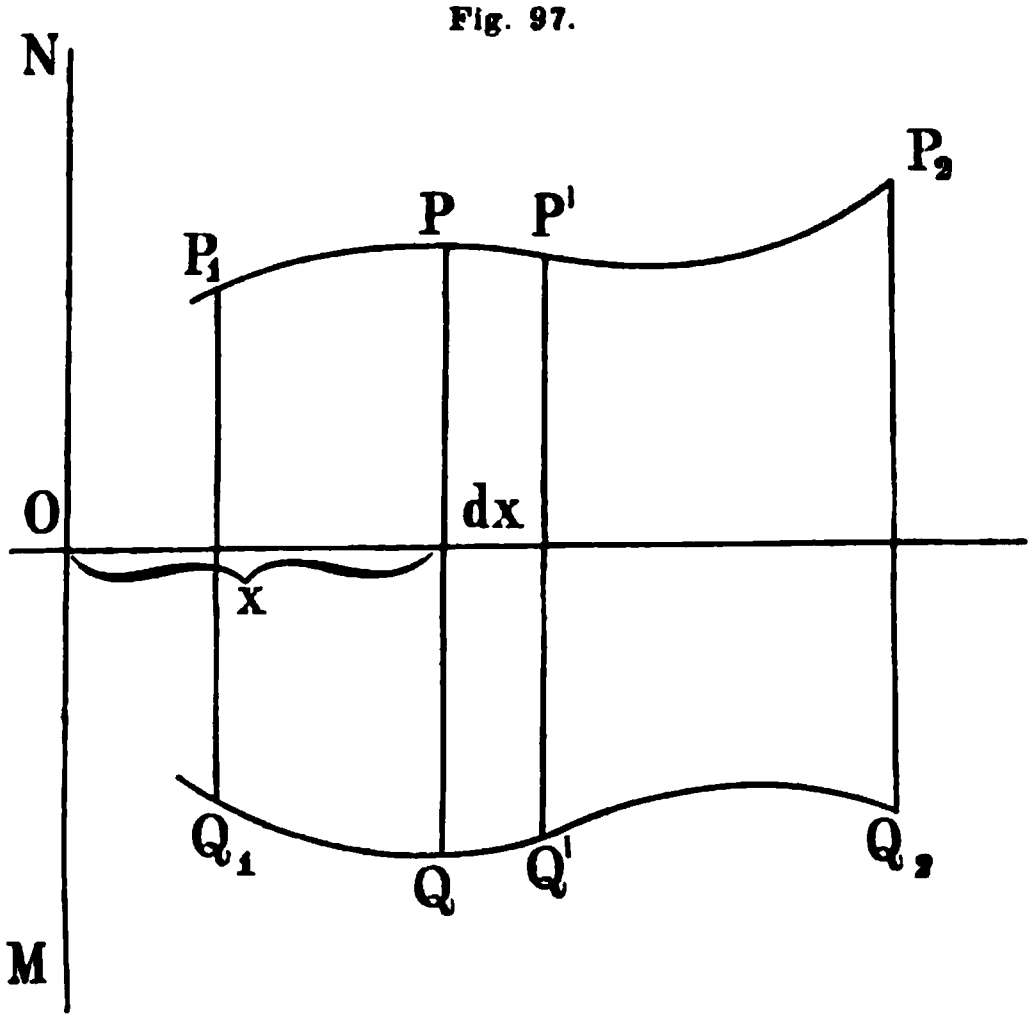
In vielen Fällen ist diese Aufgabe durch eine einzige Integration lösbar und diese Fälle sollen zunächst behandelt werden.

### § 67. Cubatur krummer Flächen durch einmalige Integration.

Ist ein Körper derart beschaffen, dass die Flächeninhalte aller durch parallele Ebenen hervorgerufenen Querschnitte als Functionen des senkrechten Abstandes x dieser Querschnittebenen von einer festen Ebene ausgedrückt werden können, so kann das Volumen dieses Körpers stets durch ein einfaches Integral dargestellt werden.

Hiebei ist es nicht nothwendig, dass der Körper nur von einer Fläche begrenzt wird, es braucht nicht einmal die Begrenzungsfläche analytisch durch eine Gleichung gegeben sein, es genügt, wenn hinreichend Anhaltspunkte vorhanden sind, auf Grund welcher die Querschnittsfläche jedes zu einer beliebigen aber festen Ebene parallelen Querschnittes als Function seines Abstandes von derselben ausgedrückt werden kann.

Fig. 97.




Ist nämlich die Fläche eines beliebigen zur Ebene MN (Fig. 97 (diese soll zur yz-Ebene gewählt werden) parallelen Querschnittes PQ als Function seines Abstandes x von dieser Ebene ausdrückbar, so wird sie allgemein durch

$$F_x = \varphi(x)$$

dargestellt.

Zerlegt man den Körper durch in den Abständen $dx$ geführte, zur Ebene MN parallele Ebenen in eine unbeschränkt große Zahl unendlich dünner Lamellen, so kann eine derartige Lamelle ($PQQ'P'$) als ein Cylinder von der Basis $F_x$ und der Höhe $dx$ angesehen werden.

Das Volumen einer Lamelle ist sonach mit unbeschränkter Genauigkeit gegeben durch

$$dV = F_x\,dx = \varphi(x)\,dx$$

und wird das Elementarvolumen oder Volumelement genannt.

Die Summe aller Lamellen gibt das Volumen des Körpers, mithin ist das Volumen des zwischen den in Abständen $x_1$ und $x_2$ von der Ebene MN geführten Querschnitten $P_1Q_1$ und $P_2Q_2$ befindlichen Körpertheiles:

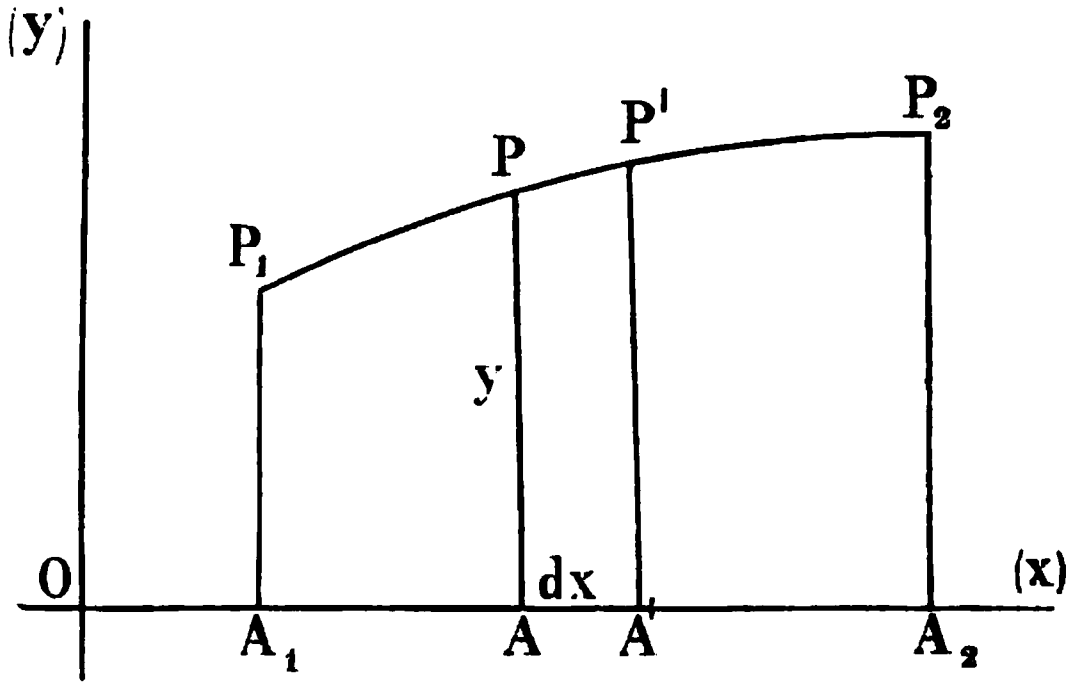
$$V = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx.$$

*1. Cubatur von Rotationsflächen.*

Eine Rotationsfläche entsteht durch die Rotation eines Curvenbogens um eine Gerade als Rotationsaxe.

Das um die x-Axe rotierende Curvenstück $P_1P_2$ (Fig. 98) erzeugt eine Rotationsfläche, die Ordinaten $A_1P_1$ und $A_2P_2$ erzeugen Kreisflächen. Es soll das Volumen des von diesen drei Flächen begrenzten Körpers berechnet werden.

Fig. 98.




Eine beliebige Ordinate $AP$ erzeugt bei der Rotation einen Querschnitt des Rotationskörpers. Die Fläche dieses Querschnittes ist als Kreisfläche eines Kreises vom Radius y gegeben durch

$$F_x = y^2\pi.$$

Ist die Gleichung der Curve $P_1P_2$

$$y = f(x),$$

so hat man

$$F_x = \pi\,[f(x)]^2,$$

also als Volumelement

$$dV = F_x\,dx = \pi\,[f(x)]^2\,dx.$$

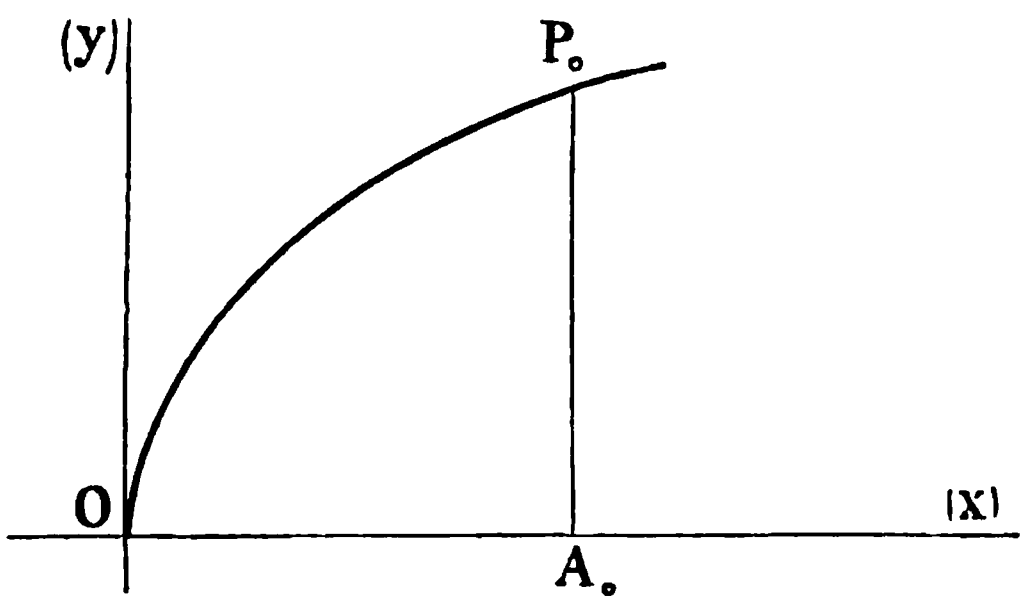
Mithin das gesuchte Volumen

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2\,dx.$$

**Beispiele:**

1. Das Rotationsparaboloid.

Fig. 99.




Die rotierende Curve sei eine Parabel (Fig. 99) mit der Gleichung

$$y^2 = 2\,p\,x.$$

Es soll das Volumen des vom Scheitel (Ursprung) bis zu dem von der Ordinate $A_0 P_0$ bestimmten Querschnitte (Abscisse $x_0$) reichenden Körpers berechnet werden.

Man erhält:

$$V = \pi \int_0^{x_0} y^2\,dx = \pi \int_0^{x_0} 2\,p\,x\,dx = \pi\,.\,2\,p\,\frac{x_0^2}{2} = \frac{1}{2}\,x_0\,2\,p\,x_0.$$

$$V = \frac{1}{2}\,x_0\,\pi\,y_0^2,$$

$\pi\,y_0^2$ ist die Fläche des kreisförmigen Endquerschnittes daher ist $V$ das halbe Volumen des auf diesem Querschnitte stehenden senkrechten Kreiscylinders von der Höhe $x_0$.

2. Das Rotationsellipsoid.

Die rotierende Curve ist eine Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Es ist das Volumen des durch ihre Rotation um die x-Axe entstehenden Ellipsoides zu berechnen.

Aus der Gleichung der Curve folgt:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - x^2).$$

Mithin ist

$$V = \pi \int_{-a}^{+a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left\{a^2 x - \frac{x^3}{3}\right\}_0^a.$$

$$V = \frac{4\pi a b^2}{3}.$$

Sind die Halbaxen einander gleich ($a = b$), so geht das Ellipsoid in eine Kugel über und das Volumen in

$$V_k = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

3. Es ist das Volumen des Körpers zu berechnen, welcher durch die Rotation einer Cykloide um ihre Basis entsteht.

Aus dem Gleichungssystem der Cykloide

$$x = a(t - \sin t),$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

folgt:

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt$$

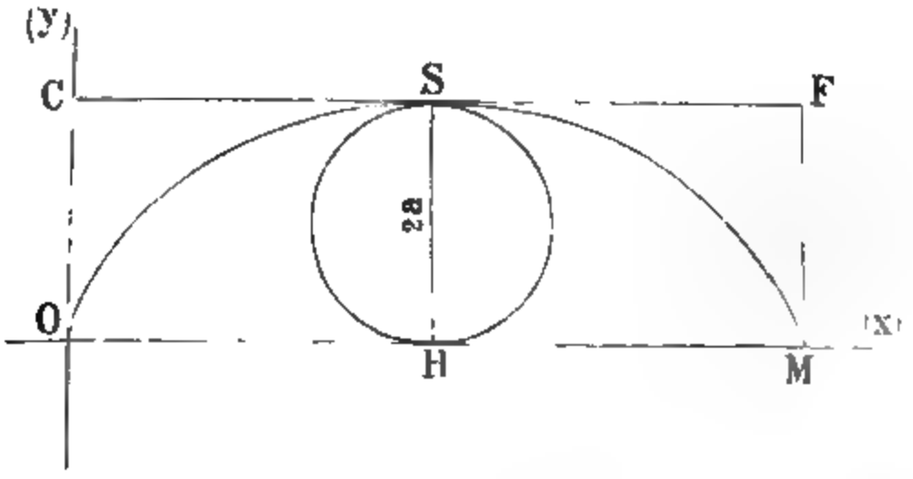
$$y^2\,dx = a^2(1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t)\,dt = a^3(1 - \cos t)^3\,dt,$$

also

$$y^2\,dx = a^3\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^3 dt = 8a^3\sin^6\frac{t}{2}\,dt.$$

Der von der Ordinate HS bestimmte Querschnitt (Fig. 100), für welchen $t = \pi$ ist, halbiert das zu bestimmende Volumen.

Fig. 100.




Das halbe Volumen ist demnach

$$\frac{V}{2} = 8a^3\pi\int_0^{\pi}\sin^6\frac{t}{2}\,dt.$$

also das ganze Volumen:

$$V = 16\,a^3\pi\int_0^{\pi}\sin^6\frac{t}{2}\,dt.$$

Setzt man $\frac{t}{2} = z$, also $dt = 2\,dz$, so sind 0 und $\frac{\pi}{2}$ die neuen Integrationsgrenzen und man erhält:

$$V = 32\,a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 z\,dz$$

also schließlich zufolge Formel (113

$$V = 32\,a^3\pi\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} = 5\,a^3\pi^2.$$

Das der Cykloide umschriebene Rechteck OMFG hat die Seiten $2a$ und $2a\pi$. Dasselbe erzeugt bei der Rotation einen Cylinder vom Volumen

$$V_1 = 4\,a^2\pi\,.\,2\,a\,\pi = 8\,a^3\pi^2.$$

Daraus folgt:

$$V = \frac{5}{8}V_1.$$

4. Die Tractorie rotiert um die x-Axe. Es ist das Volum des von ihr erzeugten, entlang der x-Axe beiderseits ins Unendliche verlaufenden Rotationskörpers zu berechnen.

Aus dem charakteristischen Kennzeichen der Tractorie

$$t = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2} = a$$

folgt:

$$\frac{y^2}{y'^2}(1 + y'^2) = a^2$$

oder

$$\frac{y^2}{y'^2} = a^2 - y^2,$$

$$\frac{y\,dx}{dy} = \sqrt{a^2 - y^2},$$

$$y\,dx = \sqrt{a^2 - y^2}\,dy,$$

und wenn man beiderseits mit y multipliciert

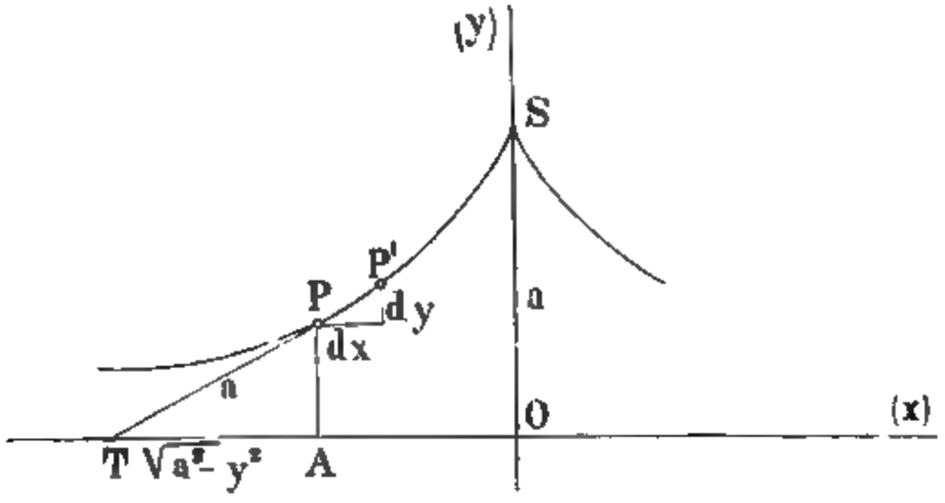
$$y^2\,dx = y\sqrt{a^2 - y^2}\,dy.$$

Demnach ist das gesuchte Volumen

$$V = 2\pi \int_0^a y\sqrt{a^2 - y^2}\,dy.$$

Der Factor 2 vor dem Integralzeichen muss angesetzt werden, weil sonst nur das Volumen des halben Körpers erhalten würde. (Fig. 101.)

Fig. 101.




Zur Durchführung der Integration substituiert man am besten

$$a^2 - y^2 = u^2,$$

$$-y\,dy = u\,du;$$

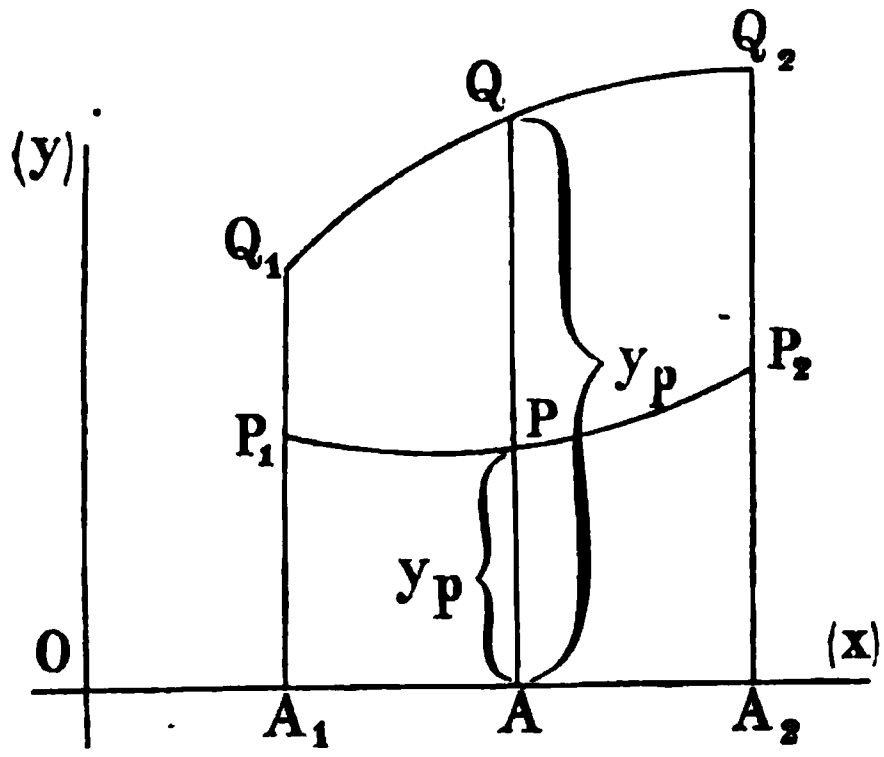
hiebei gehen die Grenzen in a und 0 über, man erhält daher:

$$V = -2\pi \int_a^0 u^2\,du = 2\pi \int_0^a u^2\,du = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

Trotzdem sich also dieser Körper nach zwei Seiten ins Unendliche erstreckt, ist sein Volumen dennoch endlich, und zwar halb so groß als das Volumen einer Kugel vom Radius a.

5. Durch die Rotation des gemischtlinigen Viereckes $P_1 P_2 Q_2 Q_1$ (Fig. 102) entsteht ein hohler Rotationskörper. F ist das Volumen desselben zu berechnen.

Fig. 102.




Das Volumen dieses Körpers ist gleich der Differenz der Volumina der beiden Körper, welche durch die Rotation der Figuren $A_1 Q_1 Q_2 A_2$ und $A_1 P_1 P_2 A_2$ entstehen.

Sind die Curven $Q_1 Q_2$ und $P_1 P_2$ durch die Gleichungen

$$y_q = Q(x),$$
$$y_p = P(x)$$

gegeben, so hat man die Volumina der zuletzt angeführten Rotationskörper:

$$V_q = \pi \int_{x_1}^{x_2} y_q^2 \, dx,$$

$$V_p = \pi \int_{x_1}^{x_2} y_p^2 \, dx.$$

Mithin ist das gesuchte Volumen:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y_q^2 \, dx - \pi \int_{x_1}^{x_2} y_p^2 \, dx,$$

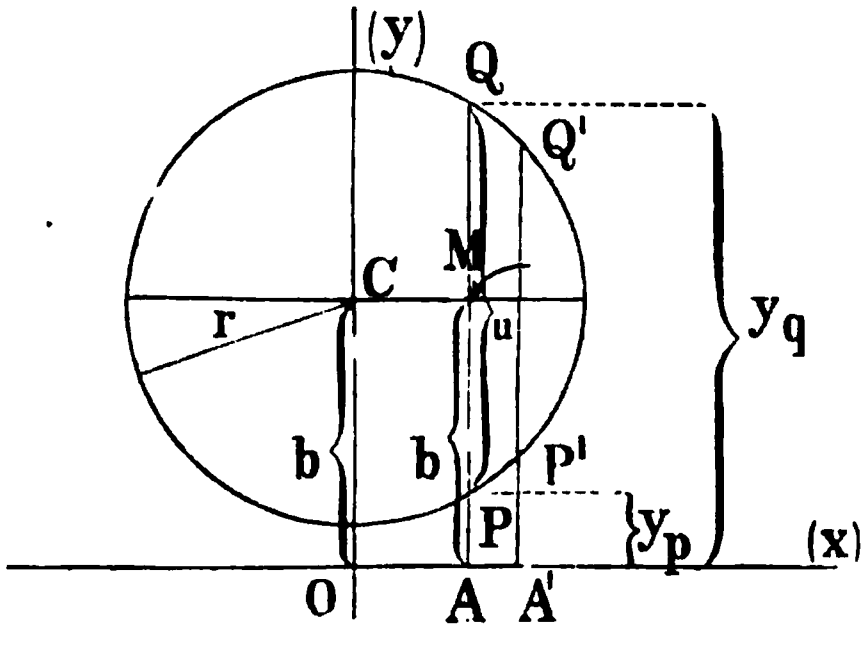
d. h.

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} (y_q^2 - y_p^2) \, dx.$$

Diese Aufgabe soll in folgenden zwei Beispielen an speciellen Fällen vorgeführt werden.

## 6. Der Kreiswulst.

Fig. 103.




Ein Kreis vom Radius r (Fig. 103), dessen Mittelpunkt im Abstande $b > r$ vom Ursprung auf der y-Axe liegt, rotiert um die x-Axe. Es ist das Volumen des dadurch entstehenden Kreiswulstes zu berechnen.

Man findet mit Rücksicht auf die frühere Aufgabe

$$V = \pi \int_{-r}^{+r} (y_q^2 - y_p^2) \, dx.$$

Da aber

$$\frac{y_q + y_p}{2} = b \qquad \text{(weil M Mitte von PQ)},$$

also

$$y_q + y_p = 2\,b,$$

so ist, wenn man

$$y_q - y_p = u$$

setzt:

$$y_q^2 - y_p^2 = (y_q + y_p)\,(y_q - y_p) = 2\,b\,u.$$

Demnach

$$V = \pi \int_{-r}^{+r} 2\,b\,u\,dx = 2\,\pi\,b \int_{-r}^{+r} u\,dx.$$

Nun stellt aber $u\,dx$ das Flächenelement des rotierenden Kreises vor, es ist somit

$$\int_{-r}^{+r} u\,dx$$

der Flächeninhalt dieses Kreises also gleich $r^2\pi$.

Demzufolge hat man schließlich als Volumen des Kreiswulstes

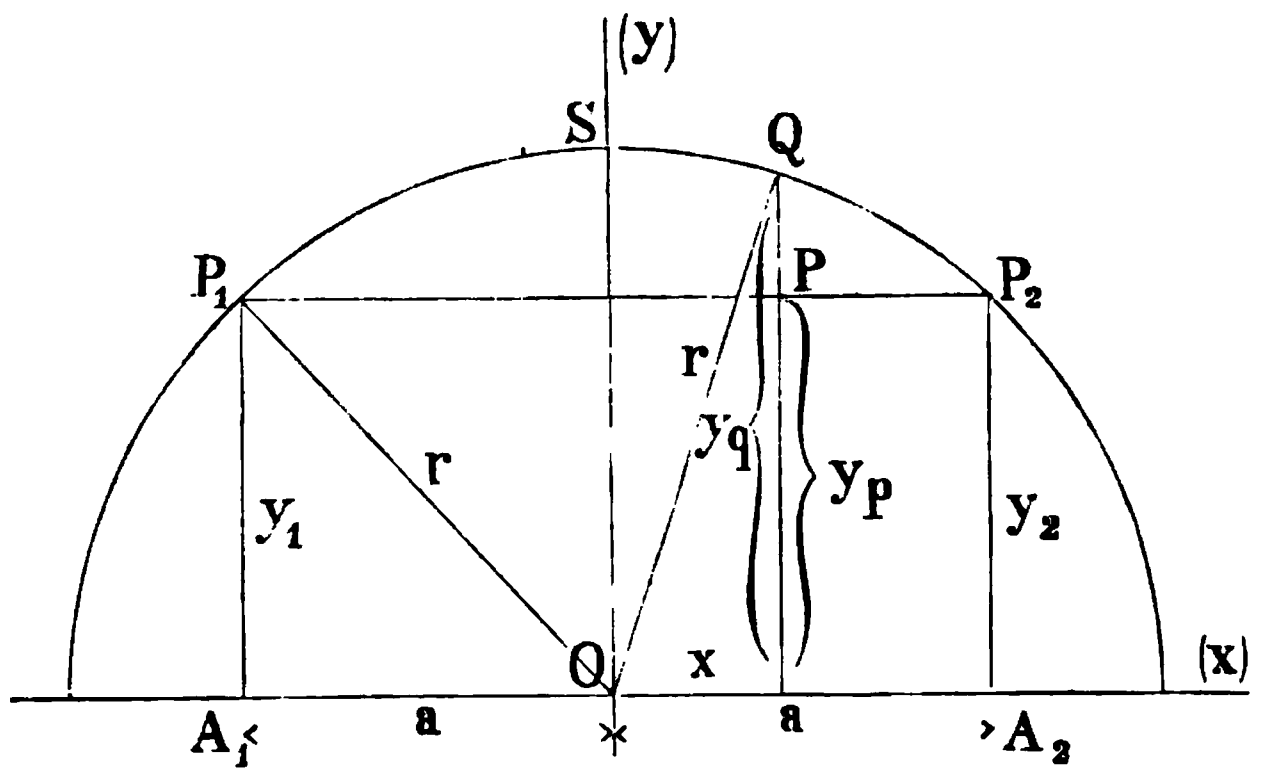
$$V = 2\,\pi\,b\,.\,r^2\pi.$$

$2\,\pi\,b$ ist der Umfang eines Kreises vom Radius b, also der Weg, den der Mittelpunkt des rotierenden Kreises beschreibt. Das Volumen des Kreiswulstes ist somit gleich jenem eines Kreiscylinders, dessen Basis der rotierende Kreis und dessen Höhe der von seinem Mittelpunkt zurückgelegte Weg ist.

### 7. Die durchlochte Kugel.

Ein Kreisabschnitt $P_1\,P_2\,S\,P_1$ (Fig. 104) vom Radius r, dessen

Fig. 104.




Mittelpunkt im Ursprung liegt und dessen Sehne $P_1\,P_2 = 2\,a$ parallel ist zur x-Axe, rotiert um die x-Axe.

Hiedurch entsteht ein ringförmiger Körper, der auch als eine cylindrisch durchlochte Kugel angesehen werden kann.

Das Volumen dieses Körpers ist zu bestimmen.

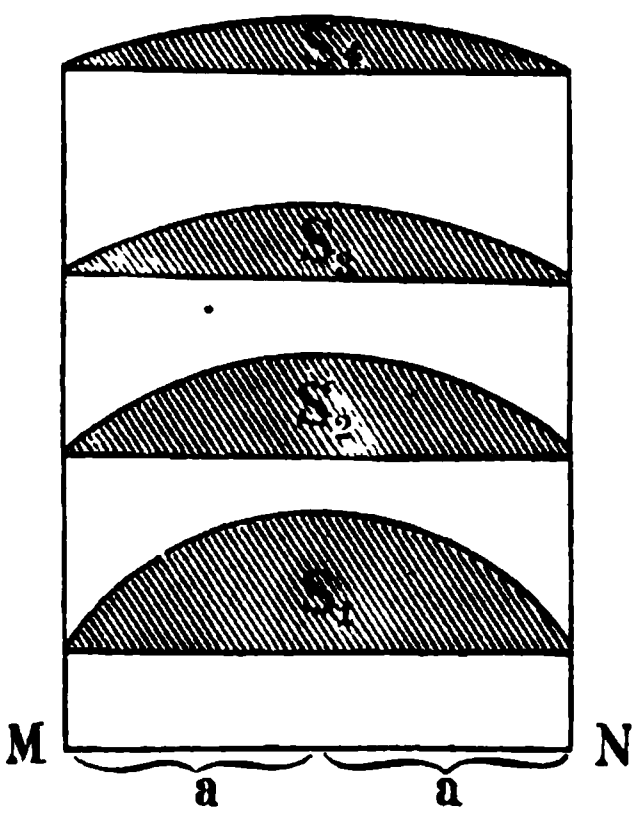
Man findet:

$$V = \pi \int_{-a}^{+a} (y_q^2 - y_p^2)\, dx,$$

und weil

$$y_q^2 = r^2 - x^2,$$
$$y_p^2 = r^2 - a^2,$$
$$y_q^2 - y_p^2 = a^2 - x^2,$$

Fig. 105.




$$V = \pi \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\, dx = \pi \left[ a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{+a}.$$

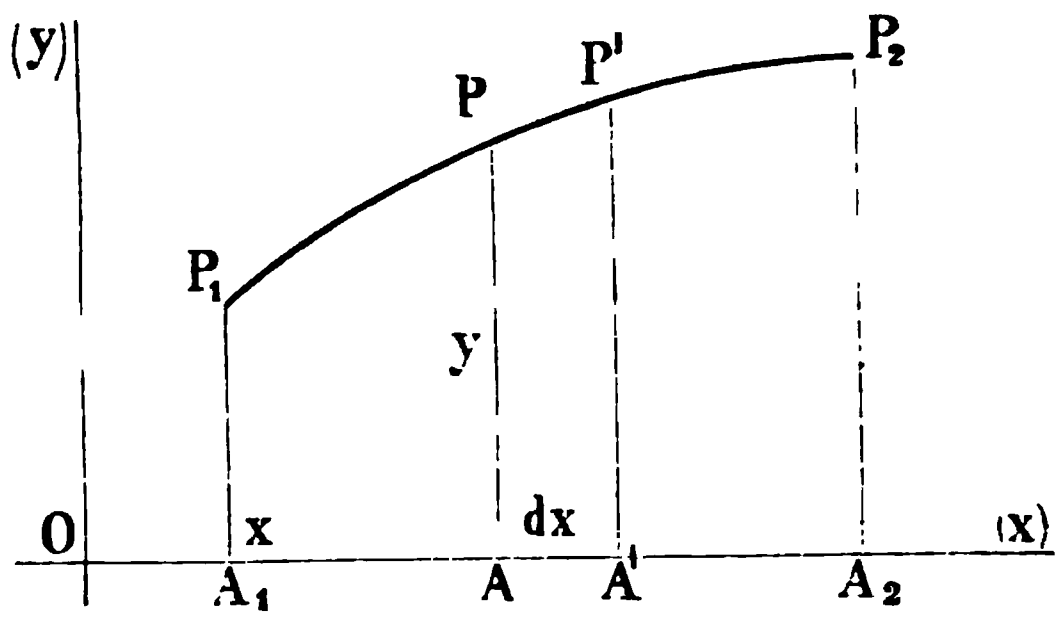
also schließlich

$$V = \frac{4}{3} a^3 \pi.$$

Das Volumen ist also vom Radius r des Kreisabschnittes unabhängig und gleich dem Volumen einer Kugel vom Radius a, so dass beispielsweise alle in der nebenstehenden Figur 105 gezeichneten Kreisabschnitte bei der Rotation um MN Körper von gleichem Volumen erzeugen.

8. Das gemischtlinige Viereck $A_1 P_1 P_2 A_2$ (Fig 106) rotiert um die y-Axe und erzeugt dadurch einen Hohlcylinder, der

Fig. 106.




auf einer Seite durch einen Kreisring und auf der anderen durch eine ringförmige Rotationsfläche begrenzt wird.

Das Volumen dieses Körpers soll berechnet werden.

Zu diesem Zwecke zerlegt man den Körper in hohle concentrische Cylinder von der Wandstärke $dx$ und dem inneren Halbmesser $x$.

Ein solcher Elementarcylinder hat zur Basis einen Kreisring, dessen innerer Radius $x$ und dessen äußerer Radius $x + dx$ ist. Die Fläche dieses Kreisringes ist

$$\pi(x + dx)^2 - \pi x^2 = 2\pi x\, dx + \pi \overline{dx}^2,$$

also mit unbeschränkter Genauigkeit

$$2\pi x\, dx.$$

Da nun die Höhe eines solchen Elementarcylinders $y$ ist, so ist sein Volumen:

$$dV = 2\pi x y\, dx.$$

Demnach ergibt sich das Volumen des Rotationskörpers:

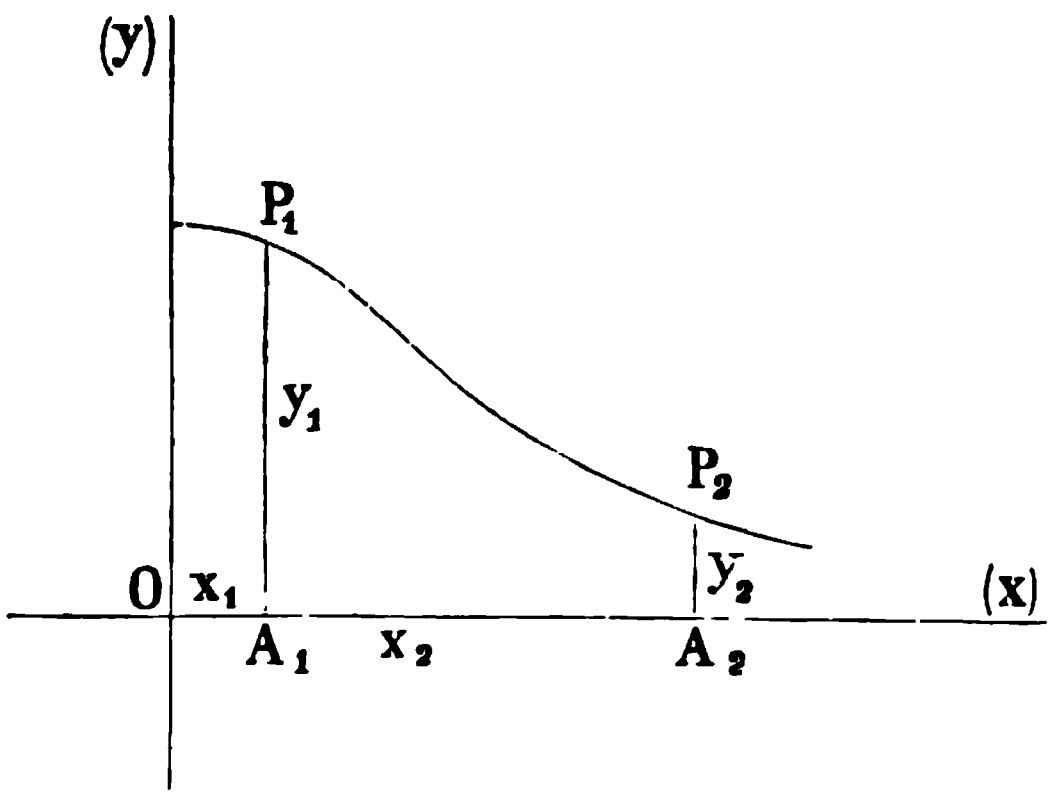
$$V = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x y\, dx$$

doer, wenn $y = f(x)$ die Gleichung der Curve vorstellt,

$$V = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x f(x)\, dx.$$

9. Anschließend an das vorige Beispiel, soll das Volumen des Körpers berechnet werden, welcher durch die Rotation des Stückes $P_1P_2$ (Fig. 107) der Wahrscheinlichkeitslinie um die y-Axe entsteht.

Fig. 107.




Die Gleichung der Wahrscheinlichkeitslinie ist

$$y = e^{-x^2}.$$

Man erhält also das Volumen

$$V = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x\, e^{-x^2}\, dx = -\pi \left[e^{-x}\right]_{x_1}^{x_2} = \pi (y_1 - y_2).$$

Rückt speciell $P_1$ in den Scheitel S und $P_2$ ins Unendliche. so wird

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 0,$$

und man erhält als Volumen des sich allseits ins Unendliche erstreckenden Körpers

$$V_1 = \pi.$$

Anmerkung: Die Fläche, welche zwischen der Wahrscheinlichkeitslinie und der x-Axe liegt, ist

$$F = 2 \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

(Siehe bestimmte Integrale, Formel 116.)

## 2. *Cubatur der Flächen zweiter Ordnung.*

### 1. Das Ellipsoid.

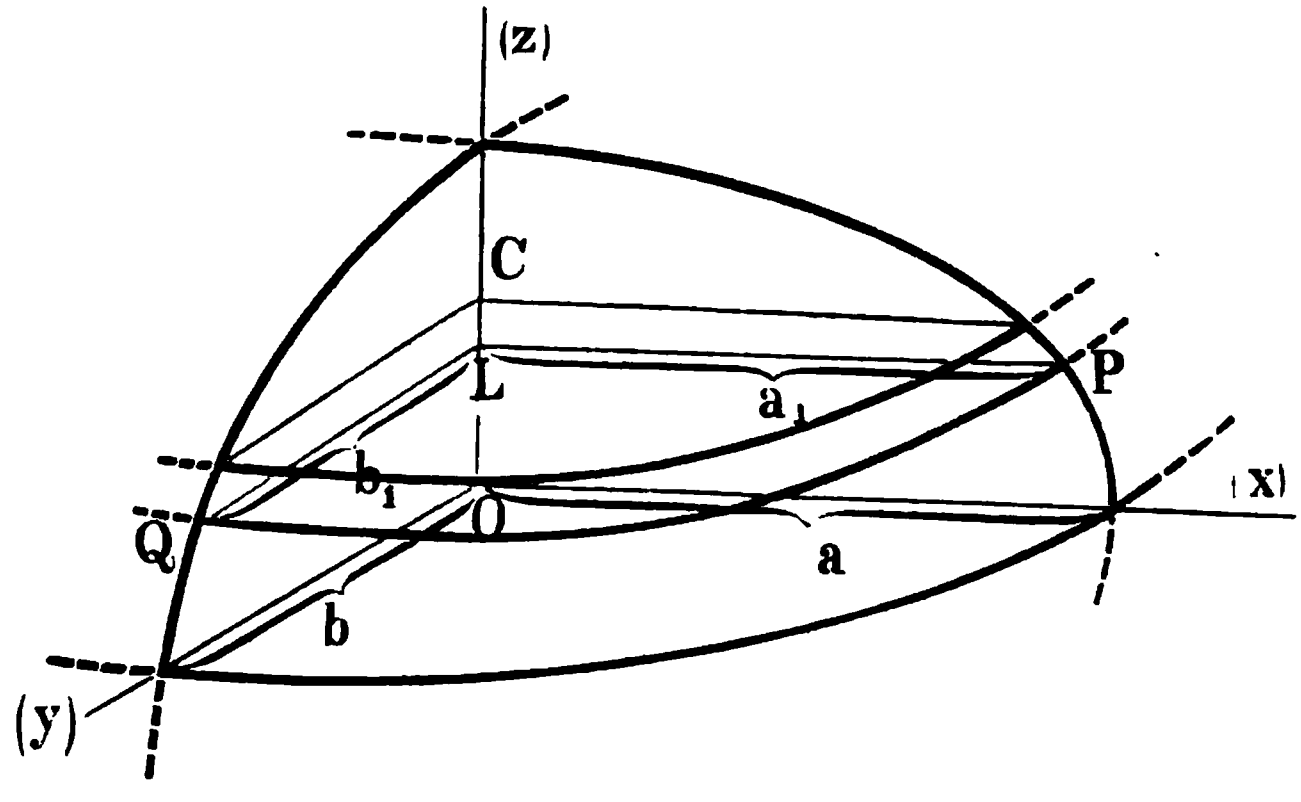
Ein Ellipsoid sei durch seine Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

gegeben. Es soll sein Volumen berechnet werden.

Legt man im Abstande z (Fig. 108) von der xy-Ebene eine Ebene parallel zur letzteren, so schneidet diese das Ellipsoid nach

Fig. 108.




einer Ellipse. deren Halbaxen mit $a_1$ und $b_1$ bezeichnet werden mögen. ($a_1 = LP$; $b_1 = LQ$.)

Der Punkt P des Ellipsoides hat die Coordinaten $a_1$, 0, z, welche der Gleichung der Fläche genügen müssen:

$$\frac{a_1^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

woraus

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$$

folgt. Ebenso müssen die Coordinaten des Punktes Q des Ellipsoides 0. $b_1$, z der Gleichung der Fläche genügen:

$$\frac{b_1^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

woraus

$$b_1 = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$$

erhalten wird.

Die Fläche der Schnittellipse $F_z$ ist also als Function des Abstandes z ihrer Ebene von der xy-Ebene darstellbar. Denn es ist

$$F_z = \pi a_1 b_1 = \pi a b \left[1 - \frac{z^2}{c^2}\right].$$

Das Volumdifferential ist demnach:

$$dV = F_z\, dz = \pi a b \left[1 - \frac{z^2}{c^2}\right] dz.$$

Mithin das Volumen des Ellipsoides:

$$V = 2\int_0^c \pi a b \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = 2\pi a b \int_0^c \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz,$$

also

$$V = 2\pi a b \left[z - \frac{z^3}{3c^2}\right]_0^c = \frac{4}{3}\pi a b c.$$

Setzt man $a = b = c = r$, so geht das Ellipsoid in eine Kugel vom Radius r und das Volumen in

$$V_k = \frac{4}{3} r^3$$

über.

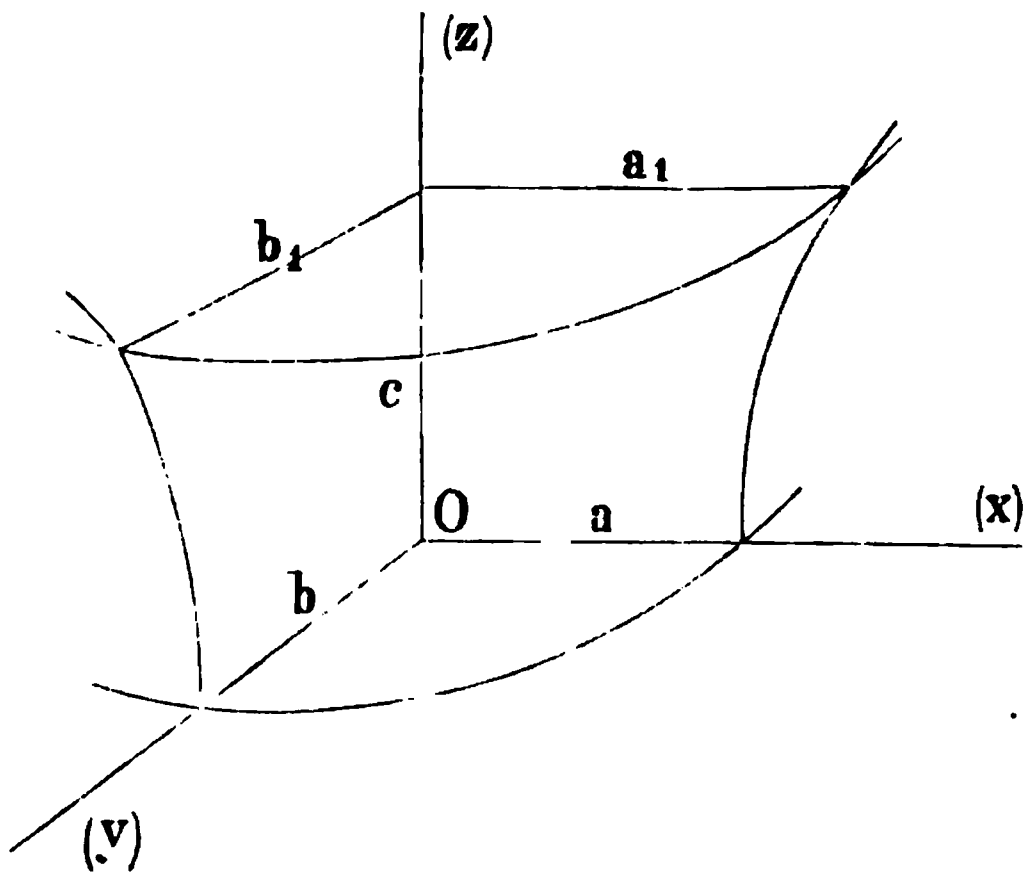
### 2. Das eintheilige Hyperboloid.

Es soll das Volumen jenes Theiles eines durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

gegebenen eintheiligen Hyperboloides bestimmt werden, welcher zwischen der x y-Ebene und einer im Abstande c (Fig. 109) zu dieser parallelen Ebene liegt.

Fig. 109.




Durch analoge Betrachtungen wie beim Ellipsoid findet man aus der Gleichung der Fläche:

$$a_1 = a\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}},$$

$$b_1 = b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}.$$

Mithin

$$F_z = \pi a_1 b_1 = \pi a b\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$$

und daraus das gesuchte Volumen

$$V = \pi a b\int_0^c\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)dz = \frac{4}{3}\pi a b c.$$

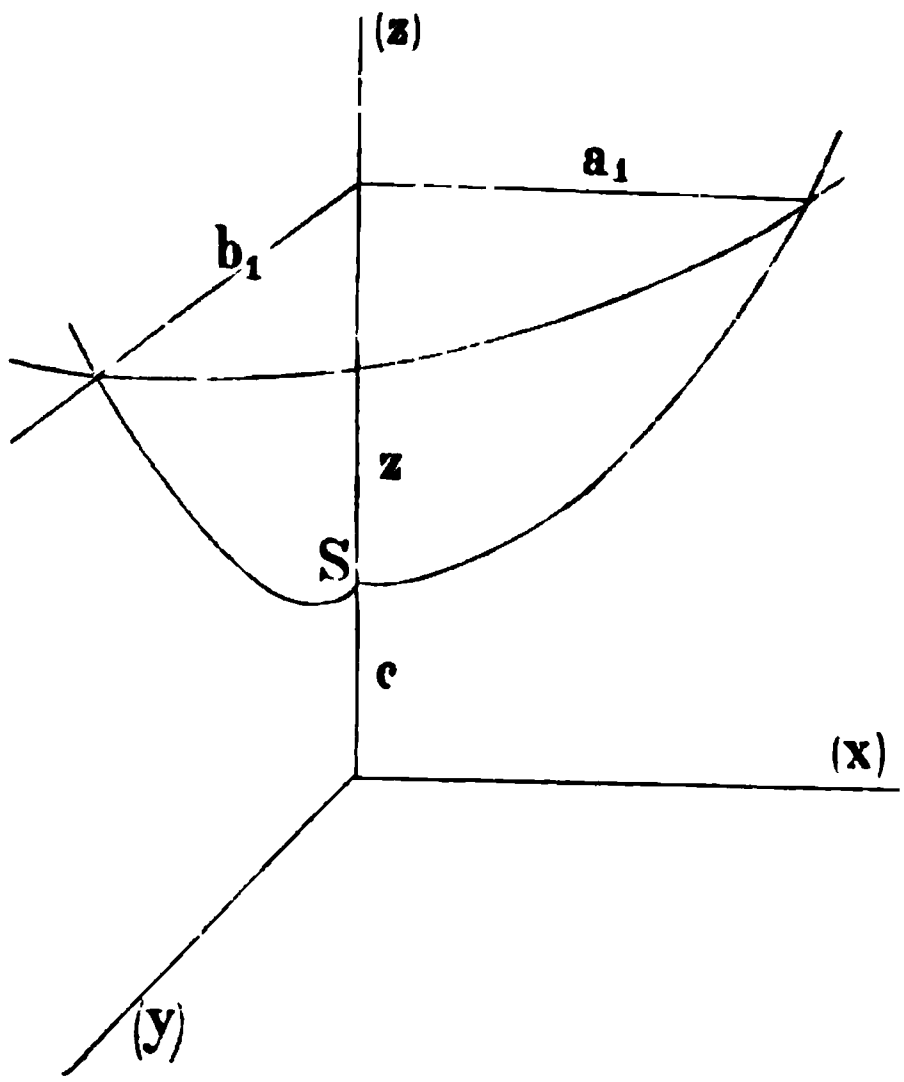
### 3. Das zweitheilige Hyperboloid.

Es soll das Volumen des Theiles eines durch die Gleichung

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

gegebenen zweitheiligen Hyperboloides bestimmt werden, welcher zwischen dem Scheitel S (Fig. 110) und einer zur x y-Ebene im Abstande 2 c parallelen Ebene liegt.

Fig. 110.




Hier findet man:

$$a_1 = a\sqrt{\frac{z^2}{c^2} - 1},$$

$$b_1 = b\sqrt{\frac{z^2}{c^2} - 1},$$

also

$$F_z = \pi a_1 b_1 = \pi a b \left(\frac{z^2}{c^2} - 1\right).$$

mithin

$$V = \pi a b \int_c^{2c} \left(\frac{z^2}{c^2} - 1\right) dz,$$

d. h.

$$V = \pi a b \left[\frac{z^3}{3c^2} - z\right]_c^{2c} = \frac{4}{3}\pi a b c.$$

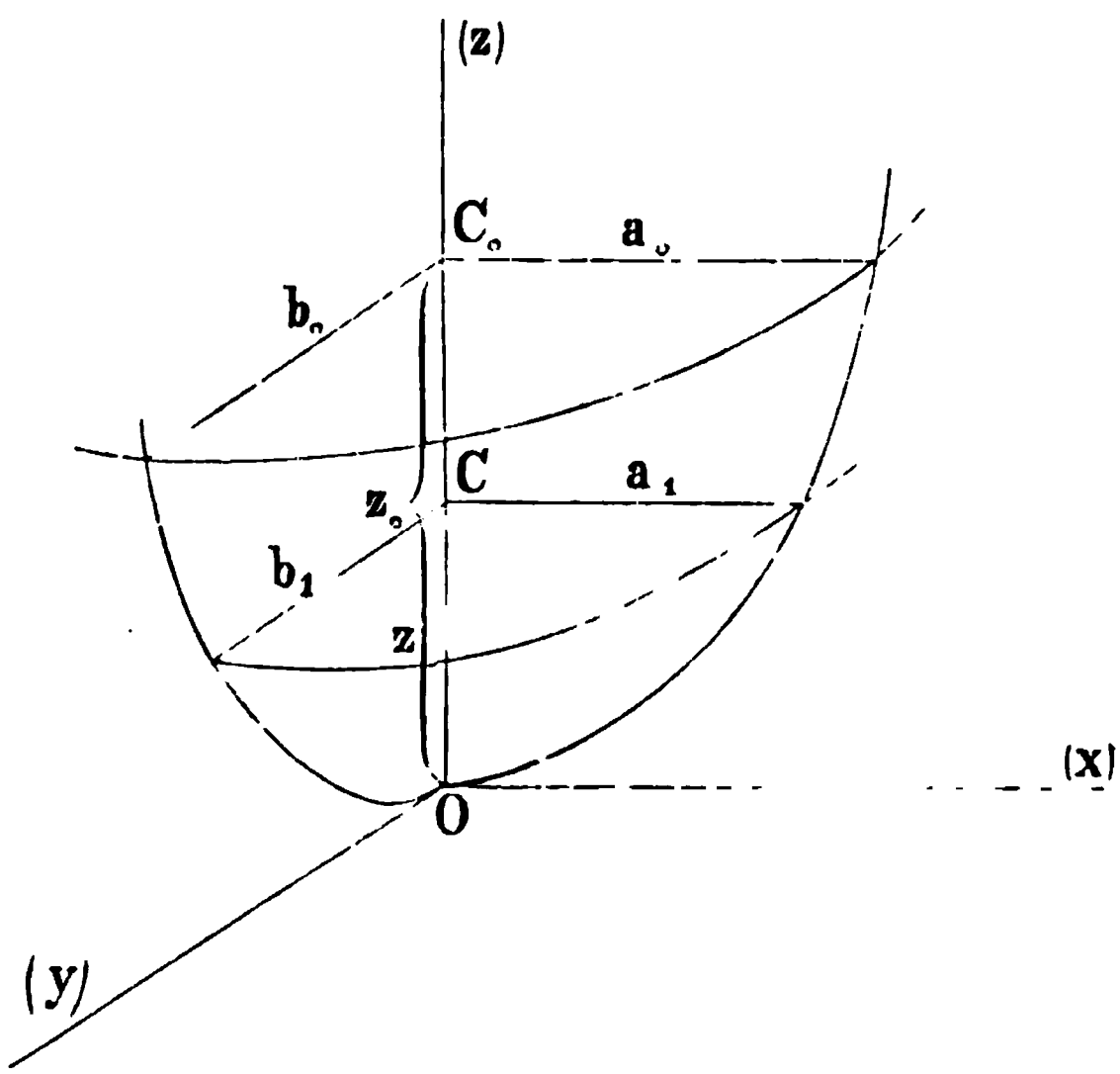
4. Das elliptische Paraboloid.

Es soll das Volumen jenes Theiles eines durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} - z = 0$$

gegebenen elliptischen Paraboloides bestimmt werden, welcher zwischen dem Scheitel O (Fig. 111) und einer im Abstande $z_0$ zur x y-Ebene parallelen Ebene liegt.

Fig. 111.




Man erhält analog wie bei den vorangehenden Aufgaben

$$a_1 = \sqrt{2pz},$$

$$b_1 = \sqrt{2qz}.$$

Demnach

$$F_z = \pi \sqrt{4\,p\,q}\,z^2 = 2\,\pi\,z\,\sqrt{p\,q}$$

und

$$V = 2\,\pi\,\sqrt{p\,q}\int_0^{z_0} z\,dz = 2\,\pi\,\sqrt{p\,q}\,\frac{z_0^2}{2}.$$

Da nun

$$V = \frac{1}{2}\,z_0 \,.\, 2\,\pi\,z_0\,\sqrt{p\,q} = \frac{1}{2}\,z_0 \,.\, \pi\,a_0\,b_0 = \frac{1}{2}\,z_0\,F_{z_0},$$

so ist das gefundene Volumen gleich dem halben Volumen eines auf dem Querschnitte $F_{z_0}$ aufstehenden Cylinders von der Höhe $z_0$.

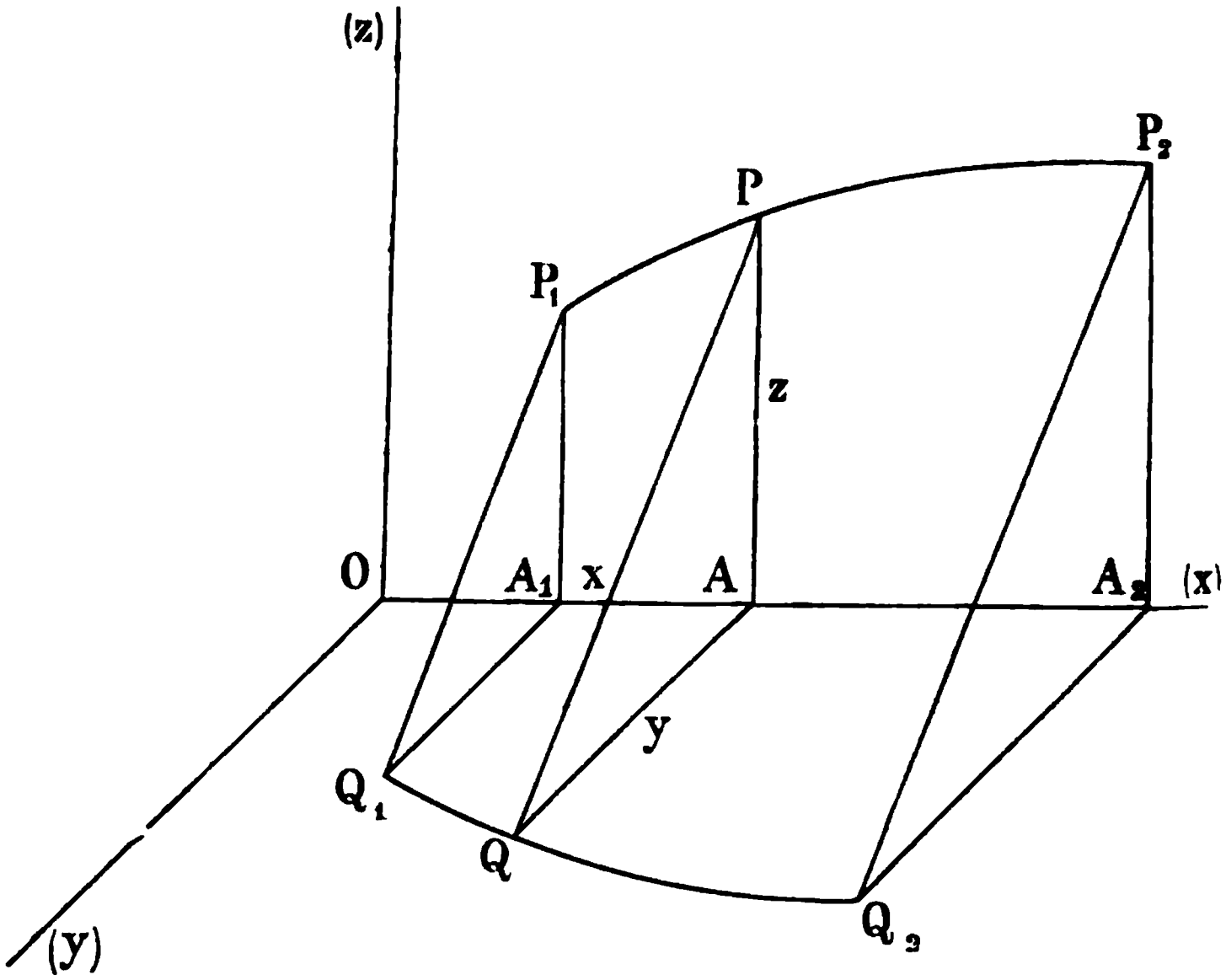
*3. Cubatur von Körpern, deren Oberflächen Regelflächen sind.*

Eine Regelfläche entsteht, wenn eine Gerade entlang zweier beliebigen Curven gleitet und ihre Bewegung nach einem bestimmten Gesetze ausführt.

Die Cubatur einer Regelfläche soll für drei allgemeine Fälle derselben entwickelt und an speciellen Beispielen gezeigt werden.

1. Eine Regelfläche entsteht durch das Gleiten einer zur yz-Ebene beständig parallelen Geraden entlang zweier Curven, von welchen die eine $P_1 P_2$ (Fig. 112) in der xz-, die zweite $Q_1 Q_2$ in der xy-Ebene liegt.

Fig. 112.




Es ist das Volumen des Körpers zu bestimmen, welcher von dieser Regelfläche, der xy- und der zx-Ebene, dann von den zwei

in Abständen $x_1$ und $x_2$ zur $yz$-Ebene parallelen Ebenen $P_1A_1Q_1$ und $P_2A_2Q_2$ begrenzt wird.

Der Flächeninhalt $F_x$ eines beliebigen zur $yz$-Ebene parallelen Querschnittes dieses Körpers kann als Function seines Abstandes $x$ von dieser Ebene dargestellt werden, wenn die beiden Curven durch ihre Gleichungen in Bezug auf die betreffenden Coordinatenaxen

$$z = \varphi(x) \qquad \text{(Curve } P_1P_2\text{)},$$

$$y = \psi(x) \qquad \text{(Curve } Q_1Q_2\text{)}$$

gegeben sind.

Denn ein solcher Querschnitt $PAQ$ ist ein Dreieck von der Basis $AQ = y = \psi(x)$ und der Höhe $AP = z = \varphi(x)$, hat mithin den Flächeninhalt:

$$F_x = \frac{1}{2}yz = \frac{1}{2}\varphi(x)\psi(x).$$

Dadurch ist die Aufgabe bereits gelöst.

Das Volumelement $F_x\,dx$ ist

$$dV = \frac{1}{2}\varphi(x)\psi(x)\,dx,$$

und das gesuchte Volumen:

$$V = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y \,.\, z \,.\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\psi(x)\,dx.$$

**Beispiel:**

Die beiden Leitcurven mögen Quadranten von Ellipsen sein, welche eine gemeinsame Halbaxe $a$ (Fig. 113) haben, also in einem Punkte $L$ der $x$-Axe zusammenstoßen.

Die sich entlang der Curven bewegende, zur $yz$-Ebene parallele Gerade beschreibt die Hälfte eines sogenannten cylindrischen Hufes $OLMN$.

Es ist sein Volumen zu bestimmen, wenn die Gleichungen der Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

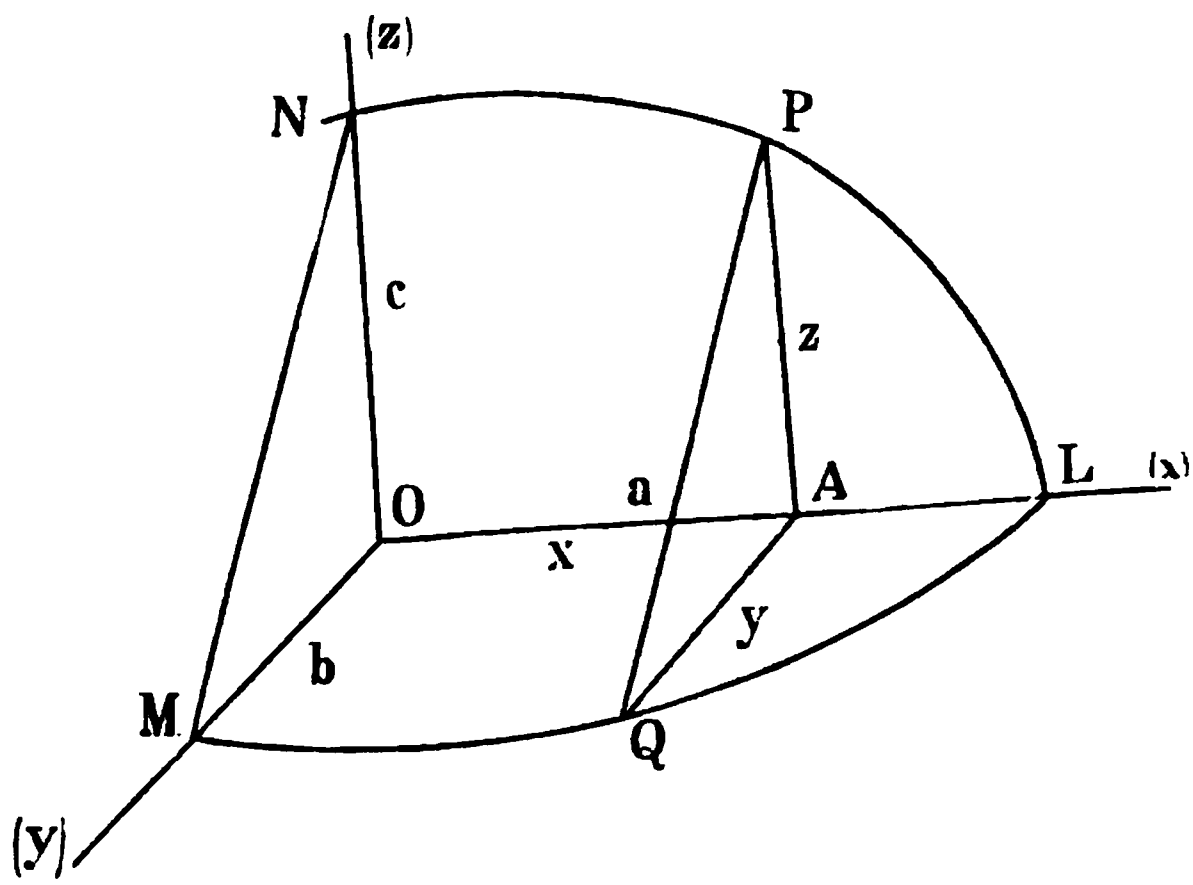
gegeben sind.

Diese Gleichungen lauten in der entwickelten Form

$$z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Fig. 113.




Dass die Fläche eine Cylinderfläche ist, erkennt man einfach aus dem Verhältnis $y : z = b : c$, welches anzeigt, dass jede Erzeugende parallel ist zur Geraden MN.

In diesem speciellen Fall findet man:

$$F_x = \frac{1}{2}\frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2),$$

demnach:

$$V = \frac{1}{2}\frac{bc}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \frac{1}{2}\frac{bc}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{1}{3}abc.$$

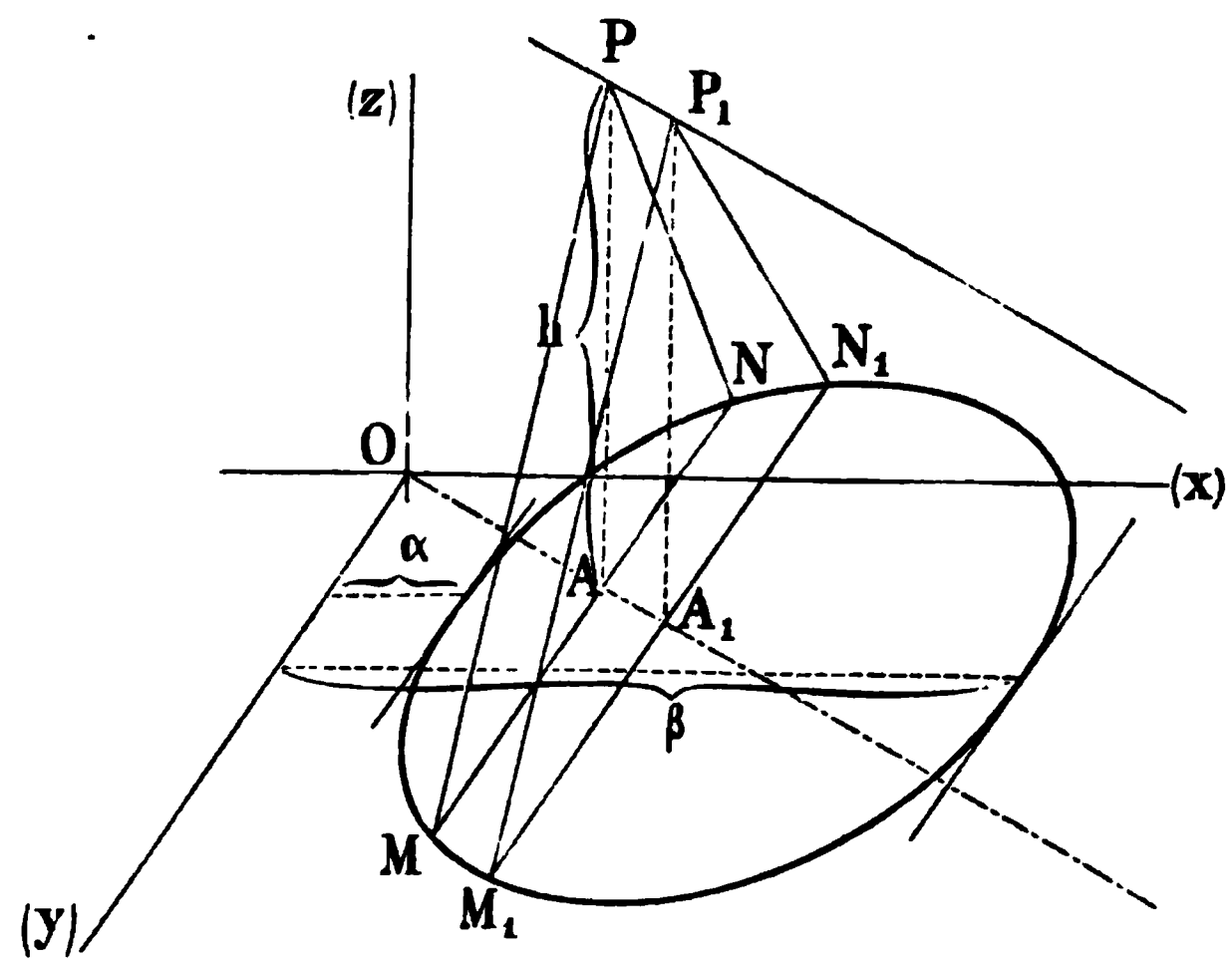
Das Volumen beträgt also $\frac{1}{3}$ des Volumens eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit den Kanten a, b, c.

2. Gleitet eine Gerade entlang einer Geraden und einer geschlossenen Curve, wobei sie stets zu einer fixen Ebene parallel bleibt, so beschreibt sie eine Regelfläche, welche Conoid genannt wird.

Wenn die Leitcurve in der xy-Ebene liegt, die Leitgerade eine zu dieser Ebene parallele Gerade und die fixe Richtebene der Erzeugenden

e y z-Ebene ist, so gestaltet sich die Cubatur des Conoides besonders ıfach. Jeder zur y z-Ebene parallele Querschnitt dieses Körpers ist ein reieck, welches den constanten Abstand h (Fig. 114) der Leitgeraden ın der x y-Ebene zur Höhe hat. Die Basis dieses Dreieckes ist die im

Fig. 114.




ıstande x zur y-Axe parallele Sehne der Leitcurve. Das Volumen ischen zwei solchen unmittelbar benachbarten Parallelschnitten MPN d $M_1P_1N_1$, kann mit unbeschränkter Genauigkeit als ein dreitiges Prisma von der Basis MPN und der Höhe d x angesehen erden.

Dieses Volumelement ist somit:

$$dV = \frac{1}{2} h \,.\, MN\, dx,$$

ıbei MN aus der Gleichung der Leitcurve als Function von x darstellt werden kann.

Das gesuchte Volumen ist also:

$$V = \frac{1}{2} h \int_{\alpha}^{\beta} \bar{M}\bar{N}\, dx,$$

ınn $\alpha$ und $\beta$ die Abscissen der in der Richtung der x-Axe äußersten nkte der Leitcurve bedeuten.

Nun stellt aber das Integral

$$F = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{MN}\, dx$$

die Fläche der Leitcurve dar, mithin ist

$$V = \frac{1}{2} h \,.\, F.$$

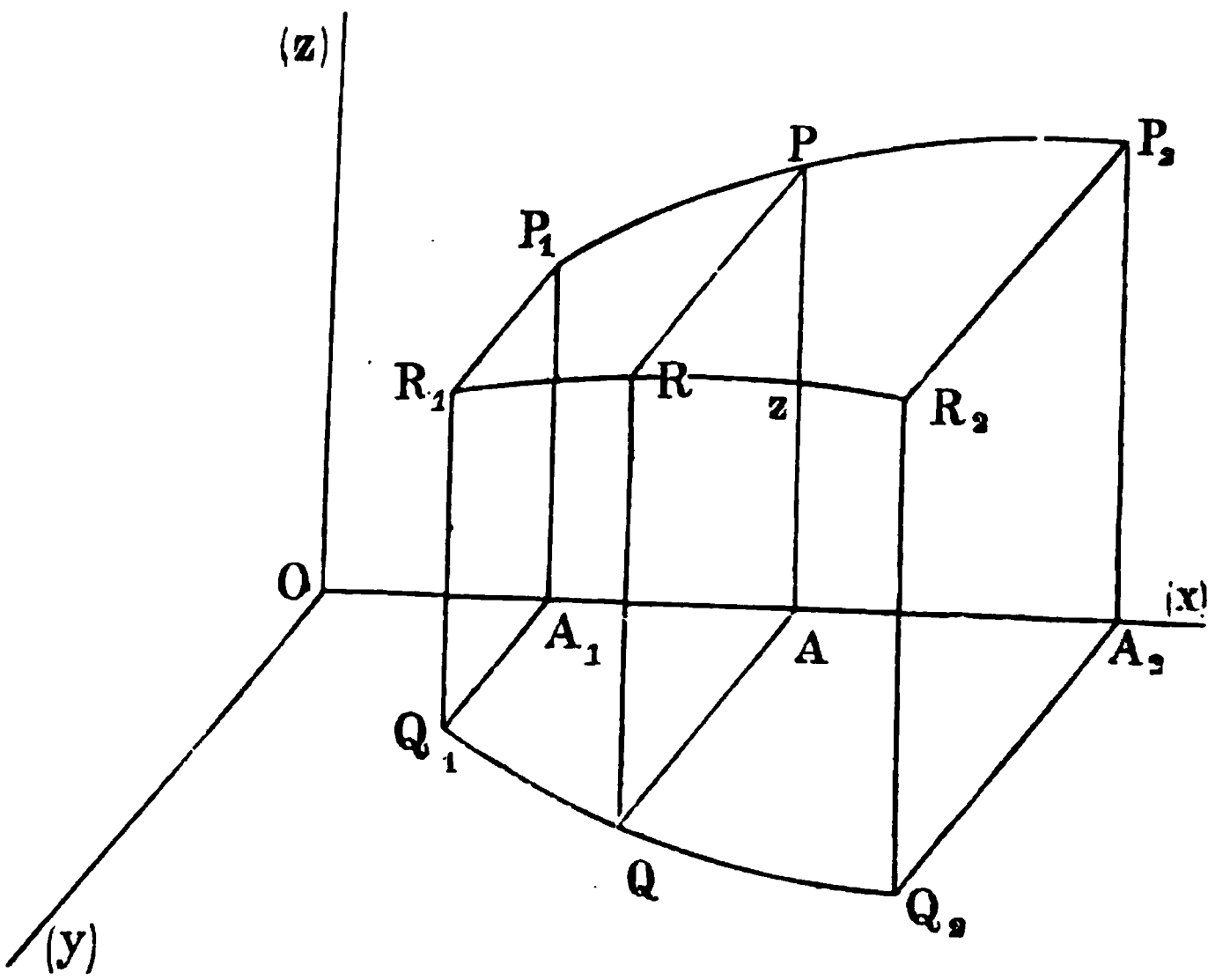
Das Volumen eines solchen Conoides ist somit gleich dem halben Volumen eines auf der Leitcurve aufstehenden Cylinders von der halben Höhe.

Ist die Leitcurve speciell eine Ellipse mit den Halbaxen a und b, so erhält man als Volumen des Conoides:

$$V = \frac{\pi a b h}{2}.$$

3. Eine zur y-Axe parallele Gerade gleitet längs der in der xz-Ebene liegenden Curve $P_1 P_2$ (Fig. 115). Sie erzeugt hiebei eine Cylinderfläche.

Fig. 115.




Pa

ne zur z-Axe parallele Gerade gleitet längs der in der xy-Ebe
gesc enden Curve $Q_1 Q_2$ und erzeugt auch eine Cylinderfläche.
paral Die Theile $P_1 R_1 R_2 P_2$ und $Q_1 R_1 R_2 Q_2$ dieser Cylinderfläche
Conoid en mit den parallelen Rechteckflächen $A_1 Q_1 R_1 P_1$ und $A_2 Q_2 R_2 P_2$

Wen it den gemischtlinigen Vierecken $A_1 P_1 P_2 A_2$ und $A_1 Q_1 Q_2 A_2$
zu dieser Ebe er, dessen Volumen berechnet werden soll.

Sind die Gleichungen der Curven

$$z = \varphi(x) \ldots P_1 P_2,$$
$$y = \psi(x) \ldots Q_1 Q_2,$$

so ist die Fläche eines beliebigen Querschnittes AQRP als Rechteckfläche:

$$F = \overline{AP} \cdot AQ = y \cdot z = \varphi(x) \cdot \psi(x).$$

Demnach das Volumelement

$$dV = y\,z\,dz = \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$$

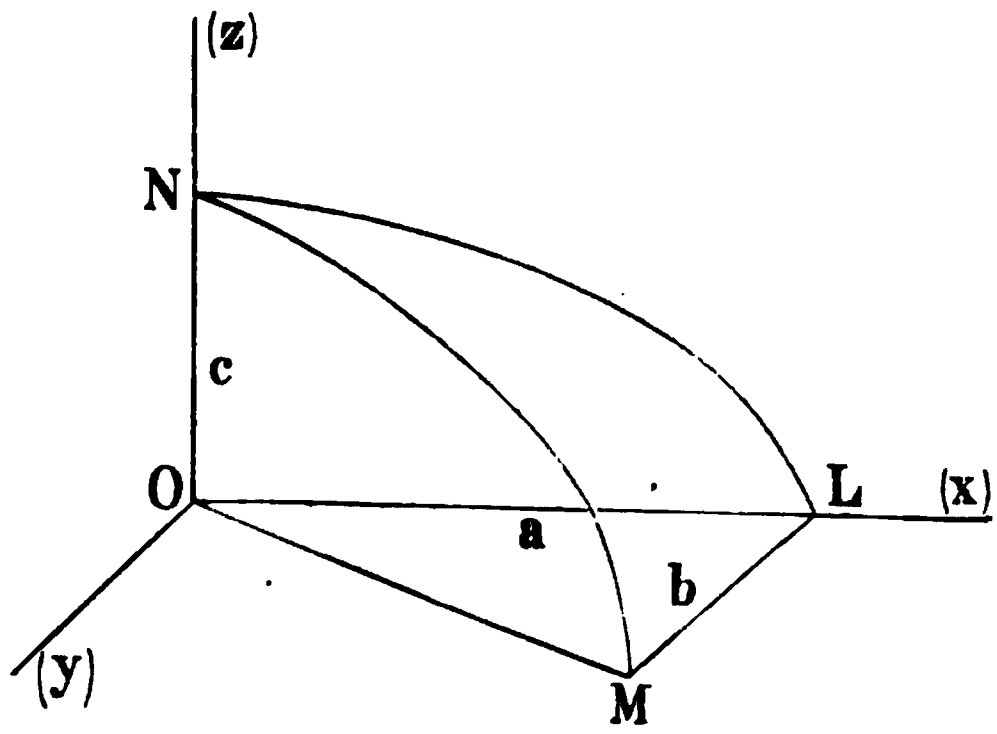
und das zu berechnende Volumen

$$V = \int_{x_1}^{x_2} y\,z\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,\psi(x)\,dx.$$

**Beispiel:**

Die eine Curve sei ein Quadrant einer Ellipse NL (Fig. 116), die andere eine durch den Ursprung gehende Gerade OM.

Fig. 116.




Dann ist das Volumen des keilförmigen Körpers LMNO, wenn die Ellipse durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

also

$$z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

und die Gerade durch

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b},$$

also

$$y = \frac{b}{a}x,$$

gegeben ist:

$$V = \frac{b\,c}{a^2}\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx,$$

demnach:

$$V = \frac{1}{3}a\,b\,c.$$

Das gesuchte Volumen beträgt ein Drittel des Volumens eines rechtwinkligen Parallelepipeds von den Kanten a, b, c.

# 6. Abschnitt.

## Complanation krummer Flächen.

Darunter versteht man die Berechnung des Inhaltes eines durch eine geschlossene Figur begrenzten Theiles einer krummen Fläche.

Ebenso wie bei der Cubatur kann diese Aufgabe in vielen Fällen durch einmalige Integration gelöst werden.

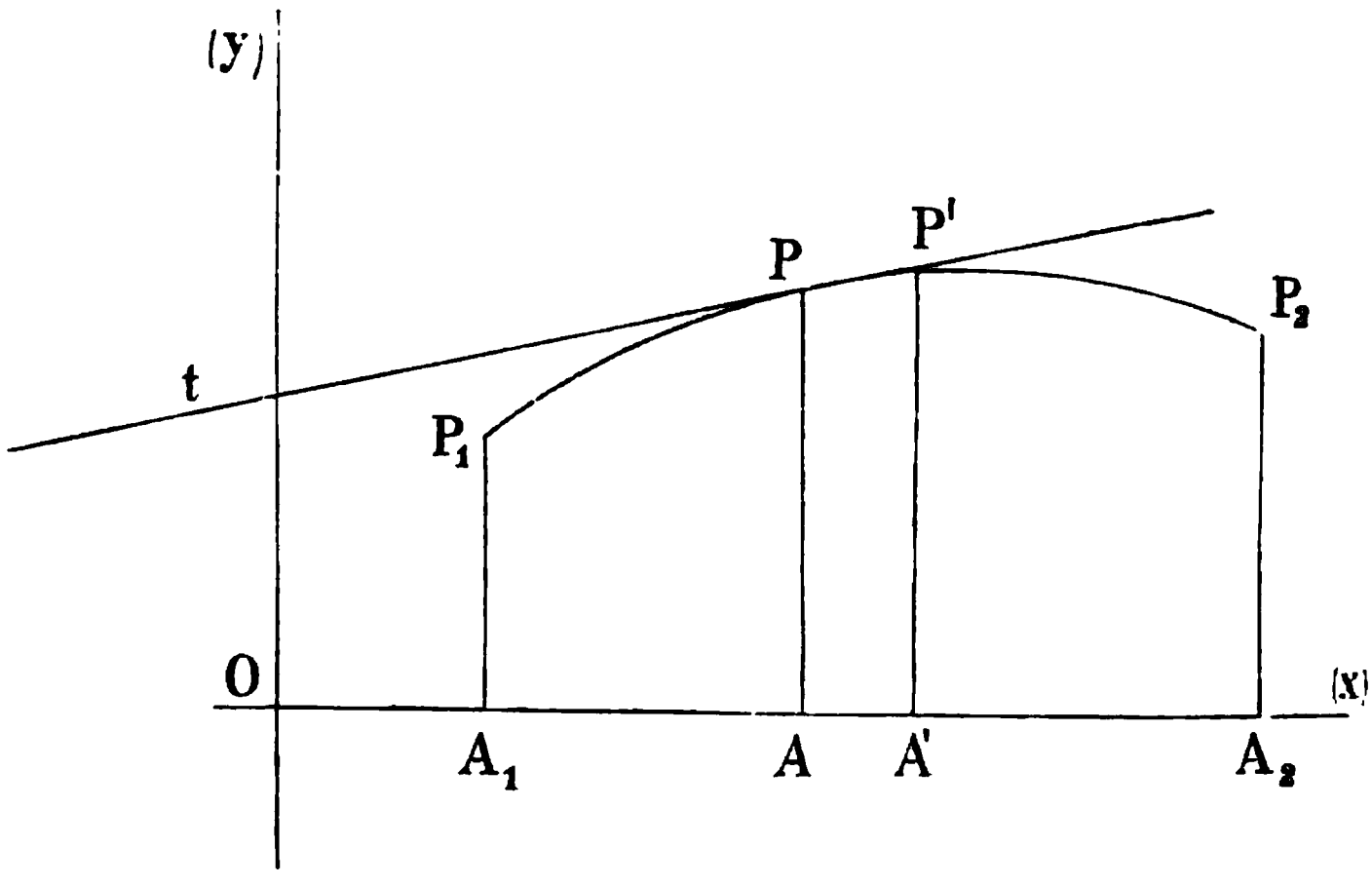
Die wichtigsten dieser Fälle sollen zunächst im folgenden besprochen werden.

### § 68. Complanation krummer Flächen durch einmalige Integration.

*1. Complanation der Rotationsflächen.*

Das Curvenstück $P_1 P_2$ (Fig. 117) rotiert um die Gerade Ox und erzeugt hiebei eine Rotationsfläche. Es soll die Oberfläche dieser Rotationsfläche berechnet werden.

Fig. 117.



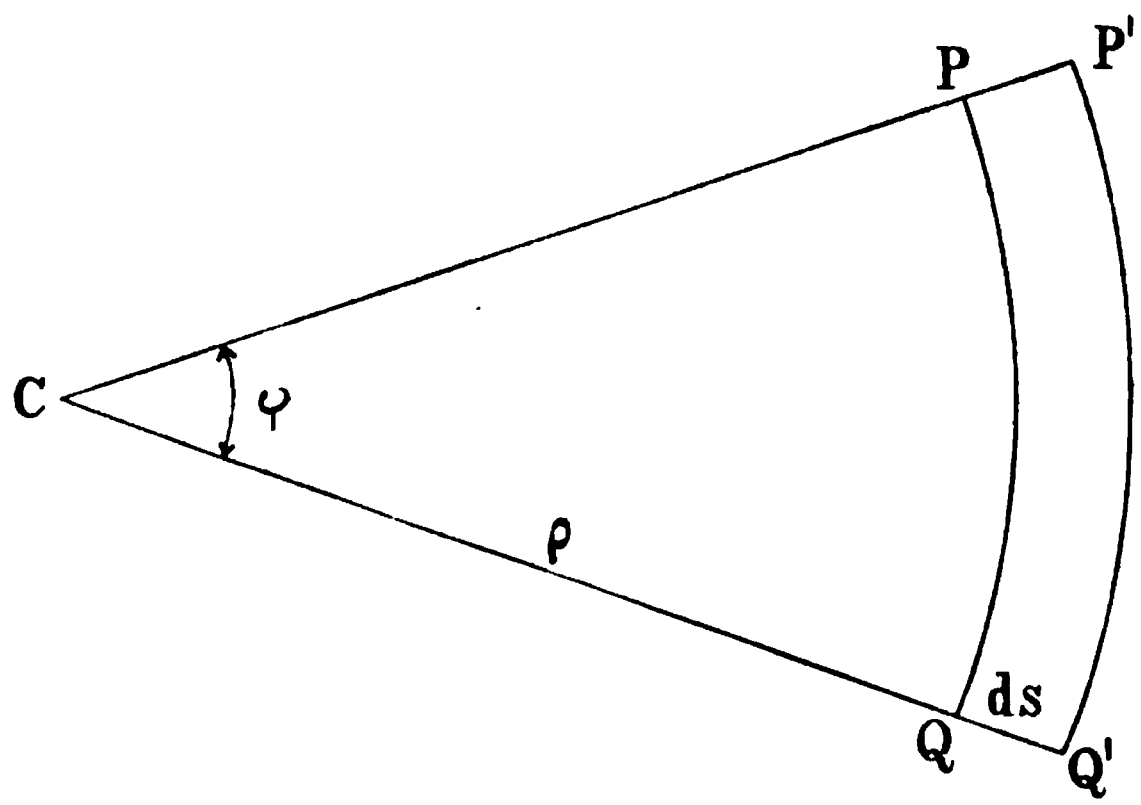

Jedes Element der Curve, wie beispielsweise $PP'$, erzeugt bei der Rotation eine ringförmige Fläche, welche als Oberflächenelement anzusehen ist.

Die Summe aller auf der Oberfläche befindlichen Oberflächenelemente gibt den Inhalt der Oberfläche.

Die Größe eines Oberflächenelementes (Flächendifferentials) kann durch folgende Betrachtung gefunden werden:

Die Verbindungslinie der Nachbarpunkte P und P′ (Tangente der Curve im Punkte P, Fig. 118) erzeugt, wenn sie mit der Curve fest verbunden gedacht wird, bei der Rotation einen Kreiskegel, dessen Axe die Rotationsaxe ist.

Fig. 118.




Das angeführte Flächendifferential liegt in dieser Kegelfläche und kann mit derselben in eine Ebene ausgestreckt werden, wobei es die Form PQQ′P′ annimmt.

Der Bogen PQ ist der Weg, welchen der Punkt P bei der Rotation zurücklegt, also $2\pi y$.

$$\text{arc } PQ = 2\pi y.$$

Die Oberfläche des Elementes PQQ′P′ ist die Differenz der Flächen der Sectoren CP′Q′ und CPQ. Bezeichnet man den Radius CQ mit $\rho$, den Centriwinkel mit $\varphi$ und berücksichtigt, dass $QQ' = PP' = ds$, so findet man:

$$\text{area } CP'Q' = \frac{(\rho + ds)\,\varphi \cdot (\rho + ds)}{2} = \frac{\varphi}{2}(\rho + ds)^2,$$

$$\text{area } CPQ = \frac{\rho \cdot \varphi \cdot \rho}{2} = \frac{\varphi}{2}\rho^2.$$

Demnach ist

$$\text{area } PQQ'P' = dO = \frac{\varphi}{2}(2\rho\, ds + ds^2)$$

oder, weil $\overline{ds^2}$ gegenüber $ds$ verschwindend klein ist,

$$dO = \varphi \,.\, \rho \, ds.$$

Nun ist aber

$$\rho \,.\, \varphi = \text{arc } PQ = 2\pi y,$$

also

$$dO = 2\pi y \, ds.$$

Der gesuchte Flächeninhalt der Rotationsfläche ergibt sich als Summe dieser Oberflächenelemente:

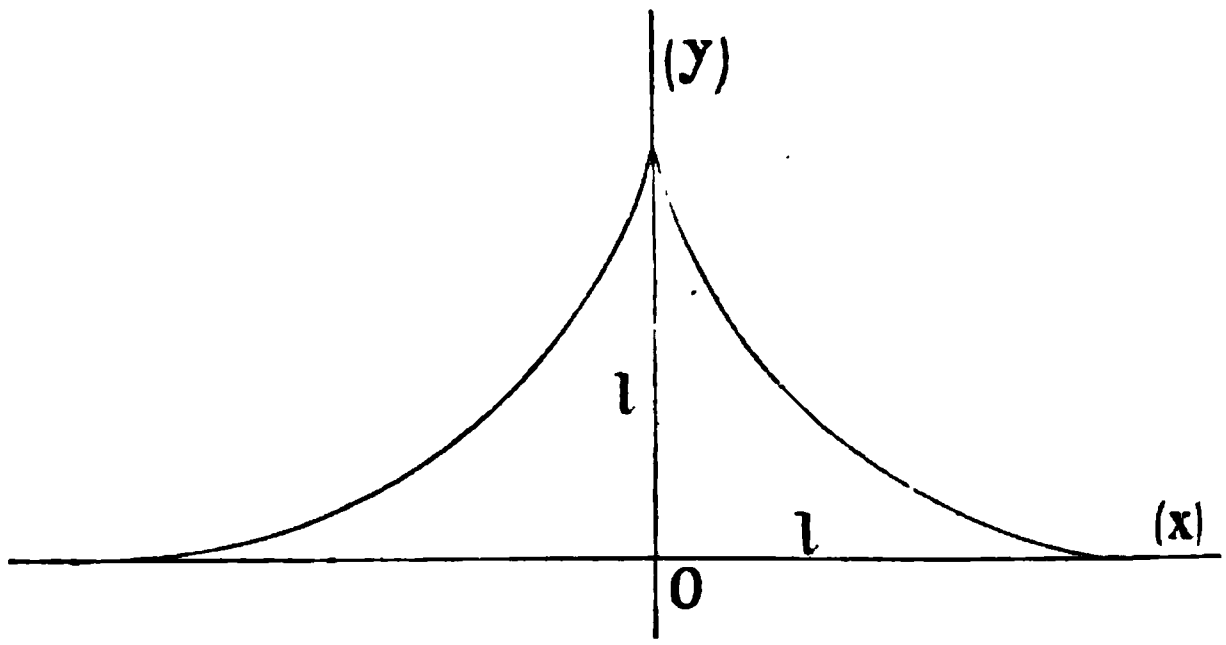
$$O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \, ds,$$

worin $y$ und $ds$ aus der Gleichung der rotierenden Curve als Functionen von $x$ auszudrücken sind.

**Beispiele:**

1. Die Astrois rotiere um die $x$-Axe. Es ist die Oberfläche der auf diese Weise entstehenden Rotationsfläche zu berechnen. (Fig. 119.

Fig. 119.




Es wird sich hier empfehlen, $ds$ nicht wie üblich durch $x$ sondern durch $y$ auszudrücken, indem man schreibt:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Aus der Gleichung der Curve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - l^{\frac{2}{3}} = 0$$

folgt:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

also

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=1+\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}=\left(\frac{l}{y}\right)^{\frac{2}{3}},$$

demnach

$$ds=dy\left(\frac{l}{y}\right)^{\frac{1}{3}}$$

und

$$O=2\pi\int_0^l y\,ds=4\pi\int_0^l l^{\frac{1}{3}}\,y^{\frac{2}{3}}\,dy=4\pi l^{\frac{1}{3}}\int_0^l y^{\frac{2}{3}}\,dy,$$

d. h.

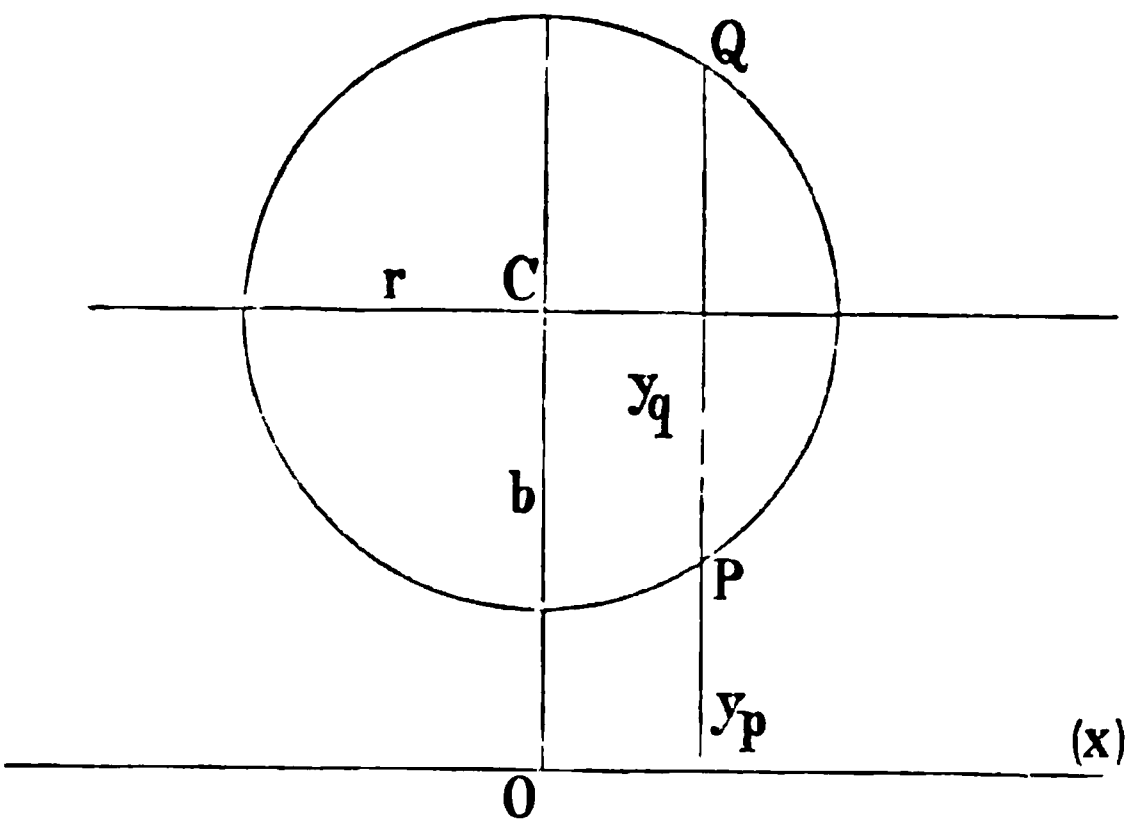
$$O=4\pi l^{\frac{1}{3}}\left[\frac{y^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\right]_0^l=4\pi l^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{l^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}\,4\pi l^2.$$

Die Oberfläche dieser Rotationsfläche beträgt $\frac{3}{5}$ der Oberfläche einer Kugel vom Radius l.

## 2. Oberfläche des Kreiswulstes.

Die Oberfläche des Kreiswulstes setzt sich zusammen aus den beiden Theilen, welche durch die Rotation des äußeren und inneren Halbkreises entstehen. (Fig. 120.)

Fig. 120.




Man hat demnach:

$$O=2\pi\int_{-r}^{+r} y_q\,ds+2\pi\int_{-r}^{+r} y_p\,ds=2\pi\int_{-r}^{+r}(y_q+y_p)\,ds.$$

und weil

$$y_q + y_p = 2b,$$

$$O = 2\pi b \int_{-r}^{+r} 2\, ds.$$

Das Integral $\int_{-r}^{+r} 2\, ds$ stellt aber den Umfang des rotierenden Kreises vor, hat somit den Wert $2r\pi$, so dass also die gesuchte Oberfläche

$$O = 2\pi b \,.\, 2\pi r$$

erhalten wird.

Die Oberfläche des Kreiswulstes ist gleich der Mantelfläche eines auf dem rotierenden Kreise aufstehenden Cylinders, dessen Höhe gleich ist dem Wege, welchen der Kreismittelpunkt bei einer Umdrehung beschreibt.

3. Eine Cykloide rotiert um ihre Basis (x-Axe), es ist die Oberfläche der cykloidischen Spindel zu berechnen.

Aus dem Gleichungssystem der Cykloide

$$x = a\,t - a \sin t,$$

$$y = a - a \cos t$$

erhält man:

$$dx = (a - a \cos t)\, dt.$$

$$dy = a \sin t\, dt,$$

also

$$\overline{ds^2} = \overline{dx^2} + \overline{dy^2} = 2a^2 (1 - \cos t)\, \overline{dt^2} = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}\, \overline{dt^2},$$

$$ds = 2a \sin \frac{t}{2}\, dt.$$

Demnach

$$y\, ds = (1 - \cos t)\, 2a^2 \sin \frac{t}{2}\, dt = 4a^2 \sin^3 \frac{t}{2}\, dt$$

und

$$\frac{1}{2} O = 2\pi \int_0^{\pi} 4a^2 \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = 8a^2 \pi \int_0^{\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt.$$

Setzt man in dem Integral $\frac{t}{2} = z$, so findet man:

$$O = 16a^2 \pi \,.\, 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 z \,.\, dz$$

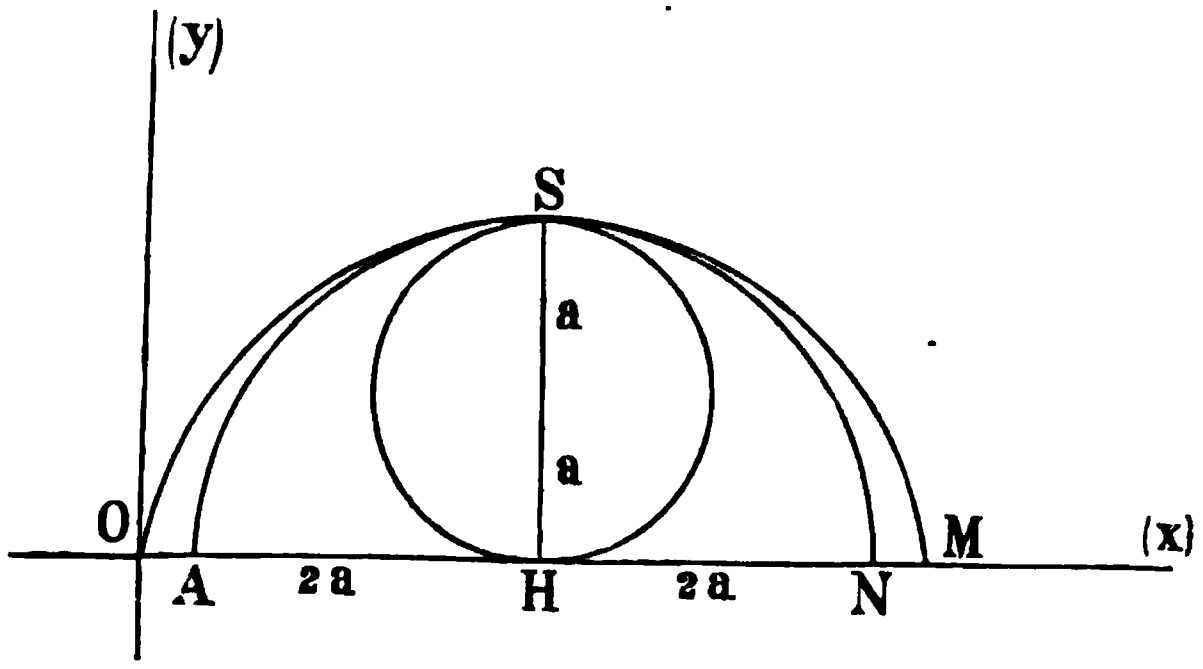
und zufolge Formel (113 a schließlich:

$$O = 32\,a^2\,\pi\,\frac{2}{3} = \frac{64}{3}\,\pi\,a^2.$$

Durch Rotation des Halbkreises ANS (Fig. 121) entsteht eine Kugel vom Radius 2 a mit der Oberfläche

$$O' = 4\,(2\,a)^2\,\pi = 16\,a^2\,\pi.$$

Fig. 121.




Woraus zu erkennen ist, dass

$$O = \frac{4}{3}\,O'.$$

4. Oberfläche der Rotationsellipsoide.

Rotiert eine Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad a > b$$

um die x-Axe, so beschreibt sie ein oblonges Rotationsellipsoid, rotiert sie hingegen um die y-Axe, so entsteht ein abgeplattetes Rotationsellipsoid oder Sphäroid.

Es soll die Oberfläche beider Rotationsellipsoide berechnet werden.

In der parametrischen Darstellungsweise ist das Gleichungssystem der rotierenden Ellipse

$$x = a \sin t,$$

$$y = b \cos t.$$

Mithin ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dt\,\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$$

und nach Einführung der numerischen Excentricität $\varepsilon$, wie bei der Rectification der Ellipse gezeigt wurde,

$$ds = a\,\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\,dt.$$

Setzt man zunächst die Rotation um die x-Axe voraus, so ist

$$dO = 2\pi y\, ds = 2\pi ab \cos t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt$$

oder, weil zufolge des Gleichungssystems der Ellipse

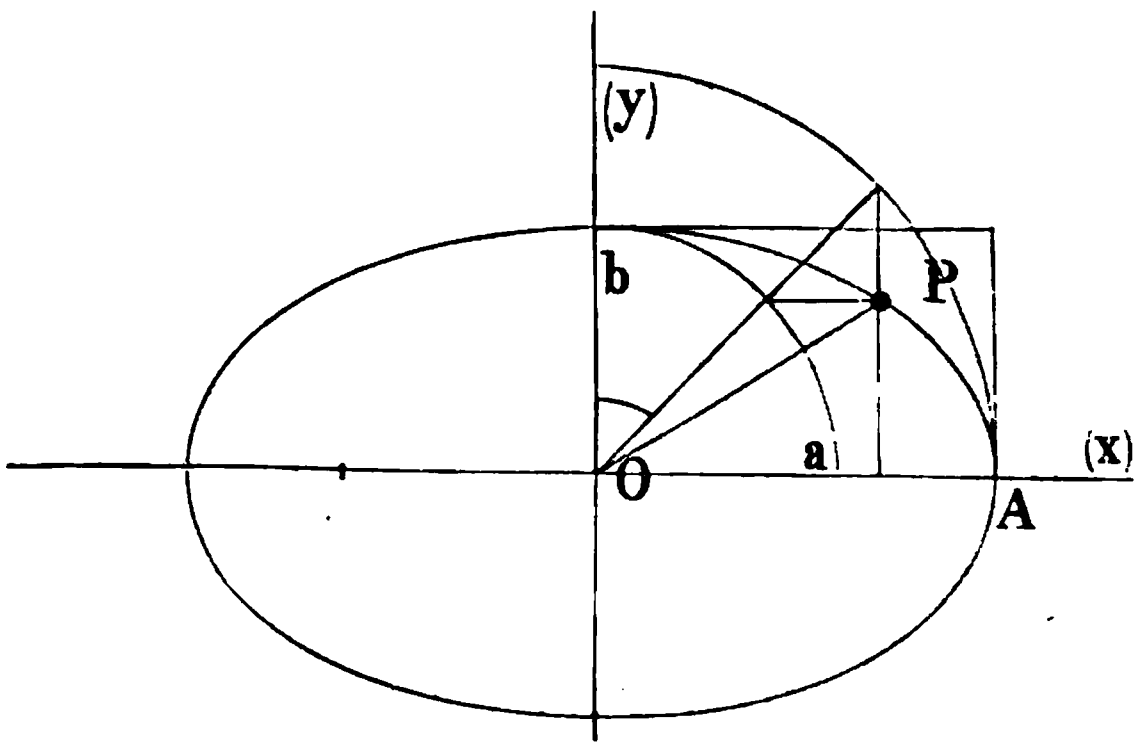
$$\sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t\, dt = \frac{dx}{a},$$

$$dO = 2\pi b \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2}\, dx.$$

Demnach die Oberfläche der Zone, welche durch die Rotation des Bogens b P (Fig. 122) entsteht:

$$O_x = \int_0^x 2\pi b \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2}\, dx.$$

Fig. 122.




Setzt man in dem Integral

$$\frac{\varepsilon x}{a} = z, \quad \text{also} \quad dx = \frac{a\, dz}{\varepsilon}$$

und bestimmt die Integrationsgrenzen der Substitution entsprechend $\left(\text{für } x = 0 \text{ wird } z = 0, \text{ für } x = x \text{ wird } z = \frac{\varepsilon x}{a}\right)$, so erhält man:

$$O_x = \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \int_0^{\frac{\varepsilon x}{a}} \sqrt{1 - z^2}\, dz,$$

d. h.

$$O_x = \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \left\{ \frac{z}{2} \sqrt{1 - z^2} + \frac{1}{2} \arcsin z \right\}_0^{\frac{\varepsilon x}{a}},$$

also schließlich:

$$O = \frac{\pi a b}{\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2} + \arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right].$$

Setzt man $x = a$, so erhält man die halbe Oberfläche dieses Ellipsoides. Demnach ist die ganze Oberfläche des oblongen Rotationsellipsoides

$$O_a = 2\pi a b\left[\sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right].$$

Rotiert dieselbe Ellipse um die y-Axe, so ist

$$dO = 2\pi x\, ds,$$

also

$$dO = 2\pi a \sin t\, a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\, dt,$$

$$= 2\pi a^2 \sin t\sqrt{1-\varepsilon^2(1-\cos^2 t)}\, dt,$$

$$= 2\pi a^2 \sin t\sqrt{1-\varepsilon^2+\varepsilon^2\cos^2 t}\, dt.$$

Setzt man $1-\varepsilon^2 = \mu^2$, was geschehen kann, da $1-\varepsilon^2 > 0$, weil $\varepsilon^2$ ein echter Bruch, so erhält man:

$$dO = 2\pi a^2 \sin t\sqrt{\mu^2+\varepsilon^2\cos^2 t}\, dt$$

oder. wenn man berücksichtigt, dass zufolge des Gleichungssystems der Ellipse

$$\cos t = \frac{y}{b}, \quad \sin t\, dt = -\frac{dy}{b},$$

$$dO = 2a^2\pi\sqrt{\mu^2+\frac{\varepsilon^2 y^2}{b^2}}\cdot\left(-\frac{dy}{b}\right) = -\frac{2\pi a^2\mu}{b}\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon y}{\mu b}\right)^2}\, dy.$$

Das negative Vorzeichen kommt daher, weil die Oberfläche der Zone mit wachsendem y abnimmt.

Rechnet man aber die Zone, welche durch Rotation des Bogens AP und nicht jene, welche durch Rotation von bP entsteht, so ist das Zeichen aufzuheben, weil diese Oberfläche mit wachsendem y zunimmt.

Die zunächst zu bestimmende Oberfläche ist:

$$O_y = \frac{2\pi a^2\mu}{b}\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon y}{\mu b}\right)^2}\, dy.$$

Setzt man in dem Integral $\frac{\varepsilon y}{\mu b} = z$, so erhält man:

$$O_y = \frac{2\pi a^2 \mu^2}{\varepsilon} \int_0^{\frac{\varepsilon y}{\mu b}} \sqrt{1 + z^2}\, dz,$$

also (zufolge Formel 83):

$$O_y = \frac{2\pi a^2 \mu^2}{\varepsilon} \left\{ \frac{z}{2} \sqrt{1 + z^2} + \frac{1}{2} l(z + \sqrt{1 + z^2}) \right\}_0^{\frac{\varepsilon y}{\mu b}},$$

und schließlich:

$$O_y = \frac{\pi a^2 \mu^2}{\varepsilon} \left\{ \frac{\varepsilon y}{\mu b} \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon y}{\mu b}\right)^2} + l\left[\frac{\varepsilon y}{\mu b} + \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon y}{\mu b}\right)^2}\right] \right\}.$$

Hiebei ist

$$\mu = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Setzt man $y = b$, so erhält man nach Multiplication mit 2 die Oberfläche des Sphäroides

$$O_b = \frac{2\pi a^2 (1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon} \left\{ \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} + l\left(\frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}\right) \right\}$$

oder

$$O_b = 2\pi a^2 \left[ 1 + \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon} l \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \right].$$

Wird $\varepsilon = 0$, so geht das Ellipsoid in eine Kugel über und die Oberfläche richtig in

$$O_k = 2\pi a^2 . 2 = 4 a^2 \pi.^*)$$

5. Die Tractorie rotiere um die x-Axe. Es soll die Oberfläche ıch beiden Seiten ins Unendliche sich erstreckenden Rotations- be[illegible] werden. (Fig. 123.)

und [illegible] der

([illegible] AP

[illegible]s

d nämlich

$$\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon} l \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} l \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} - \varepsilon l \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} = 1.$$

gative Theil verschwindet, der positive aber nimmt die Form $\frac{0}{0}$ an, deren Wert

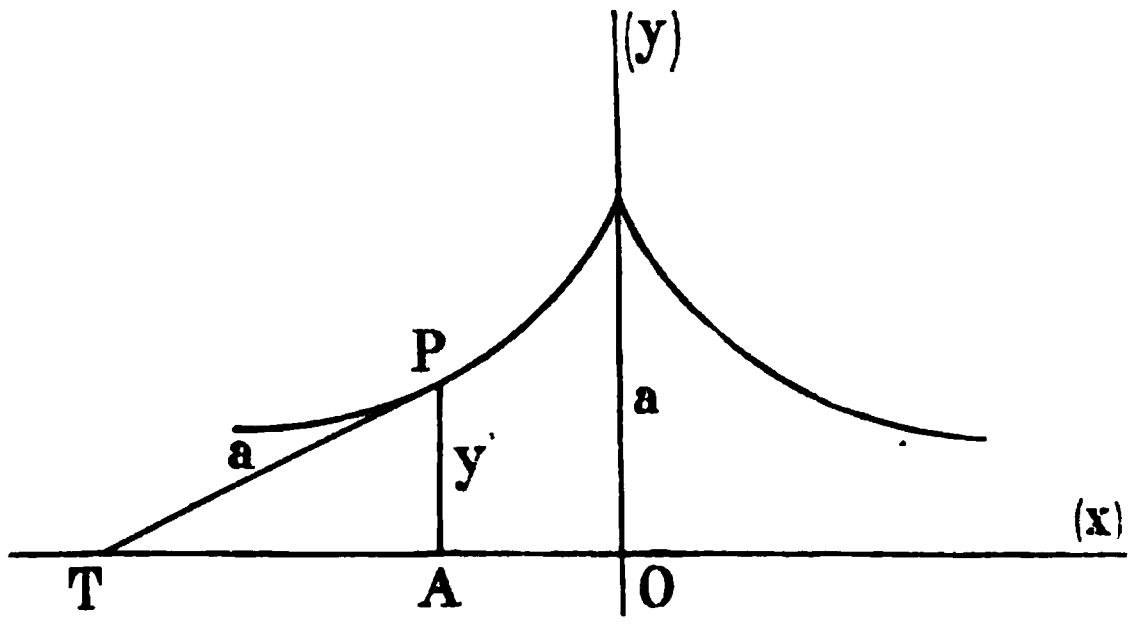
ıt werden kann.

$$\left[ \frac{1}{\varepsilon} l \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \right]_{\varepsilon = 0} = \left[ \frac{l \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}{2\varepsilon} \right]_{\varepsilon = 0} = \left[ \frac{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \frac{1 - \varepsilon + 1 + \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2}}{2} \right]_{\varepsilon = 0} = 1.$$

Aus der Eigenschaft dieser Curve

$$t = \frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2} = a$$

Fig. 123.




folgt:

$$\frac{y\,dx}{dy} \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}} = a,$$

$$y\,ds = a\,dy.$$

Demnach ist

$$O = 2 \cdot 2\pi \int_0^a a\,dy = 4\,a^2\,\pi.$$

Diese Oberfläche ist gleich jener einer Kugel vom Halbmesser a.

*2. Cylinderflächen.*

Eine Cylinderfläche, deren Erzeugenden parallel sind zur y-Axe, sei begrenzt durch ihre in der z x-Ebene liegende Leitlinie $P_1 P_2$ (Fig 124), die beiden Erzeugenden $P_1 R_1$ und $P_2 R_2$, ferner durch die Schnittcurve $R_1 R_2$ mit einer zweiten Cylinderfläche, deren Leitlinie $Q_1 Q_2$ in der x y-Ebene liegt, und deren Erzeugende zur z-Axe parallel sind. Es soll der Flächeninhalt der auf der Cylinderfläche liegenden Figur $P_1 P_2 R_2 R_1$ berechnet werden.

Das Flächenelement $P P' R' R$ kann als ein Rechteck mit den Seiten y und d s angesehen werden.

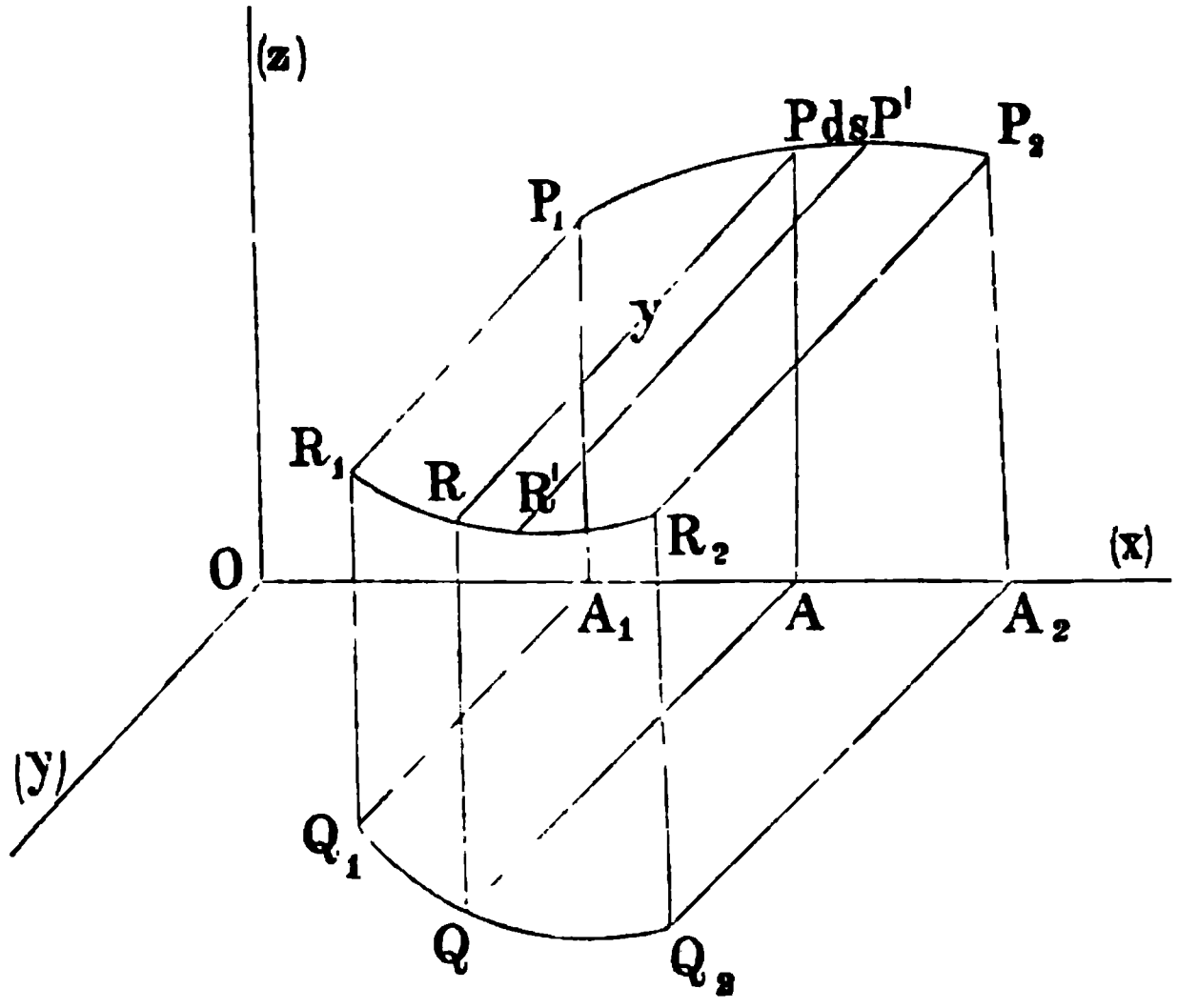
Man hat demnach als Oberflächenelement

$$dO = y\,ds$$

und demzufolge

$$\text{area } P P' R' R = O = \int_{x_1}^{x_2} y\,ds.$$

Fig. 124.

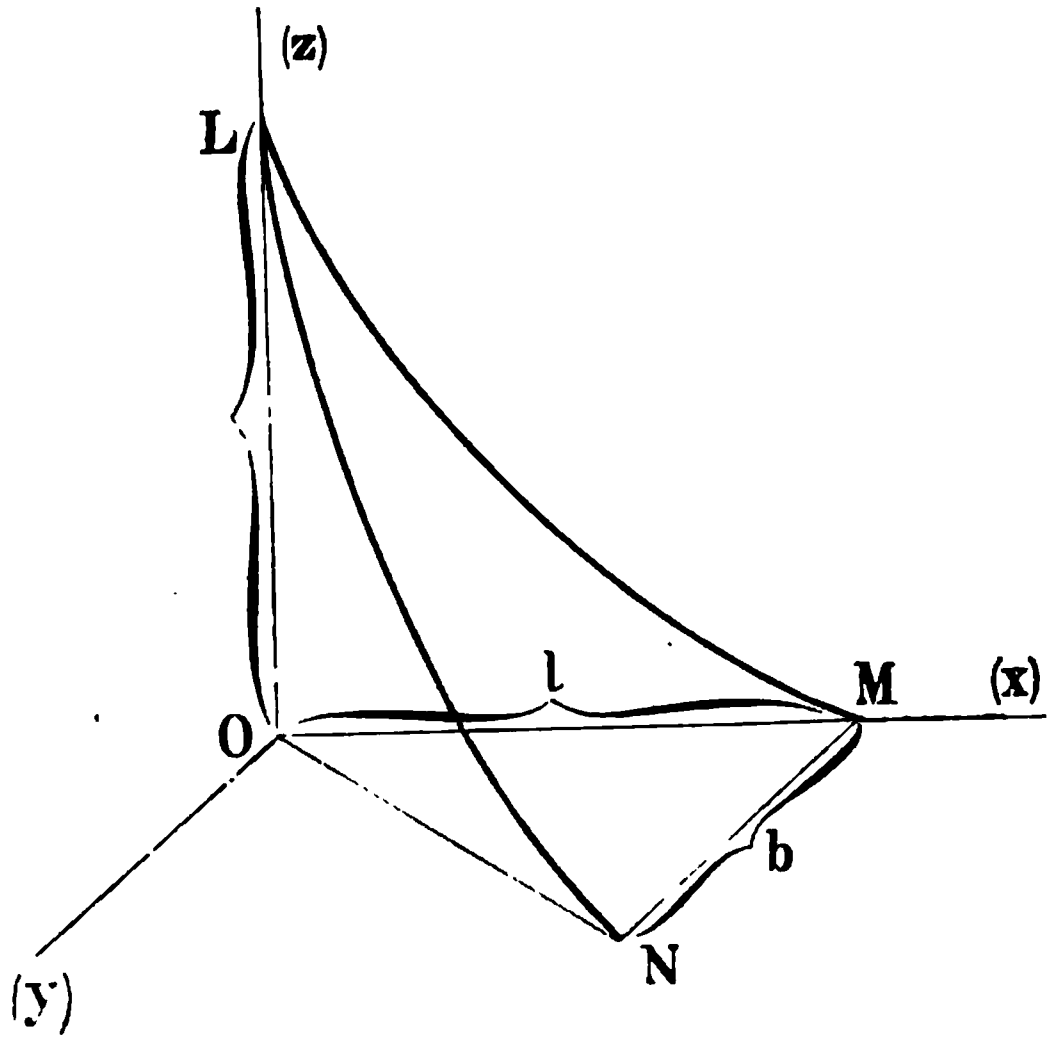



Darin muss y entsprechend der Gleichung der Curve $Q_1 Q_2$ und d s entsprechend der Gleichung von $P_1 P_2$ als Function von x ausgedrückt werden.

**Beispiele:**

1. Der Quadrant L M (Fig. 125) einer Astrois sei Leitlinie einer Cylinderfläche, welche von einer Ebene N O Z nach der Curve L N geschnitten wird.

Fig. 125.




Es soll der Flächeninhalt der Figur L M N berechnet werden.

Aus der Gleichung der Astrois

$$x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$$

folgt:

$$z = - \frac{z^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

$$1 + z'^2 = 1 + \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = l^{\frac{2}{3}}\, x^{-\frac{2}{3}},$$

$$ds = \sqrt{1 + z'^2}\, dx = l^{\frac{1}{3}}\, x^{-\frac{1}{3}}\, dx.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{l}$$

der Geraden ON als Leitlinie der zweiten durch die Ebene NOZ ersetzten Cylinderfläche erhält man:

$$y = \frac{b}{l}\, x.$$

Demnach ist

$$dO = y\, ds = \frac{b\, l^{\frac{1}{3}}}{l}\, x \,.\, x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \frac{b\, l^{\frac{1}{3}}}{l}\, x^{\frac{2}{3}}\, dx,$$

also

$$O = \frac{b\, l^{\frac{1}{3}}}{l} \int_0^l x^{\frac{2}{3}}\, dx = b\, l^{-\frac{2}{3}} \left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_0^l,$$

d. h.

$$O = \frac{3}{5}\, b\, l = \frac{6}{5}\, \frac{b\, l}{2}.$$

Die gesuchte Fläche beträgt also $\frac{6}{5}$ der Fläche des Dreieckes OMN.

2. An der Stelle der Astrois in der früheren Aufgabe befindet sich ein Viertelkreis vom Halbmesser a. Im übrigen ist die Aufgabe wie die vorige. (Fig. 126.)

Da jetzt

$$y = \frac{b}{a}\, x$$

die Gleichung der Geraden ist, geht der Ausdruck für das Oberflächendifferential über in

$$dO = y\, ds = \frac{b}{a}\, x\, ds.$$

Aus der Gleichung des Kreises

$$x^2 + z^2 = a^2$$

folgt:

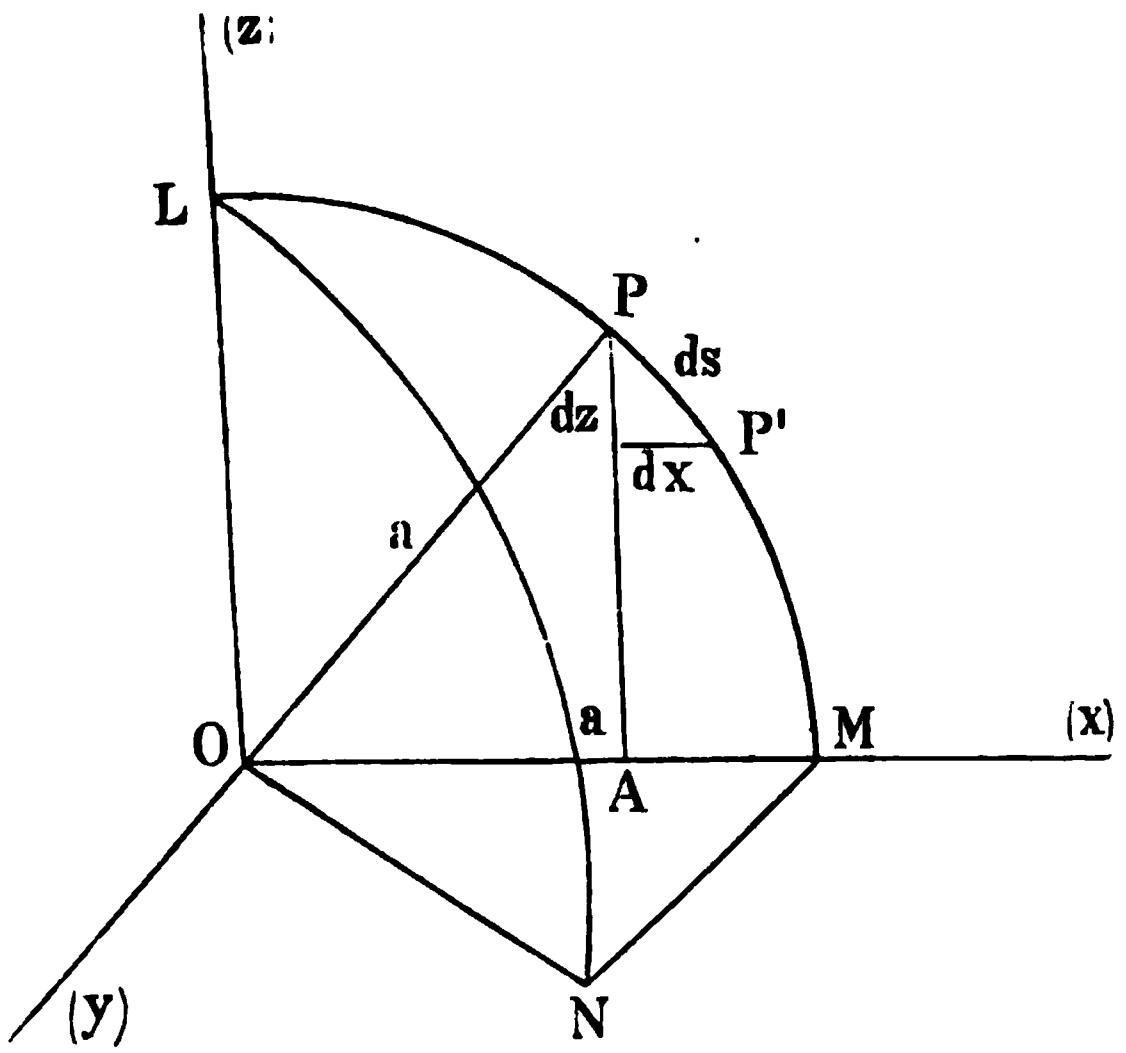
$$z' = -\frac{x}{z},$$

$$1 + z'^2 = \frac{x^2 + z^2}{z^2} = \frac{a^2}{z^2}.$$

also

$$ds = \frac{a}{z}\, dx.$$

Fig. 126.




Demnach ist

$$dO = b\,\frac{x}{z}\,dx = b\,\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

und

$$O = b\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\,b\left[\sqrt{a^2 - x^2}\right]_0^a = a\,b.$$

Diese Oberfläche ist also doppelt so groß, wie die Fläche des Dreieckes OMN.

# 7. Abschnitt.

## Cubatur und Complanation krummer Flächen in ganz allgemeinen Fällen.

Die Berechnung des Volumens von Körpern, die ganz oder theilweise von krummen Flächen begrenzt sind, ferner die Berechnung der Oberfläche geschlossener Figuren, welche auf einer krummen Fläche liegen, kann durch entsprechende Zerlegung der Körper, beziehungsweise der Flächen, auf gewisse einfache Aufgaben zurückgeführt werden, welche im folgenden behandelt und an Beispielen erläutert werden sollen.

### § 69. Unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten.

1. Die Aufgabe der Cubatur einer durch ihre Gleichung in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem gegebenen Fläche

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{oder} \quad z = f(x, y)$$

kann stets auf die Bestimmung des Volumens eines geraden Cylinders zurückgeführt werden, welcher zur Basis eine beliebige in der x y-Ebene gelegene Figur hat, und oben von einem Theile der krummen Fläche begrenzt wird.

Zur Berechnung des Volumens dieses Cylinders denkt man sich denselben, durch zur y z-Ebene parallele Ebenen in Schichten von der Dicke d x, zerlegt. Eine solche Schichte sei beispielsweise die zwischen den Querschnitten p q Q P und p′q′Q′P′ (Fig. 127) gelegene.

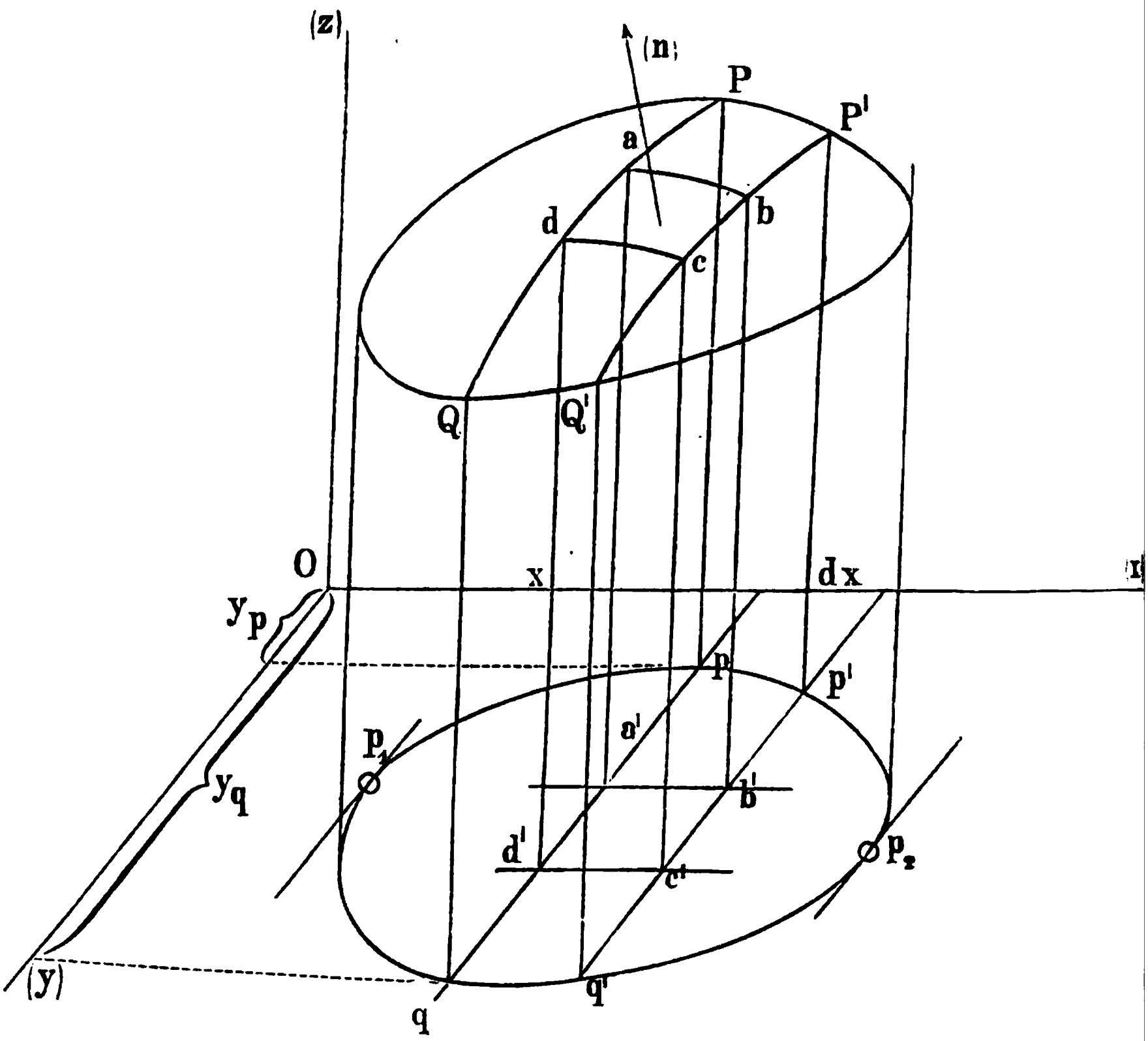
Jede dieser Schichten kann durch zur z x-Ebene parallele, in Abständen d y angeordnete Ebenen, in vierkantige stabförmige Prismen zerlegt werden. Jedes solche stabförmige Prisma, wie beispielsweise a′b′c′d′d c b a, hat ein Rechteck mit den Seitenlängen d x und d y zur Basis, und wird oben von dem Flächenelement a b c d im allgemeinen schief abgeschnitten.

Dieses Flächenelement kann aber mit unbeschränkter Genauigkeit als eben angesehen werden. (Tangentenebene in a.)

Die Länge der Kante a′a des Prismas ist das z des Flächenpunktes a, die übrigen Kanten sind von dieser nur um unendlich kleine Größen verschieden, so dass das Volumen dieses Prismas mit unbe-

schränkter Genauigkeit jenem gleich gesetzt werden kann, welches durch eine aus a parallel zur xy-Ebene geführte Ebene begrenzt wird.

Fig. 127.




Das Volumen eines Elementarprismas (Volumelement) ist demnach:

$$d^2 V = z \,.\, dx \,.\, dy.$$

Durch Summierung aller einer Schichte angehörigen Elementarprismen erhält man das Volum dieser Schichte.

Also wenn beispielsweise die früher angeführte Schichte in Betracht kommt, so ist ihr Volumen die Summe aller zwischen p und q gelegenen Elementarprismen, mithin:

$$dV = \int_{y_p}^{y_q} z \, dx \, dy.$$

Summiert man schließlich die Volumina aller solcher Schichten, welche der zu berechnende Cylinder enthält, so erhält man das Volumen desselben:

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y}^{y} z \, dx \, dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_2}^{y_1} z \, dy.$$

Die Grenzen $x_1$ und $x_2$ der zweiten Integration sind constant, und zwar sind sie die Abscissen der Punkte $P_1$ und $P_2$, von welchen der eine am nächsten, der andere am weitesten bezüglich der yz-Ebene liegt, weil in dem zwischen ihren Projectionen $p_1$ und $p_2$ befindlichen Raume alle zu summierenden Schichten enthalten sind.

Die Integration ist zuerst nach y auszuführen, wobei x in $z = f(x. y)$ als constant anzusehen ist. Eine Umkehrung der Reihenfolge der Integration wäre nur zulässig, wenn alle Integrationsgrenzen constant wären, was im allgemeinen nicht zutrifft.

2. Die für die Volumsberechnung gelegten Ebenen theilen die obere Begrenzungsfläche des zu berechnenden Cylinders in Elemente von der Form abcd die als eben und in der Tangentenebene der Punkte a liegend angesehen werden können.

Diese Oberflächenelemente haben somit dieselbe Neigung gegen die xy-Ebene wie die Flächennormale des betreffenden Punktes a gegen die z-Axe.

Die Projection des Oberflächenelements abcd ist aber das Rechteck a'b'c'd', mithin besteht zufolge des Projectionssatzes die Beziehung:

$$\text{area}\,(a'\,b'\,c'\,d') = \text{area}\,(a\,b\,c\,d)\cos(z\,n),$$

und weil

$$\text{area}\,(a'\,b'\,c'\,d') = dx \,.\, dy,$$

$$\cos(z\,n) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

so folgt. abgesehen vom Vorzeichen:

$$\text{area}\,(a\,b\,c\,d) = d^2 O = dx \,.\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Summiert man wieder alle in der Richtung eines Streifens gelegenen Oberflächenelemente und sodann die Oberflächen der Elementarstreifen, analog wie bei der Berechnung des Volumens, so erhält man die obere Begrenzungsfläche des Cylinders

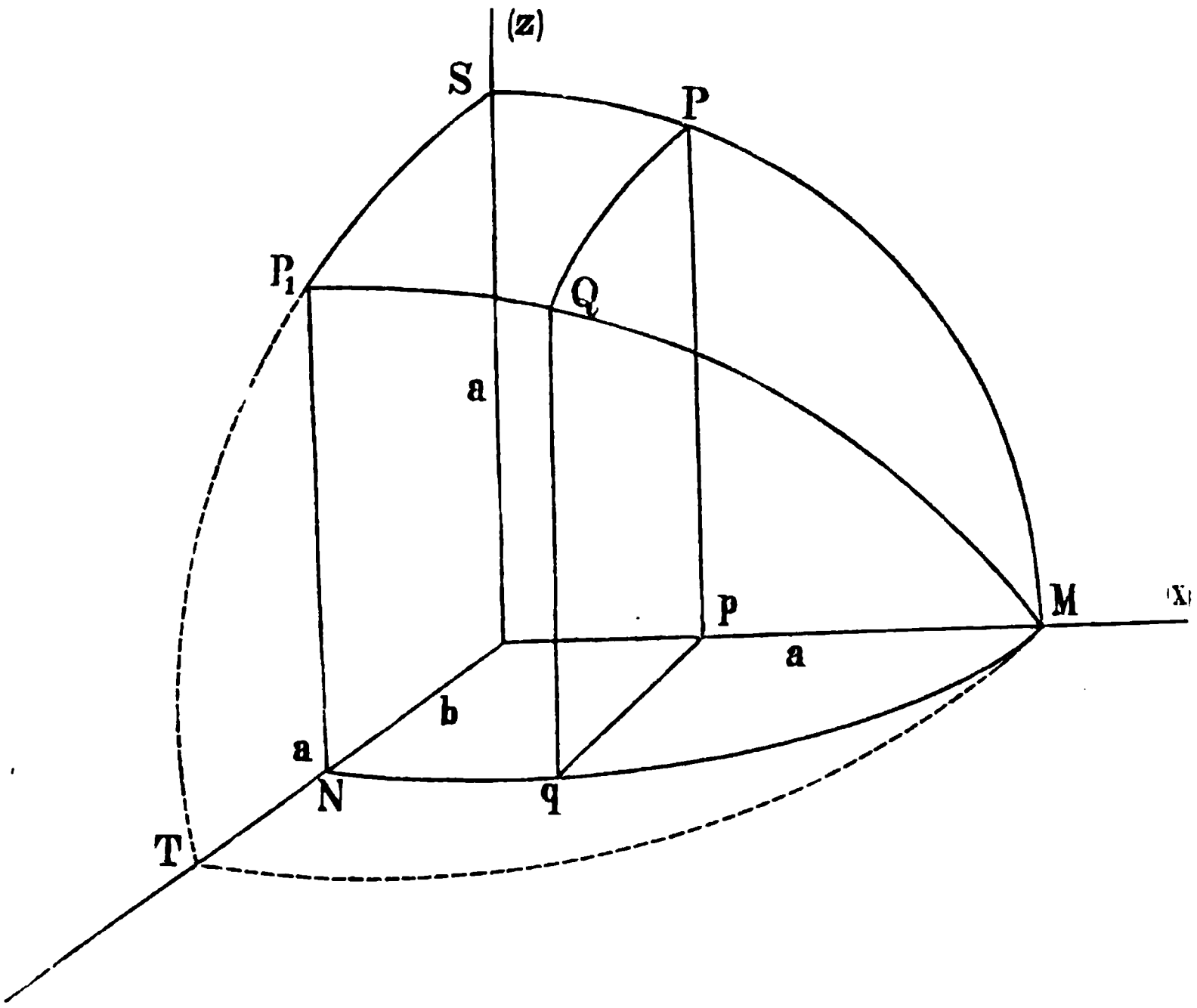
$$O = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_2}^{y_1} dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Bezüglich der Durchführung der Integration gilt selbstverständlich die bei der Volumberechnung gemachte Bemerkung.

**Beispiele:**

1. Ein in der x y-Ebene liegender Ellipsenquadrant M N (Fig. 128) ist die Leitlinie eines geraden Cylinders, welcher von einer aus dem

Fig. 128.




Ursprung geführten Kugel begrenzt wird, deren Schnittkreis mit der x y-Ebene die Ellipse in ihrem Scheitelpunkte M berührt.

Es ist das Volumen des Körpers $MNP_1SO$ und die Oberfläche der auf der Kugelfläche liegenden Figur $MSP_1$ zu berechnen.

Die Gleichung der Ellipse sei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Jene der Kugelfläche:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

oder

$$z = \sqrt{(a^2 - x^2) - y^2}.$$

Für diesen Fall ist $x_1 = 0$, $x_2 = a$, $y_p = 0$ und zufolge der Gleichung der Ellipse $y_q = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Also

$$V = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{(a^2 - x^2) - y^2}\, dy,$$

d. h.

$$V = \int_0^a dx \left[ \frac{y}{2}\sqrt{(a^2 - x^2) - y^2} + \frac{a^2 - x^2}{2} \cdot \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^a dx \left[ \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 (a^2 - x^2)} + \right.$$

$$\left. + (a^2 - x^2) \arcsin \frac{b}{a} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a dx \left[ \frac{b}{a}(a^2 - x^2)\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} + (a^2 - x^2) \arcsin \frac{a}{b} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[ \frac{b}{a^2}\sqrt{a^2 - b^2} + \arcsin \frac{b}{a} \right] \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx.$$

Nach Ausführung der zweiten Integration wird

$$V = \frac{1}{2}\left[ \frac{b}{a^2}\sqrt{a^2 - b^2} + \arcsin \frac{b}{a} \right] \frac{2a^3}{3},$$

mithin schließlich:

$$V = \frac{ab}{3}\sqrt{a^2 - b^2} + \frac{a^3}{3} \arcsin \frac{b}{a}$$

erhalten. Für die Berechnung der Fläche findet man zunächst:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} =$$

$$= \frac{a}{z} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2) - y^2}}.$$

Man erhält also:

$$O = a\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}},$$

$$O = a\int_0^a dx \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} = a \arcsin \frac{b}{a} \int_0^a dx.$$

demnach schließlich:

$$O = a^2 \arcsin \frac{b}{a}.$$

2. Ein auf dem in der x y-Ebene liegenden Kreise

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 - a^2 = 0 \quad \text{oder} \quad y = n \pm \sqrt{a^2-(x-m)^2}$$

aufstehender gerader Cylinder wird von einem hyperbolischen Paraboloid

$$z = \frac{x\,y}{c}$$

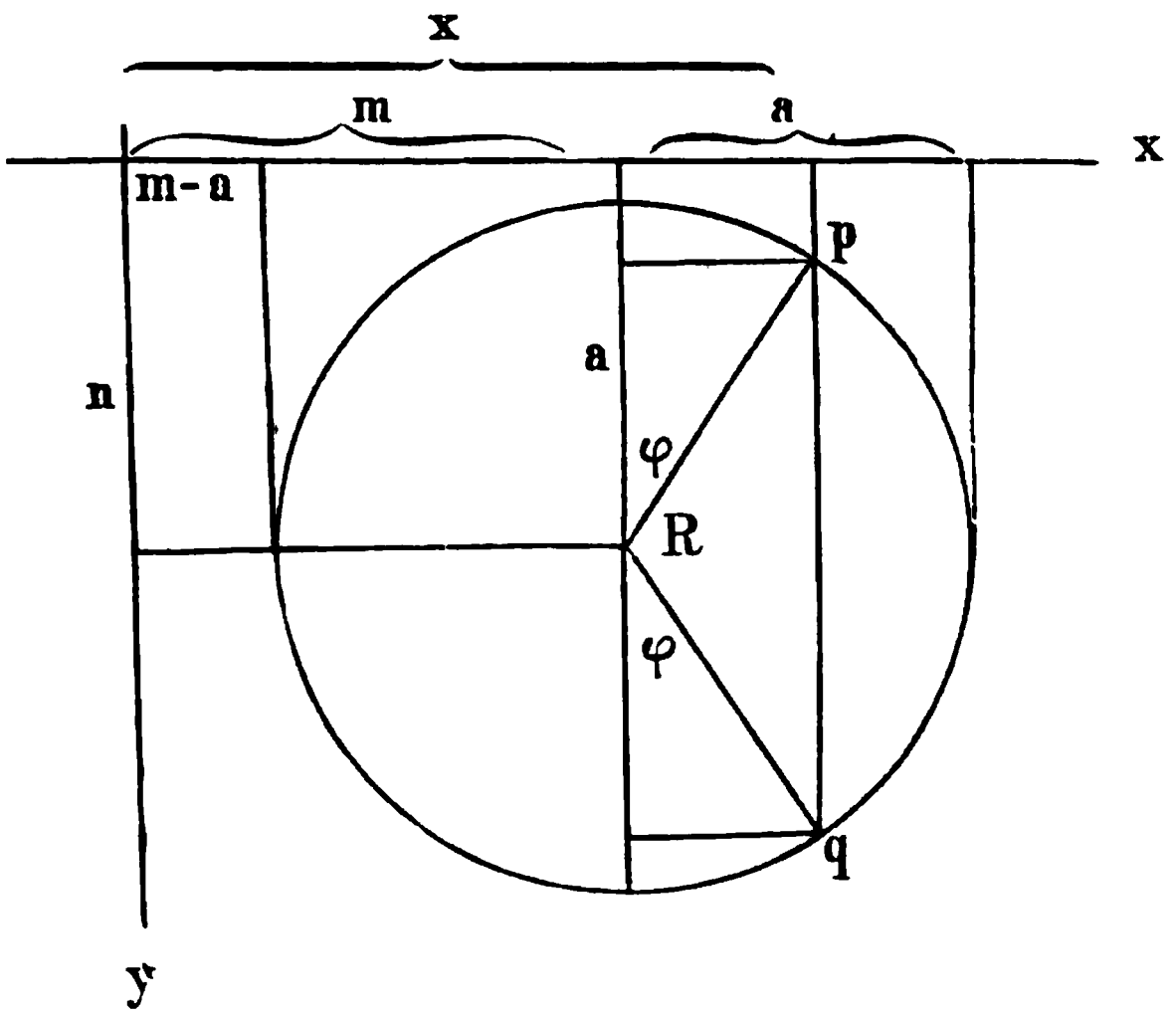
oben begrenzt.

Es ist das Volumen dieses begrenzten Cylinders zu berechnen. Hier ist

$$x_1 = m - a, \quad x_2 = m + a,$$

was der Fig. 129 entnommen werden kann, ferner zufolge der Gleichung des Kreises:

Fig. 129.



$$y_p = n - \sqrt{a^2 - (x - m)^2},$$

$$y_q = n + \sqrt{a^2 - (x - m)^2}.$$

Man erhält sonach:

$$V = \int_{m-a}^{m+a} dx \int_{n-\sqrt{a^2-(x-m)^2}}^{n+\sqrt{a^2-(x-m)^2}} \frac{xy}{c}\, dy$$

oder

$$V = \frac{1}{c}\int_{m-a}^{m+a} x\, dx \int_{n-\sqrt{a^2-(x-m)^2}}^{n+\sqrt{a^2-(x-m)^2}} y\, dy,$$

also

$$V = \frac{1}{c}\int_{m-a}^{m+a} x\, dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{n-\sqrt{a^2-(x-m)^2}}^{n+\sqrt{a^2-(x-m)^2}},$$

$$V = \frac{2n}{c}\int_{m-a}^{m+a} x\sqrt{a^2 - (x-m)^2}\, dx.$$

Zur weiteren Integration empfiehlt sich folgende Transformation: Aus der Figur folgt:

$$x - m = a\sin\varphi, \quad \text{also} \quad x = m + a\sin\varphi,$$

$$dx = a\cos\varphi\, d\varphi.$$

Wird $x = m - a$, so wird $a\sin\varphi = -a$, also $\sin\varphi = -1$, d. h $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, und wird $x = m + a$, dann wird analog $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Man hat demnach:

$$\int_{m-a}^{m+a} x\sqrt{a^2 - (x-m)^2}\, dx = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (m + a\sin\varphi)\cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$= a^2\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} m\cos^2\varphi\, d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} a\sin\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi\right\} =$$

$$= a^2 m\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = 2a^2 m\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = 2m\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,a^2,$$

also schließlich das gesuchte Volumen:

$$V = \frac{mn}{c}\,\pi a^2.$$

## § 70. Unter Voraussetzung gemischter Coordinaten.

1. Bei Anwendung gemischter Coordinaten wird ein Punkt P des Raumes dadurch bestimmt, dass die Polarcoordinaten r und $\varphi$ seiner Projection p. und sein Abstand z von der x y-Ebene angegeben wird.

Die Gleichung einer Fläche in gemischten Coordinaten wird demnach die Form haben:

$$F(z, r, \varphi) = 0 \quad \text{oder} \quad z = f(r, \varphi).$$

Die Aufgaben der Cubatur und Complanation lassen sich auch bei Anwendung dieser Coordinaten auf die Berechnung eines Cylinders, wie im Falle rechtwinkliger Coordinaten zurückführen.

Dieser Cylinder wird aber hier der Eigenthümlichkeit des Coordinatensystems entsprechend in etwas anderer Weise in die Elemente zerlegt.

Die Zerlegung in Schichten wird hier zweckmäßig durch Ebenen vorgenommen, welche durch die z-Axe gehen und miteinander den unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ (Fig. 130) bilden.

Eine derartige keilförmige Schichte sei beispielsweise jene zwischen den Querschnitten pqQP und p'q'Q'P' eingeschlossene.

Eine solche Schichte zerlegt man weiters am vortheilhaftesten durch concentrische Kreiscylinder, deren Axe die z-Axe ist und deren Radien sich um $dr$ voneinander unterscheiden in stabförmige Theile, wie beispielsweise a'b'c'd'dcba.

Die Grundfläche eines solchen stabförmigen Volumelementes kann als ein Trapez angesehen werden, dessen parallele Seiten $r\,d\varphi$ und $(r + dr)\,d\varphi$ sind, und dessen Höhe $dr$ beträgt. Der Flächeninhalt dieses Trapezes ist demnach:

$$\text{area}(a'b'c'd') = [r\,d\varphi + (r + dr)\,d\varphi]\frac{dr}{2} = r\,dr\,d\varphi + \frac{1}{2}dr^2\,d\varphi.$$

wofür mit unbeschränkter Genauigkeit

$$\text{area}(a'b'c'd') = r\,dr\,d\varphi$$

gesetzt werden kann, weil $\frac{1}{2}dr^2\,d\varphi$ als unendlich kleine Größe dritter Ordnung gegenüber $r\,dr\,d\varphi$ verschwindend klein ist.

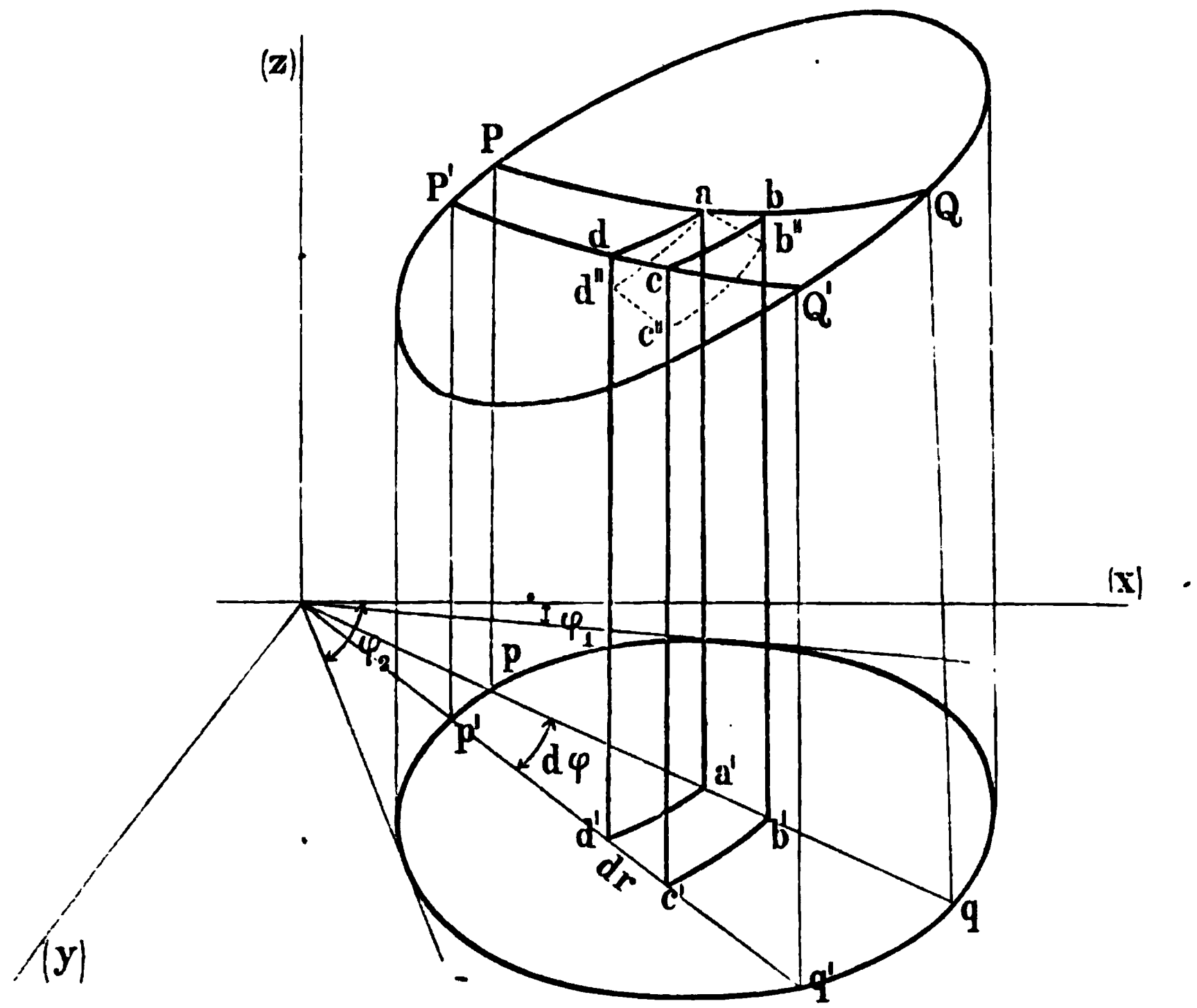
Der prismatische Stab kann nun analog wie im vorigen Falle oben als von einer zur xy-Ebene parallelen Ebene begrenzt angesehen werden, mithin ist sein Volumen:

$$d^2V = z \,.\, r\,dr\,d\varphi.$$

Summiert man alle Stäbe einer Schichte, wie beispielsweise derjenigen, welche zwischen p und q liegt, so erhält man das Volumen der Schicht:

$$dV = \int_{r_p}^{r_q} z\, r\, dr\, d\varphi,$$

Fig 180.




und durch Summierung aller im Cylinder enthaltenen Schichten das Volumen der letzteren:

$$V = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_p}^{r_q} z\, r\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_p}^{r_q} z\, .\, r\, .\, dr.$$

Die Grenzen der zweiten Integration $\varphi_1$ und $\varphi_2$ sind Constante, und zwar die Amplituden der aus dem Ursprung an die Leitlinie des Cylinders geführten Tangenten.

2. Die zur Berechnung des Volumens geführten Meridianebenen und concentrischen Cylinderflächen zerlegen die obere Begrenzungsfläche des Körpers in Elemente von der Gestalt a b c d.

Diese Elemente können als eben und in der Tangentenebene liegend angesehen werden; sie haben zur Projection auf die x y-Ebene die entsprechenden Trapeze a'b'c'd'.

Es besteht demnach auch hier die Beziehung:

$$\text{area}\,(a'b'c'd') = \text{area}\,(a\,b\,c\,d)\cos(z\,n),$$

woraus

$$\text{area}\,(a\,b\,c\,d) = d^2O = \frac{r\,.\,d\varphi\,.\,dr}{\cos(z\,n)}$$

folgt.

Hiebei muss für die Integration $\cos(z\,n)$ als Function von r und $\varphi$ ausgedrückt werden.

Durch Summierung der Elemente eines Streifens erhält man:

$$dO = \int_{r_p}^{r_q} \frac{r\,dr\,d\varphi}{\cos(z\,n)};$$

und durch Summierung aller Streifen die Oberfläche:

$$O = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_p}^{r_q} \frac{r\,dr\,d\varphi}{\cos(z\,n)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_p}^{r_q} \frac{r\,dr}{\cos(z\,n)}.$$

Sowohl bei der Berechnung von V, als auch bei der Berechnung von O muss zuerst die Integration nach r ausgeführt werden. Das Vertauschen der Reihenfolge der Integration ist nur zulässig, wenn alle Grenzen constant sind.

**Beispiel:**

Zwei über den Durchmessern NO und OM (Fig. 131, NO = OM = a beschriebene Kreise sind Grundflächen zweier gerader Kreiscylinder, welche oben von einer aus dem Ursprunge mit dem Radius a beschriebenen Kugelfläche begrenzt werden.

Es ist das Volumen dieser beiden congruenten cylindrischen Körper, und die Oberfläche ihrer oberen Begrenzungsflächen zu bestimmen.

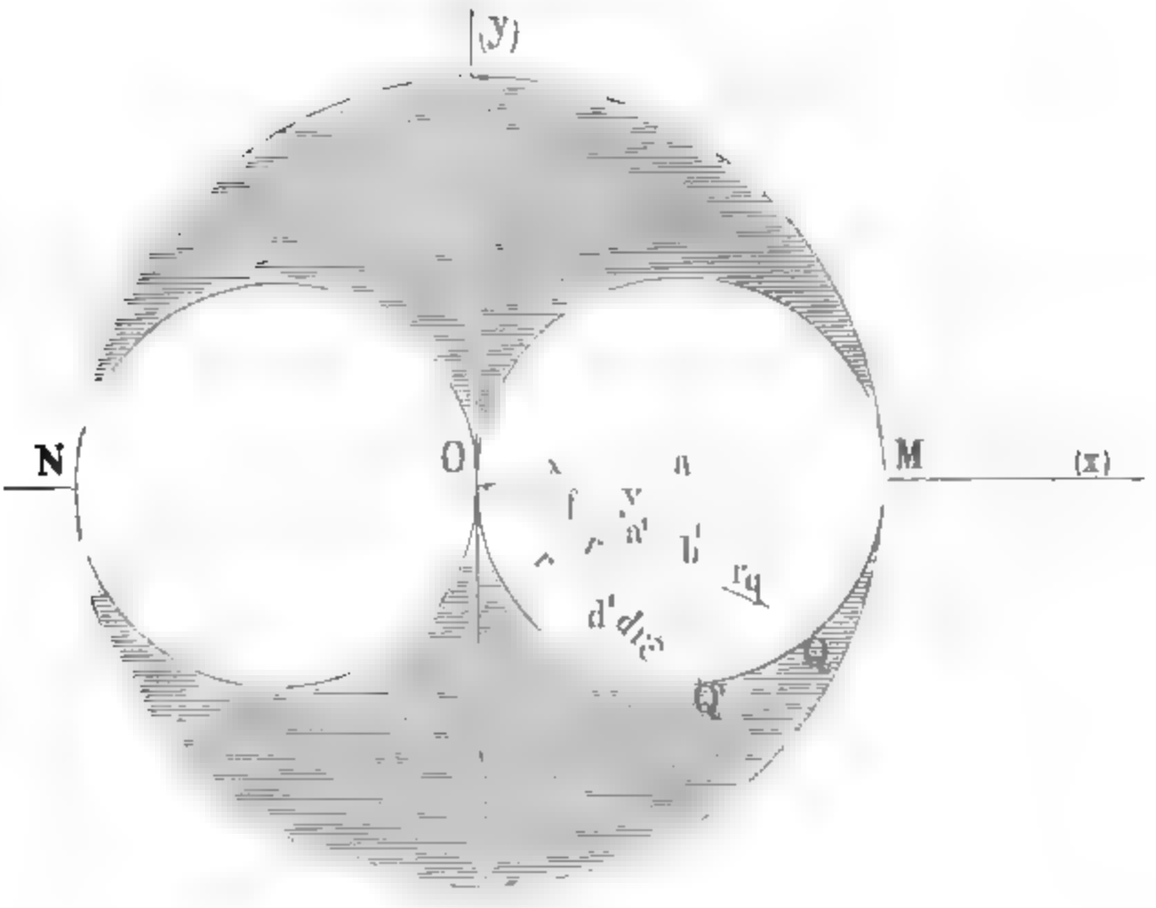
Wegen der symmetrischen Lage der z x- und y z-Ebene bezüglich dieser Körper genügt es, den im ersten Quadranten gelegenen Körpertheil zu rechnen, welcher dann vierfach zu nehmen ist. Der Punkt A der Kugel, dessen Projection auf die x y-Ebene a' ist, habe die Coordinaten x, y und z. Zwischen diesen besteht die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0;$$

nun ist aber:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Fig. 181.




mithin hat man:

$$r^2 + z^2 - a^2 = 0$$

oder

$$z = \sqrt{a^2 - r^2}$$

als Gleichung der Kugel in gemischten Coordinaten.

Die bei der Berechnung des Volumenviertels auftretenden Integrationsgrenzen sind:

$$r_p = 0 \qquad \varphi_1 = 0$$

$$r_q = OQ = a\cos\varphi \qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Demnach ist das ganze Volumen:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r\sqrt{a^2 - r^2}\, dr,$$

also

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left\{ -\frac{(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right\}_0^{a\cos\varphi} = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \sin^3\varphi]\, d\varphi$$

und schließlich:

$$V = \frac{4a^3}{3}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3}\pi a^3 - \frac{8}{9} a^3.$$

Da nun $\frac{2}{3}\pi a^3$ das Volumen der Halbkugel vom Radius a ist, so muss $\frac{8}{9} a^3$ das Volum des Körpers sein, der nach Entfernung der beiden cylindrischen Körper von der Halbkugel erübrigt, und dessen Grundriss in der Figur durch Schraffierung kenntlich gemacht ist.

Dieser Körperrest beträgt $\frac{1}{9}$ eines Würfels von der Seite 2a.

Zur Berechnung der oberen Begrenzungsfläche muss zunächst $\cos(z\,n)$ ermittelt werden.

$$\cos(z\,n) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Aus der Gleichung der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

folgt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

demnach:

$$\cos(z\,n) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}}} = -\frac{z}{a} = -\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a}.$$

Daher abgesehen vom Vorzeichen die Oberfläche

$$O = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left\{ -\sqrt{a^2 - r^2} \right\}_0^{a\cos\varphi}.$$

$$O = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, (a - a\sin\varphi) = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\varphi)\, d\varphi = 4a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

und schließlich:

$$O = 2\,a^2\pi - 4\,a^2.$$

Nun ist aber $2\,a^2\pi$ die Oberfläche der Halbkugel, mithin ist $4\,a^2$ die Oberfläche, welche von der Halbkugel erübrigt, wenn die beiden Ausschnitte der Cylinder entfernt werden; diese ist also gleich der Fläche eines Quadrates von der Seite $2\,a$.

## § 71. Unter Voraussetzung von Polarcoordinaten.

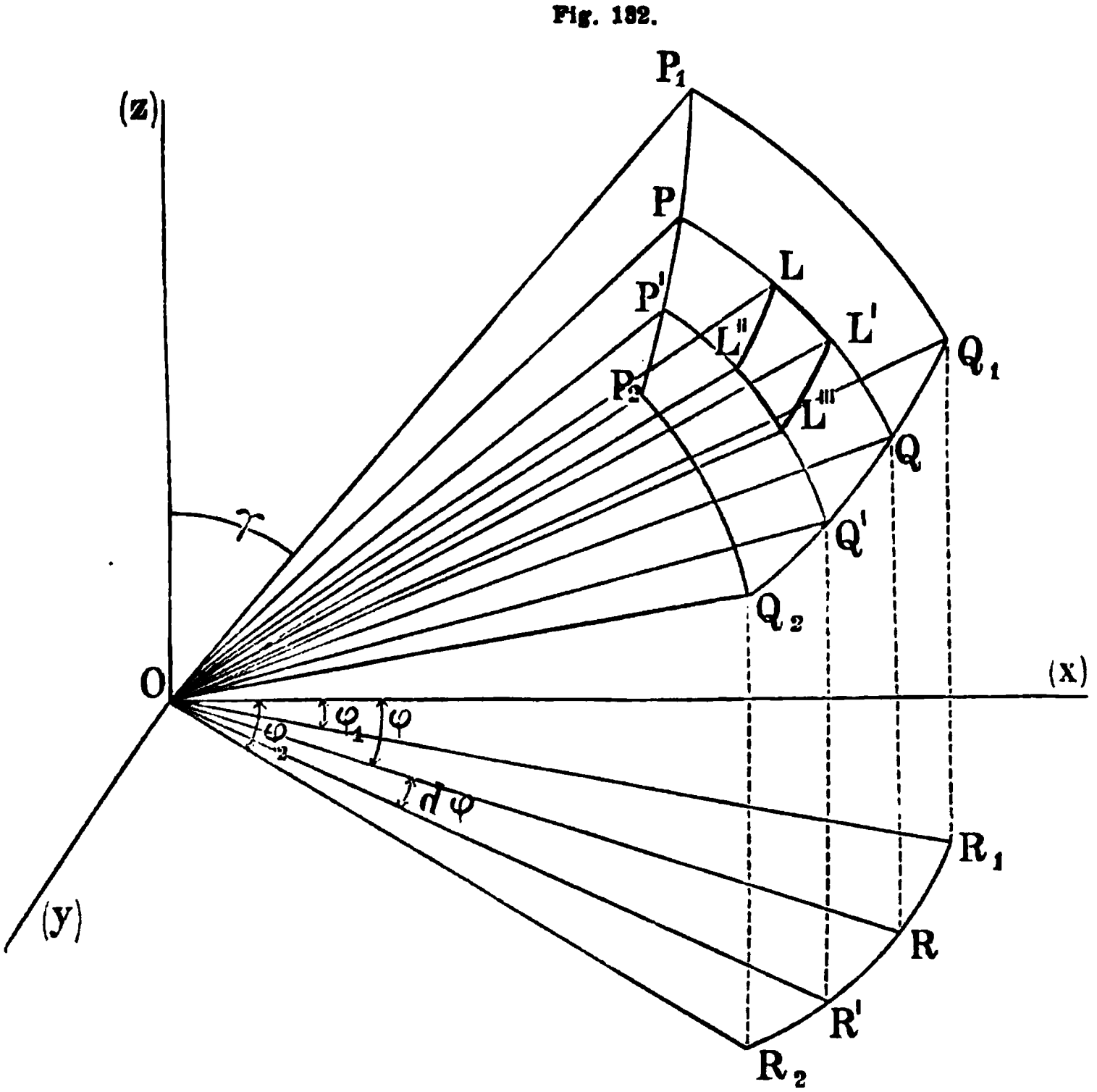
1. Entsprechend der Eigenthümlichkeit der Polarcoordinaten kann jede Aufgabe der Cubatur und Complanation auf folgende einfache zurückgeführt werden.

Gegeben sind zwei Meridianebenen

$$R_1\,O\,Z \text{ und } R_2\,O\,Z,$$

welche mit der z x-Ebene die Winkel $\varphi_1$ und $\varphi_2$ bilden (Fig. 132).

Fig. 132.




Ferner zwei Kegelflächen $O\,P_1\,P_2$, $O\,Q_1\,Q_2$, deren Mittelpunkte im Ursprung liegen.

Der von diesen vier Flächen gebildete pyramidenförmige Raum wird von einer beliebigen Fläche $P_1 P_2 Q_2 Q_1$ begrenzt, deren Gleichung

$$r = f(\gamma, \varphi)$$

gegeben ist.

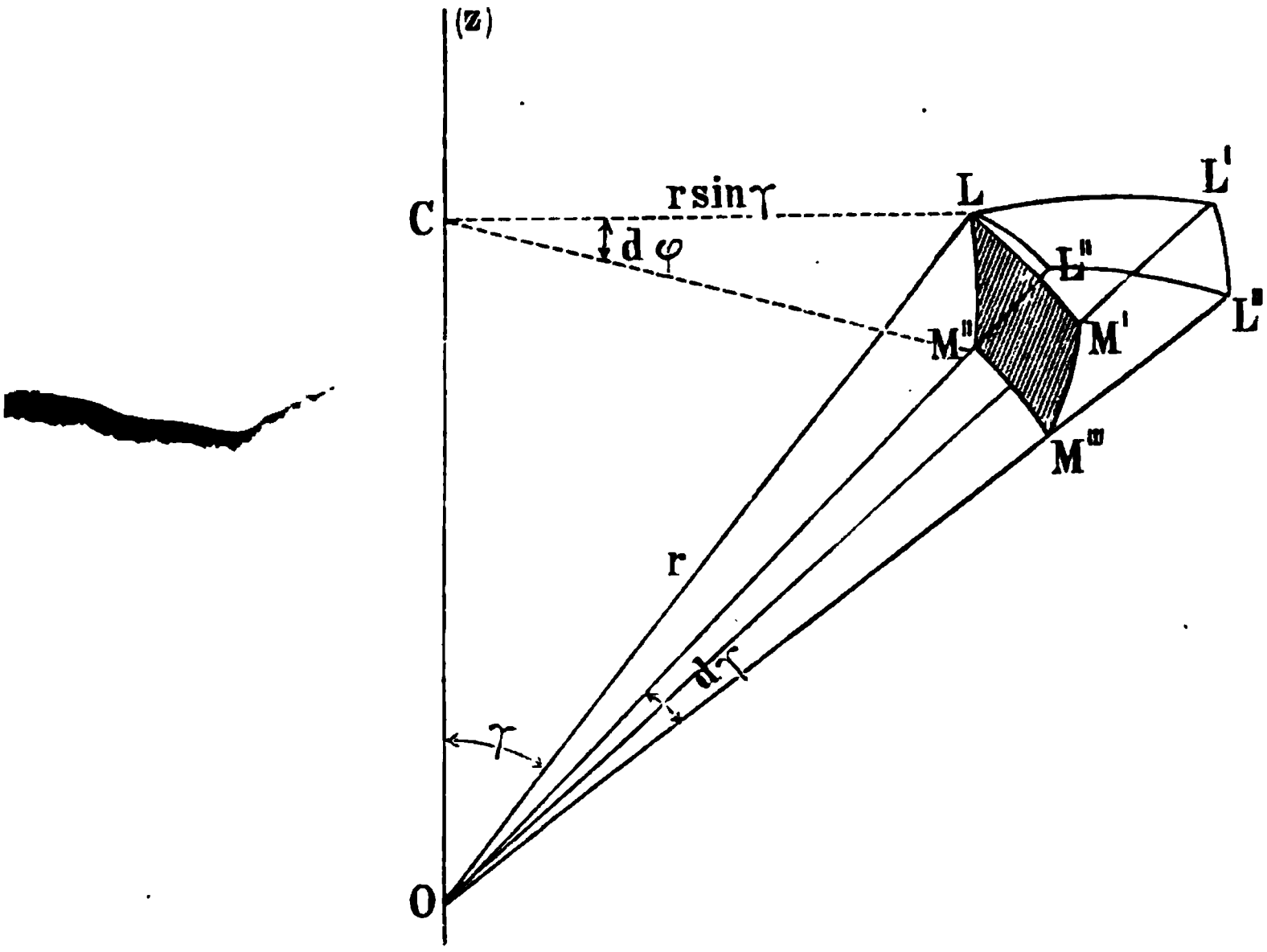
Es soll das Volumen dieses pyramidenförmigen Körpers und die Oberfläche der auf der krummen Fläche gelegenen Figur $P_1 P_2 Q_2 Q_1$ berechnet werden.

Zur Berechnung des Volumens denkt man sich den Körper durch Meridianebenen, die miteinander Winkel von der Größe $d\varphi$ bilden, in keilförmige Schichten von der Gestalt wie beispielsweise P Q Q' P' O zerlegt.

Denkt man sich ferner diese Schichten durch Rotationskegelflächen mit der z-Axe als Axe, deren Öffnungswinkel sich um $d\gamma$ voneinander unterscheiden in pyramidenförmige Körper von der Gestalt O L L' L'' L''' zerlegt, so erhält man Körperelemente, deren Volumen leicht ausgedrückt werden kann.

Dieses Körperelement kann mit unbeschränkter Genauigkeit durch die gerade Pyramide L M' M'' M''' (Fig. 133) ersetzt werden.

Fig. 133.




deren Basis sich in einer durch L aus dem Ursprunge geführten Kugelfläche befindet und als ebenes Rechteck angesehen werden kann.

Da nun die Seiten der Basis

$$LM'' = r \sin\gamma \, d\varphi, \qquad M''M''' = r \, d\varphi$$

sind, und die Höhe der Pyramide gleich r ist, hat sie das Volumen:

$$d^2V = \frac{1}{3} r^3 \sin\gamma \, . \, d\gamma \, . \, d\varphi.$$

Summiert man alle Elementarpyramiden einer Schichte (von P bis Q), so erhält man das Volumen der keilförmigen Schichte:

$$dV = \frac{1}{3} \int_{\gamma_p}^{\gamma_q} r^3 \sin\gamma \, . \, d\gamma \, . \, d\varphi.$$

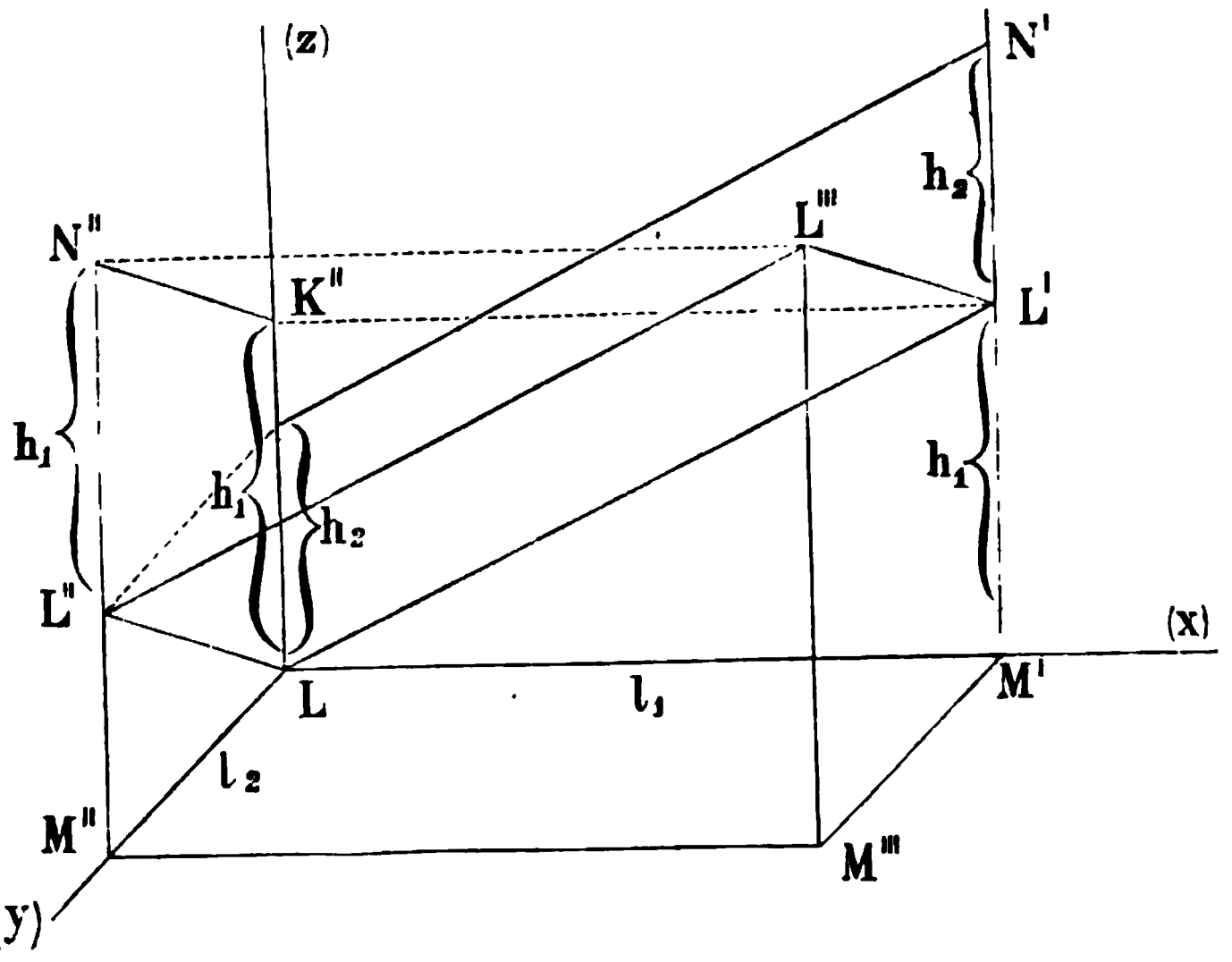
und nach Summierung aller zwischen den Meridianebenen $R_1 OZ$ und $R_2 OZ$ liegenden Schichten das gesuchte Volumen des Körpers $OP_1P_2Q_2Q_1$

$$V = \frac{1}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\gamma_p}^{\gamma_q} r^3 \sin\gamma \, . \, d\gamma \, . \, d\varphi = \frac{1}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\gamma_p}^{\gamma_q} r^3 \sin\gamma \, . \, d\gamma.$$

2. Bei der Berechnung der Fläche macht man vom Projectionssatze Gebrauch: »Das Quadrat der Fläche einer ebenen Figur ist gleich der Summe der Quadrate der Flächeninhalte ihrer Projectionen auf drei zu einander senkrechte Projectionsebenen.«

Wird also ein auf dem Rechtecke $LM'M''M'''$ stehendes gerades Prisma (Fig. 134)

Fig. 134.




von einer Ebene nach dem Parallelogramm $LL'L'''L''$ geschnitten, so sind die Inhalte der Projectionen des letzteren auf die Coordinatenebenen:

$$\text{area}\,(L\,M'\,M'''\,M'') = l_1 \,.\, l_2,$$

$$\text{area}\,(L\;L'\;N'\;K') = h_2 \,.\, l_1,$$

$$\text{area}\,(L\;L''\,N''\,K'') = h_1 \,.\, l_2.$$

Demnach der Flächeninhalt des Parallelogramms:

$$\text{area}\,L\,L'\,L'''\,L'' = \sqrt{l_1^{\,2}\,l_2^{\,2} + h_2^{\,2}\,l_1^{\,2} + l_2^{\,2}\,h_1^{\,2}}.$$

Durch die zur Volumberechnung geführten Flächen wird die zu berechnende Oberfläche in Elemente von der Gestalt $L\,L'\,L'''\,L''$ zerlegt, deren Projectionen auf eine aus dem Ursprung durch L geführte Kugelfläche die entsprechenden Rechtecke $L\,M'\,M'''\,M''$ sind.

Der Körper $L\,M'\,M'''\,M''\,L''\,L'''\,L'\,L$ kann nun mit unbeschränkter Genauigkeit mit dem zuvor besprochenen durch eine Ebene schief geschnittenen Prisma identificiert werden.

Die Basis des Prismas wird durch die Seiten

$$r \sin\gamma \,d\varphi = l_1 \quad \text{und} \quad r\,d\gamma = l_2$$

bestimmt. An die Stelle der Größen $h_1$ und $h_2$ treten die partiellen Differentiale $d_\varphi r$ und $d_\gamma r$.

Demzufolge ist die Oberfläche des Elementes:

$$\text{area}\,L\,L''\,L'''\,L'' = d^2O = \sqrt{(r^2 \sin\gamma\, d\varphi\, d\gamma)^2 + (r\,d\gamma\, d_\varphi r)^2 + (r \sin\gamma\, d_\varphi r\, d_\gamma r)^2}$$

$$d^2O = \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \gamma}\right)^2\right] \sin^2\gamma + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2}\, r \,.\, d\varphi \,.\, d\gamma.$$

Summiert man nun alle Elemente eines durch die Schichte herausgeschnittenen Streifens, so erhält man die Oberfläche desselben

$$dO = \int_{\gamma_p}^{\gamma_q} r\,d\varphi\,d\gamma \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \gamma}\right)^2\right] \sin^2\gamma + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2}$$

und durch Summierung aller Streifen die gesuchte Oberfläche

$$O = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\gamma_p}^{\gamma_q} r\,d\gamma \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \gamma}\right)^2\right] \sin^2\gamma + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2}.$$

Über die Reihenfolge der Integration gilt selbstverständlich das in beiden vorangehenden Fällen Gesagte.

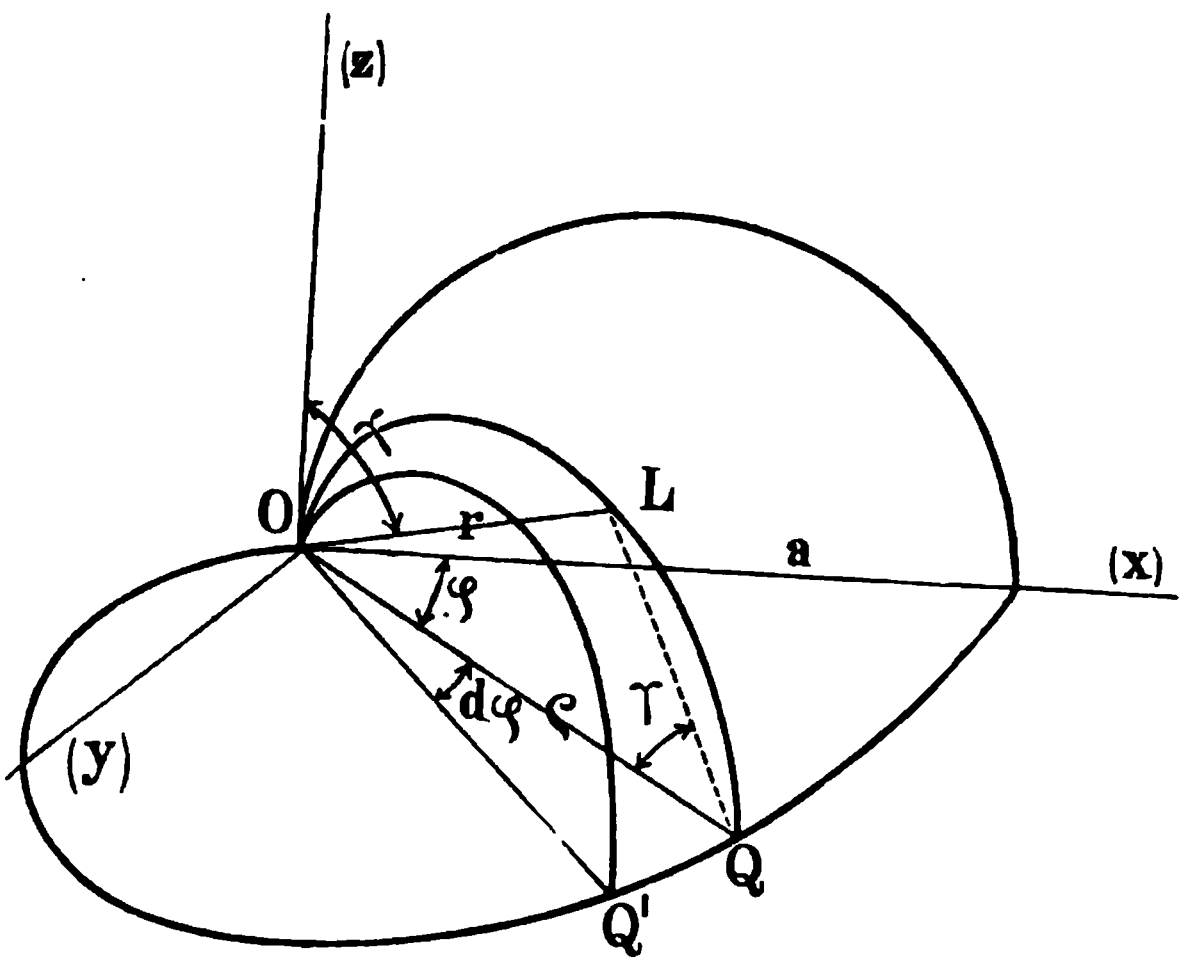
### Beispiel:

In der xy-Ebene sei eine Cardioide gegeben:

$$\rho = a\,(1 - \cos\varphi).$$

Führt man über jedem Radiusvector $\rho$ als Durchmesser einen Kreis (Fig. 135) n der zur x y-Ebene senkrechten Ebene, so bildet die Gesammtheit aller dieser Kreise eine wulstförmige Fläche.

Fig. 135.




Es ist das Volumen des von dieser Fläche eingeschlossenen Körpers und ihre )berfläche zu berechnen.

Aus der Figur ist zu ersehen, dass

$$r = \rho \sin \gamma.$$

Demnach ist die Gleichung dieser Fläche

$$r = a(1 - \cos \varphi) \sin \gamma.$$

Die Integrationsgrenzen für den vierten Theil des Körpers oder Flächeninhaltes ind,

$$\varphi_1 = 0; \qquad \varphi_2 = \pi,$$

$$\gamma_p = 0; \qquad \gamma_q = \frac{\pi}{2},$$

as aus der Figur zu erkennen ist. Man erhält demzufolge

$$V = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \varphi)^3 \sin^4 \gamma \, d\gamma =$$

$$= \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^3 \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \gamma \, d\gamma,$$

also mit Rücksicht auf Formel 113

$$V = \frac{4}{3} a^3 \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi)^3 \, d\varphi = \frac{a^3 \pi}{4} \int_0^{\pi} \left(2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right)^3 d\varphi$$

oder

$$V = 2 a^3 \pi \int_0^{\pi} \cos^6 \frac{\varphi}{2} \, d\varphi = 4 a^3 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 z \, dz$$

und mit Rücksicht auf 114 und 113 schließlich:

$$V = 4 a^3 \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\pi}{2} = \frac{5}{8} \pi^2 a^3.$$

Für die Berechnung der Oberfläche gibt die Gleichung

$$r = a (1 - \cos\varphi) \sin\gamma$$

die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = a \sin\varphi \sin\gamma,$$

$$\frac{\partial r}{\partial \gamma} = a (1 + \cos\varphi) \cos\gamma.$$

Man hat also:

$$\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right] \sin^2\gamma + \left(\frac{\partial r}{\partial \gamma}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{[a^2 (1 + \cos\varphi)^2 \sin^2\gamma + a^2 (1 + \cos\varphi)^2 \cos^2\gamma] \sin^2\varphi + a^2 \sin^2\varphi \sin^2\gamma}$$

$$= a \sin\gamma \sqrt{(1 + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = a \sin\gamma \sqrt{2 (1 + \cos\varphi)}$$

$$= a \sin\gamma \sqrt{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = 2 a \sin\gamma \cos \frac{\varphi}{2},$$

mithin die ganze Oberfläche als vierfaches des Viertels:

$$O = 4 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a (1 + \cos\varphi) \sin\gamma \cdot 2 a \sin\gamma \cos \frac{\varphi}{2} \, d\gamma.$$

$$O = 4 \cdot 2 a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi) \cos \frac{\varphi}{2} \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \gamma \, d\gamma.$$

Nach Berücksichtigung von 113 erhält man:

$$O = 4 \,.\, 2\,a^2 \,\frac{1}{2} \,.\, \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi) \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4\,a^2\,\pi \int_0^{\pi} \cos^3\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

oder

$$O = 4 \,.\, 2\,a^2\,\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 z\, dz;$$

also schließlich zufolge 114 und 113a

$$O = 8\,a^2\,\pi \,.\, \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\,(4\,a^2\,\pi),$$

d. h. die Oberfläche beträgt $\frac{4}{3}$ der Oberfläche einer Kugel vom Radius a.

# DRITTER THEIL.

# Differentialgleichungen.

## § 72. Grundbegriffe.

1. Die bisher durchgeführten Integrationen bezogen sich auf entwickelte Differentiale von der Form

$$\mathrm{d}\,y = f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

aus welchen sich direct

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

ergeben hat.

Zahlreiche Aufgaben der Mathematik, Mechanik, Physik etc. führen zu Gleichungen, welche nebst beiden Variablen x und y die Differentialquotienten $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}, \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}\,x^3} \ldots$ der unabhängigen Variablen enthalten, aus welchen dann y als Function von x auszudrücken ist.

Man nennt solche Gleichungen **Differentialgleichungen**. Ihre allgemeine Form ist:

$$F(x, y, y', y'', y''' \ldots) = 0.$$

Eine Differentialgleichung ist von der $n^{ten}$ Ordnung, wenn der darin auftretende höchste Differentialquotient die Ordnungszahl n hat. Sie ist vom $p^{ten}$Grade, wenn darin der höchste Differentialquotient zur Potenz p erhoben ist.

Die aus Differentialgleichungen abzuleitenden Gleichungen, welche x und y, aber keine Differentialquotienten mehr enthalten, werden **Integralgleichungen** oder kurzweg **Integrale** derselben genannt.

So hat z. B. die Eigenschaft der Tractorie, dass ihr Tangentenstück constant ist, zur Aufstellung der Differentialgleichung dieser Curve

$$a = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2} \quad \text{oder} \quad a\,y' - y\sqrt{1 + y'^2} = 0$$

geführt, welche nicht direct integrabel ist, und gewisse Umformung erfahren müsste, wenn die eigentliche Gleichung der Curve, d. h. das Integral der Differentialgleichung ermittelt werden sollte.

Man kann leicht aus gegebenen Gleichungen verschiedene Differentialgleichungen ableiten, welche jedoch als gleichbedeutend anzusehen sind.

So findet man durch Differentiation der Gleichung

$$y = \sin x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

oder

$$dy = \cos x \, dx,$$

woraus direct durch Integration die gegebene Gleichung erhalten wird.

Da aber

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$$

ist, so kann man auch schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2},$$

und hat damit eine andere Differentialgleichung erhalten, welche erst nach gewisser Vorbereitung integriert werden kann, dann aber wieder die ursprüngliche Gleichung gibt.

Da bei der Ableitung einer Differentialgleichung Constante entfallen können, müssen bei jedesmaliger Integration Constante hinzugefügt werden, um das Resultat möglichst allgemein zu machen.

Aus der Gleichung

$$y = c\, e^{\arcsin x}$$

folgt:

$$\frac{dy}{dx} = c\, e^{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Hierin kann man y für $c\, e^{\arcsin x}$ setzen und erhält

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}},$$

eine Differentialgleichung, welche die Constante c nicht enthält. Gelingt es also, aus dieser Gleichung die Integralgleichung abzuleiten, so muss offenbar in die letztere die Constante c wieder hineingebracht werden, wenn sie dieselbe Allgemeinheit haben soll, wie die Gleichung, von der ausgegangen wurde.

2. Die Elimination willkürlicher Parameter ist das einfachste Mittel zur Ableitung von Differentialgleichungen aus gegebenen Integralgleichungen.

Ist

$$F(x, y, c) = 0$$

eine gegebene, die willkürliche Constante c enthaltende Gleichung. so erhält man eine diese Constante nicht enthaltende Differentialgleichung. wenn man aus ihr und ihrem Differential

$$dF(x, y, c) = 0$$

die Constante eliminiert.

Kann die Gleichung nach c aufgelöst werden, und gibt

$$c = \Phi(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1a$$

so fällt durch einfache Differentiation dieser Auflösung des Parameters c hinaus, und man erhält:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

die den Parameter c nicht enthaltende Differentialgleichung der ursprünglichen Gleichung.

Sind x und y Punktcoordinaten in Bezug auf ein ebenes rechtwinkliges Coordinatensystem, so stellt die Gleichung

$$F(x, y, c) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1$$

eine Curvenschar vor. Die den Parameter nicht enthaltende Differentialgleichung derselben

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 \text{ oder } \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy = 0$$

drückt, weil sie den Parameter nicht enthält, eine allen Curven der Schar gemeinschaftliche Eigenschaft aus, und zwar die Beziehung. welche in irgend einem Punkte dieser Curven, zwischen den Coordinaten des Punktes und der Richtung der Tangente in demselben besteht.

Eine solche Differentialgleichung ist eine »Differentialgleichung erster Ordnung«, weil sie keinen höheren Differentialquotienten als den ersten enthält.

Von dieser Differentialgleichung gelangt man zur ursprünglichen Gleichung durch einen Integrationsprocess, bei welchem eine willkürliche Constante hinzutreten muss.

Die erhaltene Stammgleichung ist das allgemeine Integral der abgeleiteten Differentialgleichung; wenn die willkürliche Constante specielle Werte annimmt, entstehen daraus particuläre Integrale.

So stellt beispielsweise die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = c$$

eine Schar concentrischer aus dem Ursprung beschriebener Kreise vor. Die aus ihr durch Differentiation abgeleitete Differentialgleichung

$$x + y\,y' = 0$$

oder

$$y' = -\frac{x}{y}$$

drückt die allen Kreisen gemeinschaftliche Eigenschaft aus, dass die Tangente senkrecht steht auf dem Radius. Denn $y'$ ist der Richtungscoefficient der Tangente und $\frac{y}{x}$ der Richtungcoefficient des Radius.

In der Form

$$y\,y' = -x$$

deutet sie darauf hin, dass bei allen diesen Kreisen die Subnormale gleich ist der negativen Abscisse.

3. Es kann vorkommen, dass behufs Umformung oder Vereinfachung die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2$$

mit einem von $x$ und $y$ abhängigen Factor $\varphi(x,y)$ multipliciert werden muss.

Die auf diese Art gebildete Differentialgleichung

$$\varphi(x,y)\frac{\partial \Phi}{dx} + \varphi(x,y)\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

hat eine gegenüber der einfachen erweiterte Bedeutung, denn sie wird nicht nur durch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

sondern auch durch

$$\varphi(x,y) = 0$$

befriedigt.

Hier drängt sich unwillkürlich die Frage auf: Ist $\varphi(x,y) = 0$ ein Integral dieser Differentialgleichung oder steht diese Function in keinerlei Beziehung zur Differentialgleichung?

Soll $\varphi(x, y) = 0$ ein Integral der letzteren sein, muss durch diese Function auch die nicht transformierte Differentialgleichung (als die eigentliche) befriedigt werden, d. h. es müssen für alle Werte von x aus $\varphi(x, y) = 0$, solche Werte von y und $\frac{dy}{dx}$ resultieren, welche die Gleichung (2 identisch erfüllen.

Ist dies nicht der Fall, dann ist $\varphi(x, y)$ kein Integral der Differentialgleichung und wird fremde Lösung genannt.

Im Falle, dass $\varphi(x, y) = 0$ auch ein Integral der Differentialgleichung ist, sind zwei verschiedene Eventualitäten möglich, und zwar:

*a*) Entweder ist dieses Integral $\varphi(x, y) = 0$ schon in dem allgemeinen $F(x, y, c) = 0$ enthalten und kann durch Specialisierung der Constanten aus demselben abgeleitet werden, in welchem Falle es als particuläres Integral der Differentialgleichung bezeichnet wird.

*b*) Oder es ist dieses Integral $\varphi(x, y) = 0$ in dem allgemeinen nicht enthalten, kann also aus demselben durch Specialisierung der Constanten nicht abgeleitet werden, und wird dann singuläres Integral oder singuläre Lösung der Differentialgleichung genannt.

So erhält man beispielsweise durch Differentiation von

$$x^n \left(y - \frac{bx}{n+1}\right) = c$$

$$n x^{n-1} y\, dx + x^n\, dy - b x^n\, dx = 0$$

als einfache Differentialgleichung.

Diese geht durch Multiplication mit $\frac{1}{x^{n-1}}$ in

$$n y\, dx + x\, dy - b x\, dx = 0$$

oder

$$(n y - b x)\, dx + x\, dy = 0$$

über. Wird nun die Differentialgleichung in der zuletzt angeführten Form vorgelegt, so ist die Integration ohne gewisse Vorbereitung nicht ausführbar. Man kann sie aber auf die Form

$$\frac{1}{x^{n-1}}\, d\left[x^n y - \frac{b x^{n+1}}{n+1}\right] = 0$$

bringen und erkennt daraus, dass sie durch

$$d\left[x^n y - \frac{b x^{n+1}}{n+1}\right] = 0,$$

also

$$x^n y - \frac{b x^{n+1}}{n+1} = c$$

und durch

$$\frac{1}{x^{n-1}} = 0$$

befriedigt wird.

Es ist nun die Frage zu beantworten, ob $\frac{1}{x^{n-1}} = 0$ ein Integral dieser Differentialgleichung ist oder nicht.

Die Beantwortung der Frage ist verschieden für verschiedene Voraussetzungen bezüglich des Wertes von n.

Die Annahme $n > 1$ ist ohne Interesse, weil dann die Bedingung $\frac{1}{x^{n-1}} = 0$ nur für unendlich große Werte des x erfüllt wird.

Ist $0 < n < 1$, so wird die Bedingung $\varphi(x, y) = \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ nur durch $x = 0$ befriedigt, weil dann im Nenner eine negative Potenz des x steht. Dasselbe gilt auch für $n < 0$. Nun stellt aber $x = 0$ die y-Axe vor, und diese ist ihre Tangente selbst, mithin entspricht dem Werte $x = 0, y' = \infty$.

Setzt man diese beiden zusammengehörigen Werte in die durch Differentiation des allgemeinen Integrals direct entstehende Differentialgleichung

$$n x^{n-1} y + x^n \frac{dy}{dx} - b x^n = 0,$$

so findet man, dass sie durch dieselben erfüllt wird. In diesen zwei Fällen ist also $\frac{1}{x^{n-1}} = 0$ ein Integral der Differentialgleichung.

Setzt man im allgemeinen Integral

$$x^n \left( y - \frac{b x}{n+1} \right) = C$$

$C = 0$, so folgt daraus $x = 0$, das Integral $\frac{1}{x^{n-1}} = 0$ ist somit für $n > 1$ im allgemeinen Integral enthalten, also ein particuläres Integral der Differentialgleichung.

Ist $n = 0$, dann sind $x = 0$, $y' = \infty$ auch die beiden zusammengehörigen Werte. Die Differentialgleichung geht aber in

$$\frac{dy}{dx} - b = 0$$

über. aus welcher $y' = b$ resultiert, was mit $y' = \infty$ im Widerspruche steht. Für $n = 0$ ist also $\frac{1}{x^{n-1}} = 0$ eine fremde Lösung.

Zur Bildung der Differentialgleichung durch Elimination der Constanten ist die Auflösung der Gleichung nach derselben nicht nothwendig, was an folgendem Beispiel gezeigt werden soll.

Es ist die Differentialgleichung einer Schar von Kreisen mit constantem Radius r, deren Mittelpunkte in der x-Axe liegen, aufzustellen.

Diese Schar von Kreisen wird durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2cx = r^2$$

dargestellt, in welcher c eine willkürliche Constante bedeutet.

Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man

$$x + y y' - c = 0$$

und nach Elimination des c aus beiden Gleichungen die gesuchte Differentialgleichung

$$x^2 + y^2 - 2x(x + y y') = r^2$$

oder

$$x^2 - y^2 + 2xy y' + r^2 = 0.$$

4. Ebenso wie es möglich ist, zu jeder Gleichung mit einem willkürlichen Parameter eine von diesem Parameter freie Differentialgleichung erster Ordnung aufzustellen, kann zu einer Differentialgleichung erster Ordnung eine den Differentialquotienten nicht enthaltende Gleichung gefunden werden, welche ihre Folge ist, und nothwendig eine willkürliche Constante enthalten muss.

Man kann sich nämlich jede Differentialgleichung erster Ordnung durch Auflösen nach dem Differentialquotienten auf die Form

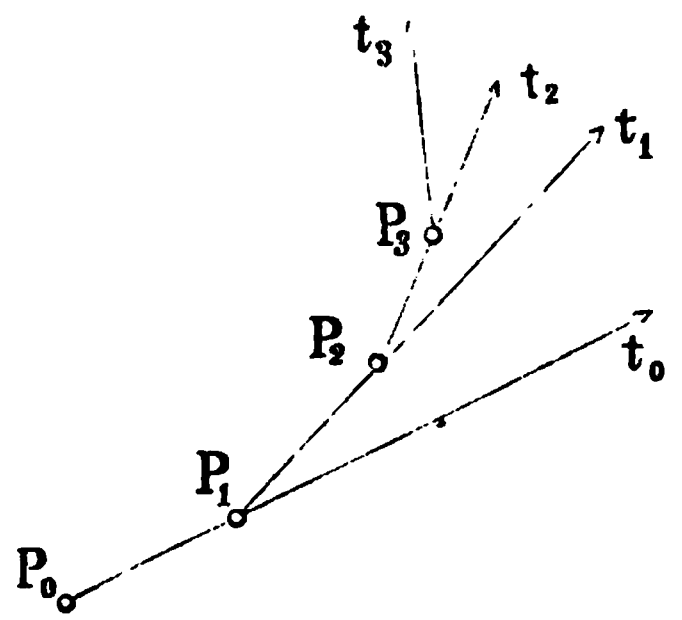
$$y' = \varphi(x, y)$$

gebracht denken, woraus zu ersehen ist, dass sie für jeden Punkt der Ebene eine Richtung bestimmt. Unter allen durch diese Differentialgleichung bestimmten Richtungen kann man eine continuierliche Folge heraussuchen, und diese gibt eine Curve, welcher eine Gleichung blot zwischen x und y entspricht.

Ertheilt man beispielsweise dem x einen festen Wert $x_0$ und ordnet demselben einen festen Wert des y, $y_0$ zu, so bestimmen diese zwei Größen einen Punkt $P_0$. Die Differentialgleichung $y'_0 = \varphi(x_0, y_0)$ gibt eine durch diesen Punkt $P_0$ zu führende Richtung $t_0$.

Ertheilt man nun dem $x_0$ einen Zuwachs $dx_0$, so erleidet dadurch $y_0$ eine Änderung um $dy_0 = y'_0\, dx_0 = \varphi(x_0, y_0)\, dx_0$. Das zusammengehörige Wertesystem $x_1 = x + dx_0$ und $y_1 = y_0 + \varphi(x_0, y_0)\, dx_0$ bestimmt wieder einen Punkt $P_1$ (Fig. 136), welcher auf der durch $P_0$ geführten Richtung $t_0$ liegt. Die Differentialgleichung bestimmt analog durch $y'_1 = \varphi(x_1, y_1)$ eine durch $P_1$ gehende Richtung $t_1$. Ändert man weiters $x_1$ um $dx_1$ und setzt $x_1 + dx_1 = x_2$, so geht $y_1$ in $y_2 = y_1 + \varphi(x_1, y_1)\, dx_1$ über, und gibt das Wertepaar $x_2$, $y_2$ einen Punkt $P_2$ auf der Richtung $t_1$, durch welchen eine Richtung $t_3$ zu legen ist, welche $y'_2 = \varphi(x_2, y_2)$ bestimmt.

Fig. 136.




Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu einem Polygon, welches durch unbeschränkte Abnahme seiner Seitenlängen in eine Curve übergeht.

Jedesmal, so oft dem beliebig gewählten $y_0$ ein anderer Wert beigelegt wird, erhält man auf die angegebene Weise eine andere Curve. Die Differentialgleichung gibt also in diesem Sinne eine Curvenschar, und $y_0$ repräsentiert den willkürlichen Parameter in der Gleichung der Schar.

Durch die Differentialgleichung

$$y' = \varphi(x, y)$$

ist nicht nur der erste Differentialquotient der unbekannten Function, sondern es sind auch alle höheren Differentialquotienten derselben gegeben, denn diese können nach und nach durch Differentiation des ersten ermittelt werden.

So findet man:

$$y'' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, y$$

$$y''' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}\, y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\, y'^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, y''$$

. . . . . .

Ertheilt man nun dem $x$ einen bestimmten Wert $x_0$ und ordnet diesem einen beliebigen aber festen Wert $y_0$ des $y$ zu, so kann man die diesem Wertepaare entsprechenden Werte aller Differentialquotienten

$y'_0$, $y''_0$, $y'''_0$, . . . bestimmen und gewinnt hinreichend Material um die Differentialgleichung nach Taylor durch eine Reihe darzustellen.

$$y' = y'_0 + \frac{x - x_0}{1} y''_0 + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} y'''_0 + \cdots$$

Selbstverständlich gilt diese Darstellung nur für jenen Wertebereich von x, für welchen die Reihe convergiert.

Durch Integration dieser Potenzreihe, nachdem sie mit $dx$ multipliciert wurde, zwischen den Grenzen $x_0$ bis x erhält man:

$$y - y_0 = (x - x_0)\, y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} y''_0 + \frac{(x - x_0)^3}{1.2.3} y'''_0 + \cdots$$

oder

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} y''_0 + \frac{(x - x_0)^3}{1.2.3} y'''_0 + \cdots$$

Die letzte Reihe drückt y als Function von x aus und wurde aus der Differentialgleichung abgeleitet, stellt somit das Integral der Differentialgleichung dar. Dieses Integral enthält thatsächlich eine willkürliche Constante, nämlich $y_0$.

So findet man beispielsweise aus der Differentialgleichung

$$y' = a\, y$$

durch Differentiation

$$\begin{aligned} y'' &= a\, y' = a^2 y; \\ y''' &= a^2 y' = a^3 y; \\ y^{IV} &= a^3 y' = a^4 y; \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Setzt man nun $x_0 = 0$ und ordnet diesem Werte $y_0 = c$ zu, so erhält man als Integral der Differentialgleichung

$$y = c + \frac{x}{1} a c + \frac{x^2}{1.2} a^2 c + \frac{x^3}{1.2.3} a^3 c + \cdots$$

oder

$$y = c\left(1 + \frac{a x}{1} + \frac{a^2 x^2}{1.x} + \frac{a^3 x^3}{1.2.3} + \cdots\right).$$

Dieses Integral kann, weil die Summe der eingeklammerten Reihe bekanntlich $e^{ax}$ ist, in geschlossener Form

$$y = c e^{ax}$$

dargestellt werden.

5. Enthält eine gegebene Gleichung

$$F(x, y, c_1, c_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4$$

zwei willkürliche Constanten $c_1$ und $c_2$, so kann aus derselben durch entsprechende Elimination der Constanten eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gebildet werden.

Durch Differentiation der Gleichung (4 erhält man:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5$$

eine Gleichung, welche im allgemeinen die beiden Constanten enthält.

Aus den zwei Gleichungen (4 und (5 kann eine der Constanten eliminiert werden. Das Eliminationsresultat wird im allgemeinen x, y, y' und eine der beiden Constanten enthalten, also eine der beiden Formen haben:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(x, y, y', c_1) &= 0 \\ \Phi_2(x, y, y', c_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6$$

Diese sind Differentialgleichungen erster Ordnung. Sollen beide Constante eliminiert werden, so ist hiezu eine dritte Gleichung erforderlich, welche durch nochmalige Differentiation von (5 gewonnen werden kann.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0 \quad . \quad . \quad (7$$

Das Eliminationsresultat nach der Elimination beider Constanten aus den Gleichungen (4, (5 und (7 enthält x, y, y', y'' und ist eine Differentialgleichung von der allgemeinen Form:

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

welche von der zweiten Ordnung ist, weil sie den zweiten Differentialquotienten enthält.

Das allgemeine Integral derselben (4 enthält zwei willkürliche Constante.

Die beiden Gleichungen (6 nennt man erste Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung, sind diese bekannt, so kann aus ihnen durch Elimination des Differentialquotienten y' das allgemeine Integral (4 gefunden werden.

Die Stammgleichung (4 stellt ein zweifach unendliches System von Curven vor. Die Differentialgleichung drückt wieder eine allen Curven dieses Systems gemeinschaftliche Eigenschaft aus, und zwar,

weil $y''$ durch $y'$ und den Krümmungsradius $\rho$ ausgedrückt werden kann, $y'' = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho}$, eine Beziehung zwischen den Coordinaten, der Tangentenrichtung und der Krümmung der Curve im Berührungspunkte.

Soll beispielsweise die Differentialgleichung aller Kreise, deren Mittelpunkte in der x-Axe liegen, aufgestellt werden, so sind aus der zwei willkürliche Parameter enthaltenden Gleichung derselben

$$(x - c_1)^2 + y^2 = c_2$$

die Parameter zu eliminieren.

Bei dieser Aufgabe erfolgt die Elimination direct durch das Differenzieren. Man erhält nämlich

$$x - c_1 + y\,y' = 0$$

und durch nochmalige Differentiation

$$1 + y\,y'' + y'^2 = 0$$

die gesuchte Differentialgleichung, welche die willkürlichen Parameter nicht mehr enthält.

Diese Differentialgleichung muss eine allen Kreisen der Schar gemeinschaftliche Eigenschaft ausdrücken, was durch Substitution $y'' = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho}$ zu erkennen ist.

Die Gleichung geht dadurch in

$$1 + y'^2 + y\,\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho} = 0$$

oder

$$\rho = -\,y\,\sqrt{1+y'^2}$$

über und sagt, dass die Krümmungsradien gleich sind den Normalstücken, d. h. dass alle Krümmungsmittelpunkte in der x-Axe liegen.

Ebenso wie dies für die Differentialgleichung der ersten Ordnung geschehen, kann auch hier gezeigt werden, dass es möglich ist, zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung eine von ihr abhängige Gleichung zu finden, welche keine Differentialquotienten enthält, und dass diese nothwendig zwei willkürliche Constanten haben muss.

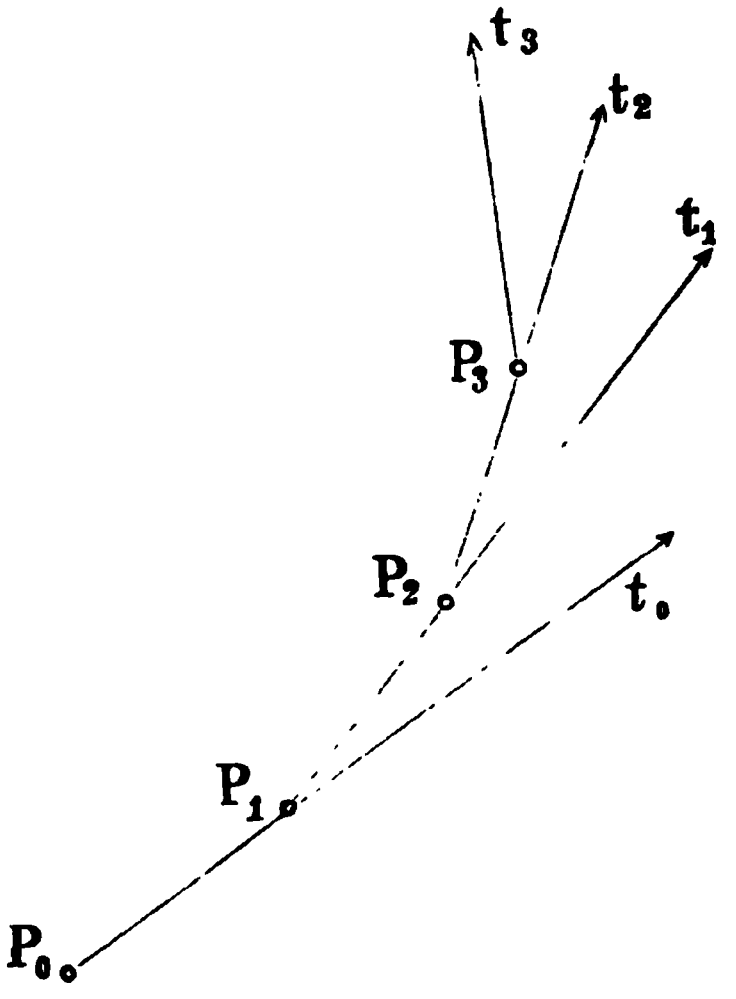
Die Differentialgleichung zweiter Ordnung kann durch Auflösen nach dem zweiten Differentialquotienten auf die Form

$$y'' = \varphi\,(x, y, y')$$

gebracht gedacht werden und gibt dann den Wert des zweiten Differentialquotienten für bekannte Werte von x, y und y'.

Setzt man ein für allemal einen Wert $x_0$ von x fest und ordnet diesem ein bestimmtes aber willkürliches $y = y_0$ zu, so erhält man einen Punkt $P_0$ in der Ebene (Fig. 137). Legt man ferner dem ersten Differentialquotienten y', für das Wertesystem $x_0, y_0$ auch einen bestimmten Wert $y'_0$ bei, so wird dadurch die Tangente $t_0$ in diesem Punkte bestimmt. Durch diese drei Annahmen ist bereits $y''_0$ vollkommen bestimmt.

Fig. 137.




Ertheilt man nun dem $x_0$ einen Zuwachs $d x_0$, so ist dadurch schon der Zuwachs von $y_0$ und $y'_0$ bestimmt; denn für

$$x_1 = x_0 + d x_0$$

geht $y_0$ in

$$y'_1 = y_0 + d y_0 = y_0 + y'_0 d x_0$$

und $y'_0$ in

$$y'_1 = y'_0 + d y'_0 = y'_0 + y''_0 d x_0 = y'_0 + \varphi (x_0, y_0, y'_0) d x_0$$

über. Diese drei Größen bestimmen einen Punkt $P_1$ und die Tangente in demselben $t_1$.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu einem Polygon, beziehungsweise zu einer Curve, und schließlich weil man jedem Werte $y_0$ unendlich viele Werte $y'_0$ zuordnen kann, zu einer Schar von Curvenscharen.

Aus der gegebenen Differentialgleichung

$$y'' = \varphi (x, y, y')$$

kann man wieder durch Differentiation alle höheren Differentialquotienten ableiten und ihre Werte für das gewählte Wertesystem $y_0, y'_0$ berechnen.

Kennt man nun diese Werte $y''_0, y'''_0 \ldots$, so kann man wieder die Differentialgleichung durch eine Reihe darstellen, deren Integration das Integral

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} y''_0 + \frac{(x - x_0)^3}{1.2.3} y'''_0 + \cdots$$

derselben gibt.

$y_0$ und $y'_0$ sind zwei willkürlich gewählte Größen, es enthält also das Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung thatsächlich zwei willkürliche Constante.

So erhält man beispielsweise durch fortgesetzte Differentiation der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' = -\lambda^2 y,$$

die höheren Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} y''' &= -\lambda^2 y', \\ y^{IV} &= -\lambda^2 y'' = \lambda^4 y, \\ y^{V} &= \lambda^4 y', \\ y^{VI} &= \lambda^4 y'' = -\lambda^6 y, \\ y^{VII} &= -\lambda^6 y', \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Setzt man also $x_0 = 0$, $y_0 = c_1$ und $y'_0 = c_2$, so erhält man das allgemeine Integral

$$y = c_1 + \frac{x}{1} c_2 - \frac{x^2}{1.2} \lambda^2 c_1 - \frac{x^3}{1.2.3} \lambda^2 c_2 + \frac{x^4}{1.2.3.4} \lambda^4 c_1 + \\ + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \lambda^4 c_2 - \cdots,$$

dem man auch die Form

$$y = c_1 \left[1 - \frac{\lambda^2 x^2}{1.2} + \frac{\lambda^4 x^4}{1.2.3.4} - \cdots\right] + \\ + c_2 \left[\frac{x}{1} - \frac{\lambda^2 x^3}{1.2.3} + \frac{\lambda^4 x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots\right]$$

oder

$$y = c_1 \left[1 - \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^4}{4!} - \cdots\right] + \\ + \frac{c_2}{\lambda} \left[\lambda x - \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \frac{(\lambda x)^5}{5!} - \cdots\right]$$

geben kann, so dass sich schließlich, weil die Summen der Reihen bekannt sind,

$$y = c_1 \cos \lambda x + \frac{c_2}{\lambda} \sin \lambda x$$

ergibt.

Dieses Integral kann, weil $c_1$ und $c_2$ willkürliche Größen sind, auch in der allgemein üblichen Form

$$y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

geschrieben werden, in welcher A und B ganz willkürliche aber constante Parameter bedeuten.

6. Enthält eine Gleichung

$$F(x, y, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0$$

n willkürliche Parameter, so kann aus derselben durch Elimination aller Parameter eine Differentialgleichung gebildet werden, welche im allgemeinen die Differentialquotienten y' bis $y^{(n)}$ enthält.

Sie heißt eine gewöhnliche Differentialgleichung der $n^{ten}$ Ordnung und ihr Integral enthält n willkürliche Constante.

Im allgemeinen sei noch bemerkt, dass zur näheren Charakterisierung einer Differentialgleichung die Ordnung und der Grad derselben in erster Linie dient.

Die Ordnung einer Differentialgleichung wird durch den höchsten in ihr enthaltenen Differentialquotienten, ihr Grad hingegen durch den höchsten Potenzexponenten des höchsten Differentialquotienten bestimmt.

So ist beispielsweise $x^4 y'''^3 + \sin y \,.\, y''^2 y'' + c^x y^n = 0$ eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und dritten Grades; $x^4 y'' + \sin y \,.\, y' + e^x y^n = 0$ eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und ersten Grades.

Aus dem bereits Gesagten geht auch zweifellos hervor, dass das allgemeine Integral einer Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung n willkürliche Constante enthalten muss.

Wie bei der Integration überhaupt gibt es auch bei der Integration der Differentialgleichungen kein allgemeines zum Ziele führendes Verfahren, und man kann nur eine Reihe von Methoden angeben. welche bei mehr oder minder umfangreichen Gruppen von Differentialgleichungen zum allgemeinen Integral derselben führen.

Theoretisch ist die Integration stets als ausgeführt anzusehen, wenn es gelungen ist, die Variablen zu trennen, d. h. die Gleichung auf eine Form zu bringen, in welcher der Factor von $dx$ eine y nicht enthaltende Function von x und der Factor von $dy$ eine die unabhängige Variable x explicit nicht enthaltende Function von y ist.

# 1. Abschnitt.

## Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung.

### § 73. Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung und vollständiger Form.

Eine Differentialgleichung hat dann die vollständige Form, wenn sie ein exactes Differential einer endlichen Gleichung, d. h. das unveränderte Resultat der Differentiation einer endlichen Gleichung ist

So erhält man durch die Differentiation der Gleichung

$$x^m y^n = c$$

eine Differentialgleichung

$$m\,x^{m-1} y^n + n\,x^m y^{n-1} \frac{dy}{dx} = 0$$

oder

$$m\,x^{m-1} y^n\,dx + n\,x^m y^{n-1}\,dy = 0.$$

Diese Gleichung ist von vollständiger Form.

Dividiert man sie durch den Factor $x^{m-1} y^{n-1}$, so erhält man die gleichbedeutende Differentialgleichung:

$$m\,y\,dx + n\,x\,dy = 0,$$

welche aber nicht mehr die vollständige Form hat, weil sie kein exactes Differential mehr ist.

Soll nun eine gegebene Differentialgleichung

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

in welcher M und N Functionen von x und y bedeuten, die vollständige Form haben, so muss sie das unveränderte Resultat der Differentiation einer (vorläufig noch unbekannten) Function

$$F(x, y) = 0$$

sein.

Das unveränderte Resultat der Differentiation dieser Function ist aber

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = 0.$$

Es müssen also in dem angenommenen Falle die Beziehungen bestehen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\alpha$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\beta$$

aus welchen durch partielle Differentiation, und zwar der ersten nach y und der zweiten nach x

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

und mit Rücksicht auf

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

folgt.

Die Gleichung

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ist demnach das Kennzeichen hiefür, dass die vorgelegte Differentialgleichung

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

die vollständige Form hat, also das unveränderte Differential einer endlichen Gleichung ist. Sie wird die Bedingung der Integrabilität genannt.

Ist diese Bedingung erfüllt, so gestaltet sich die Integration der Differentialgleichung sehr einfach.

Da in diesem Falle

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M,$$

so ist M durch partielle Differentiation von $F(x, y)$ nach x entstanden, wobei Glieder, welche nur y und Constante eventuell enthalten haben konnten, weggefallen sind.

Wird also zu dem Integral $\int M\,dx$ noch eine Function $\varphi(y)$ von y allein hinzugefügt, welche alle bei der partiellen Differentiation

von $F(x, y)$ nach $x$ entfallenen Glieder mit $y$ allein enthält, so wird dadurch schon das allgemeine Integral der Differentialgleichung erhalten.

$$F(x, y) = \int M\,dx + \varphi(y).$$

Zur Bestimmung von $\varphi(y)$ hat man nur diese Gleichung partiell nach $y$ zu differenzieren und erhält:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \int M\,dx}{\partial y} + \frac{d\,\varphi(y)}{dy}$$

oder

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + \frac{d\,\varphi(y)}{dy},$$

also mit Rücksicht auf (β

$$N = \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + \frac{d\,\varphi(y)}{dy}.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$d\,\varphi(y) = dy\left[N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\right],$$

und nach Integration:

$$\varphi(y) = \int\left[N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\right]dy + C.$$

Das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung ist demnach:

$$\int M\,dx + \int\left[N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\right]dy + C = 0.$$

**Beispiele:**

1. Es soll die Differentialgleichung

$$(2ax + by + f)\,dx + (bx + 2cy + g)\,dy = 0$$

integriert werden.

Hier ist

$$M = 2ax + by + f;$$
$$N = bx + 2cy + g.$$

Demnach

$$\frac{\partial M}{\partial y} = b; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = b,$$

die Bedingung der Integrabilität erfüllt.

Man erhält also als allgemeines Integral:

$$\int (2ax + by + f)\,dx + \int [bx + 2cy + g - \int b\,dx]\,dy + C = 0,$$

d. h.

$$ax^2 + bxy + fx + bxy + cy^2 + gy - bxy + C = 0$$

oder

$$ax^2 + bxy + cy^2 + fx + gy + C = 0.$$

Die gegebene Differentialgleichung war die Differentialgleichung einer Curve zweiter Ordnung, welche durch zwei feste Punkte der unendlich fernen Geraden geht.

2. Es ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{dy}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

zu bestimmen.

Weil hier

$$M = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad N = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}},$$

so ist

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2}{y(\sqrt{x^2+y^2})^3} = -\frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3},$$

also die Bedingung der Integrabilität erfüllt.

Man erhält demnach

$$\int M\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = l(x + \sqrt{x^2+y^2}),$$

$$N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx = \frac{1}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \int \frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{x + \sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

oder, wenn man im letzten Bruch Zähler und Nenner mit $\sqrt{x^2+y^2} - x$ multipliciert,

$$N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx = \frac{1}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{1}{y}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

d. h. als allgemeines Integral:

$$l(x + \sqrt{x^2 + y^2}) - l\,C = 0$$

oder

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

Da nun aus dem allgemeinen Integral

$$x^2 + y^2 = x^2 - 2\,C\,x + C^2,$$

also

$$y^2 = C^2 - 2\,C\,x$$

folgt, stellt die Differentialgleichung ein System confocaler Parabeln vor. (Parabeln, welche dieselbe Axe und denselben Brennpunkt haben.)

Diejenigen Fälle, in welchen die Bedingung der Integrabilität erfüllt ist, gehören zu Ausnahmen, man kann aber jede Differentialgleichung erster Ordnung auf unendlich viele Arten durch Multiplication mit einem von y und x abhängigen Factor auf die Form bringen, in welcher dieser Bedingung Genüge geleistet wird. Der zu dieser Umgestaltung erforderliche Factor wird der »Integrabilitätsfactor« genannt.

Eine gegebene Differentialgleichung der ersten Ordnung

$$M\,dx + N\,dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1$$

hat unbedingt ein allgemeines Integral, welches eine willkürliche Constante enthält. Dieses Integral sei in der nach der Constanten C aufgelösten Form:

$$F(x, y) = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2$$

Durch Differentiation dieses Integrals erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

eine Gleichung, welche mit der gegebenen Differentialgleichung äquivalent sein muss, d. h. für $\frac{dy}{dx}$ denselben Wert geben muss wie diese.

Damit die angeführten zwei Gleichungen (1 und (3 für $\frac{dy}{dx}$ stets denselben Wert geben, ist nur erforderlich, dass die Coefficienten von $dx$ und $dy$ in denselben proportional sind, dass also für alle Werte des x die Beziehung besteht:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{N}.$$

Setzt man nun die beiden Quotienten

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{M} \text{ und } \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{N}$$

gleich $\rho$, wobei $\rho$ im allgemeinen eine Function von x und y sein wird, da im Zähler und Nenner der Quotienten Functionen dieser beiden Variablen stehen, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho M; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \rho N$$

und in Berücksichtigung derselben:

$$\rho (M\,dx + N\,dy) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy.$$

Da in der letzten Gleichung rechts vom Gleichheitszeichen das vollständige unveränderte Differential von $F(x, y) = C$ steht, so ist auch der linke Theil derselben das vollständige Differential dieser Function.

Die Differentialgleichung

$$M\,dx + N\,dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1$$

kann also thatsächlich durch die Multiplication mit einem von x und y abhängigen Factor auf die vollständige Form gebracht werden. Dieser Factor $\rho$ ist demnach ein integrierender Factor der gegebenen Differentialgleichung.

Um den integrierenden Factor zu bestimmen, hat man nur zu bedenken, dass nach der Multiplication mit demselben die Differentialgleichung die vollständige Form annimmt, in welchem Falle die Integrabilitätsbedingung erfüllt sein muss.

Aus dieser

$$\frac{\partial (\rho M)}{\partial y} = \frac{\partial (\rho N)}{\partial x}$$

folgt, weil auch $\rho$ eine Function von x und y repräsentiert:

$$M \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial N}{\partial x}$$

oder

$$N \frac{\partial \rho}{\partial x} - M \frac{\partial \rho}{\partial y} = \rho \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4$$

Aus der letzten Gleichung kann nur $\rho$ bestimmt werden. Diese enthält außer $\rho$ die beiden ersten partiellen Differentialquotienten von $\rho$, ist somit eine sogenannte »partielle Differentialgleichung«, deren Integration eine weitaus compliciertere Aufgabe ist als die ursprünglich gestellte.

Es gibt aber Fälle, in welchen der integrierende Factor eine Function von x allein ist und sehr einfach bestimmt werden kann.

Für einen dieser Fälle wird

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d \rho}{d x}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0.$$

Bringt man überdies die gegebene Differentialgleichung (1 durch Division mit N auf die Form

$$R\,dx + dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5$$

was immer geschehen kann, so geht die zur Bestimmung von $\rho$ dienende Gleichung (4 in

$$\frac{d \rho}{d x} = \rho \frac{\partial R}{\partial y}$$

oder

$$\frac{1}{\rho} \frac{d \rho}{d x} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

über. Da in dieser Gleichung auf der linken Seite eine Function von x allein steht, muss auch der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen $\frac{\partial R}{\partial y}$ eine Function von x allein sein, welche kurz mit P bezeichnet werden soll.

Aus

$$\frac{1}{\rho} \frac{d \rho}{d x} = P$$

oder

$$\frac{d \rho}{\rho} = P\,dx$$

folgt dann durch Integration:

$$l\,\rho = \int P\,dx,$$

also:

$$\rho = e^{\int P\,dx}.$$

Um zu erkennen, wie die Differentialgleichung beschaffen sein muss, welche eine Function von x allein als integrierenden Factor hat, ist nur zu berücksichtigen, dass in diesem Falle

$$\frac{\partial R}{\partial y} = P$$

eine Function von x allein sein muss.

Man erhält nämlich durch Integration dieser Bedingung

$$R = \int P \, d\,y - Q,$$

wobei Q keine Constante, sondern eine Function von x bedeutet, weil bei der partiellen Differentiation von R nach y Glieder mit x allein weggefallen sein konnten.

Da nun P y nicht enthält, so ist $\int P \, d\,y = P \int d\,y = P\,y$, mithin

$$R = P\,y - Q,$$

wobei P und Q Functionen von x allein bedeuten.

Nur dann, wenn R diese Form aufweist oder auf diese Form gebracht werden kann, ist der integrierende Factor eine Function von x allein.

Die gegebene Differentialgleichung (5 nimmt dann aber die Form an:

$$(P\,y - Q)\,d\,x + d\,y = 0$$

oder

$$\frac{d\,y}{d\,x} + P\,y = Q \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6$$

Sie ist bezüglich y und y' linear und wird »lineare Differentialgleichung erster Ordnung« genannt.

Dass die lineare Differentialgleichung (6 nach der Multiplication mit dem Factor $\rho = e^{\int P\,dx}$ thatsächlich die vollständige Form annimmt, ist direct einzusehen. Die linke Seite der Gleichung

$$\left(\frac{d\,y}{d\,x} + P\,y\right) e^{\int P\,dx} = Q\,e^{\int P\,dx}$$

ist nämlich der Differentialquotient von $y\,e^{\int P\,dx}$, und man kann demzufolge schreiben:

$$\frac{d\left(y\,e^{\int P\,dx}\right)}{d\,x} = Q\,e^{\int P\,dx}$$

oder

$$d\left(y\,e^{\int P\,dx}\right) = Q\,e^{\int P\,dx}\,dx.$$

Hieraus folgt als allgemeines Integral dieser Differentialgleichung

$$y\,e^{\int P\,dx} = \int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx + C$$

oder

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[C + \int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx\right].$$

Diese allgemeine Form des Integrals einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung wird seinerzeit auf einem anderen Wege gefunden werden.

**Beispiel:**

Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = \sqrt{\frac{a}{x}}$$

ist mit Hilfe des integrierenden Factors zu integrieren.

Diese Gleichung ist von der ersten Ordnung und linear, demnach ist ihr integrierender Factor

$$\rho = e^{\int P\,dx} = e^{\int -\frac{2}{x}\,dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}.$$

Multipliciert man sie mit diesem Factor, so geht sie in

$$\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^3} = \sqrt{\frac{a}{x^5}}$$

über. Durch diese Multiplication wurde also thatsächlich die linke Seite der Gleichung zu einem vollständigen Differentialquotienten, nämlich zum Differentialquotienten von $\frac{y}{x^2}$.

Man kann nun schreiben:

$$\frac{d\left(\frac{y}{x^2}\right)}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x^5}}$$

oder

$$d\left(\frac{y}{x^2}\right) = \sqrt{\frac{a}{x^5}}\,dx$$

und erhält hieraus durch Integration:

$$\frac{y}{x^2} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{x^3}} + C$$

oder

$$y = C x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{a x}$$

als allgemeines Integral.

Im integrierenden Factor ist eigentlich eine allgemeine Methode der Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung enthalten, doch ist durch dieselbe, insofern es sich um die thatsächliche Darstellung des Integrals handelt, nicht viel gewonnen, weil die Bestimmung dieses Factors in den weitaus meisten Fällen sehr compliciert wird. In der Folge sollen demnach andere Methoden besprochen werden, deren Anwendung auf ganze Gruppen von Differentialgleichungen rascher und einfacher zum Ziele führt.

## § 74. Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung durch Trennung der Variablen.

Die Grundlage für die Integration von Differentialgleichungen, welche die vollständige Form nicht besitzen, ist die Trennung der Variablen.

Sie besteht darin, dass die Gleichung auf eine Form gebracht wird. in welcher die Coefficienten der Differentiale keine andere Variable enthalten, als jene, mit deren Differential sie multipliciert erscheinen.

Nach durchgeführter Trennung der Variablen nimmt demnach die Differentialgleichung die Form an:

$$f(x)\,dx + \varphi(y)\,dy = 0,$$

welche direct Glied für Glied integriert werden kann:

$$\int f(x)\,dx + \int \varphi(y)\,dy = C.$$

Mit Rücksicht darauf wurde bereits in der Einleitung gesagt, dass eine Differentialgleichung theoretisch als integriert anzusehen ist, sobald die Trennung der Variablen durchgeführt wurde.

Die Trennung der Variablen kann entweder direct oder erst nach Einführung neuer Variablen bewirkt werden.

*1. Beispiele für die directe Trennung der Variablen.*

1. Die Gleichung

$$m\,y\,dx + n\,x\,dy = 0$$

erhält, wenn man sie durch $x\,y$ dividiert, die Form

$$m\,\frac{d\,x}{x} + n\,\frac{d\,y}{y} = 0.$$

In dieser sind die Variablen bereits getrennt, und die Integration gibt sofort:

$$m\,.\,l\,x + n\,.\,l\,y = l\,c$$

oder

$$l\,(x^m\,y^n) = l\,c,$$

also schließlich als allgemeines Integral:

$$x^m\,y^n = c.$$

Die willkürliche Integrationsconstante kann entsprechend den Bedingungen der Aufgabe bestimmt werden.

Wäre beispielsweise die Forderung gestellt, dass die durch die Gleichung dargestellte Curve durch einen Punkt $P_0\,(x_0, y_0)$ gehe, so wäre, weil die Coordinaten dieses Punktes der Gleichung genügen müssten,

$$c = x_0^m\,y_0^n$$

zu setzen.

2. Die Gleichung

$$y\,d\,x - \sqrt{1 - x^2}\,d\,y = 0$$

nimmt nach Division durch $y\,\sqrt{1 - x^2}$ die Form an:

$$\frac{d\,x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{d\,y}{y} = 0,$$

in welcher die Trennung der Variablen bereits durchgeführt erscheint.

Durch Integration erhält man:

$$\arcsin x - l\,y = -\,l\,c$$

oder

$$\arcsin x = l\,\frac{y}{c},$$

also schließlich

$$y = c\,e^{\arcsin x}.$$

Stellt man hier die Bedingung, dass etwa für $x = 1$ auch $y = 1$ sei, so erhält man durch Einsetzen dieser Werte:

$$1 = c\,e^{\arcsin 1} = c\,e^{\frac{\pi}{2}},$$

also

$$c = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Die Integralgleichung ist somit für diesen speciellen Fall:

$$y = e^{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}.$$

3. In der Differentialgleichung der Tractorie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

ist auch die Trennung der Variablen direct möglich.

Diese wird durch Division mit $\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ und gleichzeitige Multiplication mit $dx$ bewerkstelligt.

$$\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = dx.$$

Demnach ist die Integralgleichung:

$$\int \frac{1}{y} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = x.$$

Zur Ermittlung des Integrals setze man:

$$y = a \sin z,$$

also

$$dy = a \cos z\, dz,$$

wodurch dasselbe in

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 z}}{a \sin z} a \cos z\, dz = a \int \frac{\cos^2 z}{\sin z} dz$$

übergeht.

$$a \int \frac{\cos^2 z}{\sin z} dz = a \int \frac{1 - \sin^2 z}{\sin z} dz = a \int \frac{dz}{\sin z} - a \int \sin z\, dz =$$

$$= a \,.\, l \tang \frac{z}{2} + a \,.\, \cos z + C.$$

Um auf die ursprüngliche Variable $y$ zurückzukommen, hat man nur zu berücksichtigen, dass:

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - y^2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{z}{2}=\frac{\sin\frac{z}{2}}{\cos\frac{z}{2}}=\frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{2\cos^2\frac{z}{2}}=\frac{\sin z}{1+\cos z}=\frac{\frac{y}{a}}{1+\frac{1}{a}\sqrt{a^2-y^2}}=$$

$$=\frac{y}{a+\sqrt{a^2-y^2}}.$$

Es ist somit:

$$\int\frac{1}{y}\sqrt{a^2-y^2}\,dy=a\,.\,l\frac{y}{a+\sqrt{a^2-y^2}}+\sqrt{a^2-y^2}+C.$$

Demzufolge die gesuchte Integralgleichung:

$$x=a\,l\frac{y}{a+\sqrt{a^2-y^2}}+\sqrt{a^2-y^2}+C,$$

welche, weil sie eine willkürliche Constante enthält, eine Schar von Tractorien vorstellt.

Man kann die Constante derart bestimmen, dass die Spitze der durch die specielle Gleichung dargestellten Tractorie in der y-Axe liegt. Dann müssen nämlich die Coordinaten dieser Spitze $x=0$ und $y=a$ der Gleichung genügen. Das Einsetzen dieser Coordinaten in die Gleichung gibt: $0=0+0+C$, d. h. $C=0$ für den angenommenen Fall, und die Tractorie von dieser speciellen Lage hat die Gleichung

$$x=a\,.\,l\frac{y}{a+\sqrt{a^2-y^2}}+\sqrt{a^2-y^2}.$$

**4. Bei welchen Curven ist die Subtangente eine lineare Function der Abscisse des Berührungspunktes?**

Die Subtangente ist gegeben durch den Wert von $\frac{y}{y'}=y\frac{dx}{dy}$; eine lineare Function von x hat die allgemeine Form $mx+n$, mithin lautet die Differentialgleichung aller Curven von dieser Eigenschaft:

$$y\frac{dx}{dy}=mx+n.$$

Dividiert man diese Gleichung durch $(mx+n)\frac{y}{dy}$, so werden dadurch die Variablen getrennt und man erhält:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{mx+n}.$$

woraus durch Integration:

$$l\,y = \frac{1}{m}\,l\,(m\,x + n) + \frac{1}{m}\,l\,C$$

oder

$$y^m = C\,(m\,x + n)$$

folgt.

Diese Integralgleichung zeigt, dass derartige Curven parabolisch sind.

5. Welche Curve hat eine constante Subtangente?

Die Differentialgleichung dieser Curve ist

$$y\,\frac{d\,x}{d\,y} = a,$$

also

$$\frac{d\,y}{y} = \frac{d\,x}{a};$$

was integriert

$$l\,y = \frac{x}{a} + l\,C$$

oder

$$y = C\,e^{\frac{x}{a}}$$

gibt. Die Curve ist eine logarithmische Linie.

*2. Beispiele, in welchen die Trennung der Variablen nicht direct durchführbar ist.*

1. In der Gleichung

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 1 + m\,(y - x)$$

kann die Trennung der Variablen nicht direct bewirkt werden.

Setzt man aber

$$y - x = z,$$

also

$$d\,y - d\,x = d\,z; \quad \frac{d\,y}{d\,x} = 1 + \frac{d\,z}{d\,x},$$

so geht die Gleichung in

$$1 + \frac{d\,z}{d\,x} = 1 + m\,z$$

oder

$$\frac{d\,z}{d\,x} = m\,z$$

über.

Nun ist die Trennung der Variablen leicht durchführbar, und zwar durch Multiplication mit $\frac{dx}{z}$:

$$\frac{dz}{z} = m\,dx.$$

Hieraus folgt nach Integration:

$$lz - lC = mx$$

$$z = Ce^{mx}.$$

Die Rücksubstitution gibt:

$$y - x = Ce^{mx}$$

als die gesuchte Integralgleichung.

Soll hierin speciell für $x = 0$, $y = 1$ werden, so muss $C = 1$ sein, was durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung gefunden wird.

Für diesen speciellen Fall ist

$$y - x = e^{mx}$$

das particuläre Integral.

2. In der Gleichung

$$(x + y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$$

ermöglicht die Substitution

$$x + y = z$$

die Trennung der Variablen. Denn man hat dann:

$$dx + dy = dz,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1.$$

Demnach:

$$z^2\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = a^2,$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{a^2}{z^2},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a^2 + z^2}{z^2}.$$

Hier ist nun die Trennung der Variablen möglich und erfolgt durch Multiplication mit $\frac{z^2}{a^2 + z^2}\,dx$:

$$\frac{z^2\,dz}{a^2+z^2} = dx,$$

$$\frac{(a^2+z^2)-a^2}{a^2+z^2}\,dz = dx,$$

$$dz - \frac{a^2\,dz}{a^2+z^2} = dx.$$

Die Integration ergibt:

$$z - a \operatorname{arc\,tang} \frac{z}{a} = x + C.$$

Daraus erhält man durch Rücksubstitution:

$$x + y - a \operatorname{arc\,tang} \frac{x+y}{a} = x + C,$$

$$\frac{y-C}{a} = \operatorname{arc\,tang} \frac{x+y}{a}$$

oder auch

$$x + y = a \operatorname{tang} \frac{y-C}{a}.$$

Hier sei noch die Aufgabe gestellt, die Constante C derart zu bestimmen, dass für $x = 0$ $y = a$ ist.

Die Einsetzung dieser Werte in die Integralgleichung

$$\frac{y-c}{a} = \operatorname{arc\,tang} \frac{x+y}{a}$$

gibt:

$$\frac{a-c}{a} = \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{a} = \operatorname{arc\,tang} 1 = \frac{\pi}{4},$$

demnach ist

$$c = a\left(1 - \frac{\pi}{4}\right),$$

und das entsprechende particuläre Integral:

$$\frac{y - a\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{a} = \operatorname{arc\,tang} \frac{x+y}{a}$$

oder

$$x + y = a \operatorname{tang} \frac{y - a\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{a}.$$

3. In der Gleichung

$$(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

ermöglicht die Substitution $y^2 = z$, also $2y\,dy = dz$ die Trennung der Variablen.

Man erhält nämlich:

$$(x - z)\,dx + x\,dz = 0,$$

$$x\,dx - z\,dx + x\,dz = 0,$$

und nach Division mit $x^2$

$$\frac{dx}{x} = \frac{x\,dz - z\,dx}{x^2},$$

also

$$\frac{dx}{x} + d\left(\frac{z}{x}\right) = 0.$$

Durch Integration folgt dann:

$$lx + \frac{z}{x} = lC,$$

d. h.

$$\frac{y^2}{x} = l\frac{C}{x},$$

demnach schließlich:

$$x = Ce^{-\frac{y^2}{x}}.$$

## § 75. Integration der homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Man nennt eine Differentialgleichung von der Form

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

in welcher M und N homogene Functionen von x und y vom gleichen Grade sind, eine »homogene Differentialgleichung erster Ordnung«.

Gleichungen dieser Art sind stets integrabel, weil durch die Substitution $\frac{y}{x} = z$ die Trennung der Variablen immer ermöglicht wird.

Sind die beiden Functionen M und N homogen vom Grade r, › sind sie stets in der Form

$$M = x^r \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$N = x^r \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

darstellbar. Die Differentialgleichung kann somit immer auf die Form gebracht werden:

$$x^r\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right) dy\right] = 0,$$

aus welcher

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0$$

folgt.

Setzt man nun:

$$\frac{y}{x} = z,$$

also

$$y = zx; \quad dy = z\,dx + x\,dz,$$

so erhält man

$$\varphi(z)\,dx + \psi(z)(z\,dx + x\,dz) = 0$$

oder

$$[\varphi(z) + z\,\psi(z)]\,dx + x\,\psi(z)\,dz = 0.$$

Und nach Trennung der Variablen, welche jetzt leicht durchführbar ist:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(z)\,dz}{\varphi(z) + z\,\psi(z)} = 0.$$

Das allgemeine Integral ist somit:

$$lx + \int \frac{\psi(z)\,dz}{\varphi(z) + z\,\psi(z)} = C,$$

in welchem dann die Rücksubstitution vorzunehmen ist.

**Beispiele:**

1. Die Differentialgleichung

$$(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$$

ist homogen und nimmt nach Division durch x die Form an:

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right) dx - \left(1 - \frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Setzt man:

$$\frac{y}{x} = z,$$

also

$$d\,y = z\,d\,x + x\,d\,z,$$

so erhält man:

$$(1 + z)\,d\,x - (1 - z)\,(z\,d\,x + x\,d\,z) = 0$$

oder

$$(1 + z^2)\,d\,x - x\,(1 - z)\,d\,z = 0,$$

$$\frac{d\,x}{x} = \frac{1 - z}{1 + z^2}\,d\,z,$$

$$\frac{d\,x}{x} = \frac{d\,z}{1 + z^2} - \frac{z}{1 + z^2}\,d\,z.$$

Durch Integration findet man:

$$l\,x - l\,C = \text{arc tang}\,z - \frac{1}{2}\,l\,(1 + z^2)$$

oder, wenn man statt z wieder den Wert $\frac{y}{x}$ einführt:

$$l\,\frac{x}{C} + \frac{1}{2}\,l\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \text{arc tang}\,\frac{y}{x},$$

$$l\left(\frac{x}{C}\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right) = \text{arc tang}\,\frac{y}{x},$$

also schließlich:

$$l\,\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{C} = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}.$$

Führt man in diese Gleichung die Polarcoordinaten ein, mit Hilfe der bekannten Transformationsgleichungen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

so erhält man, weil

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \text{tang}\,\varphi,$$

also

$$\varphi = \text{arc tang}\,\frac{y}{x},$$

$$l\,\frac{r}{C} = \varphi.$$

d. h.

$$r = C e^{\varphi}.$$

Die vorgelegte Differentialgleichung war somit die Differentialgleichung der logarithmischen Spirale in Parallelcoordinaten.

2. Die Differentialgleichung

$$(x^2 - y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$$

ist homogen und geht nach Division durch $x^2$ in

$$\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx - 2\frac{y}{x}\,dy = 0$$

über. Setzt man:

$$\frac{y}{x} = z,$$

also

$$dy = x\,dz + z\,dx,$$

so erhält man

$$(1 - z^2)\,dx - 2z(z\,dx + x\,dz) = 0,$$

$$(1 - z^2 - 2z^2)\,dx - 2zx\,dz = 0,$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{2z\,dz}{1 - 3z^2} = 0.$$

Dies gibt integriert:

$$l\,x + \frac{1}{3}\,l(1 - 3z^2) = l\,C.$$

Setzt man nun $\frac{y}{x}$ statt z, so erhält man das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung:

$$l\,x + \frac{1}{3}\,l\left(1 - 3\frac{y^2}{x^2}\right) = l\,C,$$

$$l\,x + \frac{1}{3}\,l(x^2 - 3y^2) = \frac{2}{3}\,l\,x - l\,C,$$

$$l\,[x(x^2 - 3y^2)] = l\,C,$$

also schließlich:

$$x[x^2 - 3y^2] = C.$$

3. Bei welcher Curve ist die Subtangente in einem Punkte gleich dem arithmetischen Mittel der Coordinaten dieses Punktes?

Diese Forderung wird ausgedrückt durch die Differentialgleichung

$$\frac{y}{y'} = \frac{1}{2}(x + y)$$

($\frac{y}{y'}$ ist die Länge der Subtangente).

Diese Differentialgleichung

$$y\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}(x + y)$$

ist homogen und geht nach Division durch x in

$$\frac{y}{x}\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

oder

$$\frac{y}{x}dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y}{x}\right)dy$$

über. Setzt man wieder

$$\frac{y}{x} = z.$$

also

$$dy = x\,dz + z\,dx,$$

so erhält man:

$$z\,dx = \frac{1}{2}(1 + z)(x\,dz + z\,dx),$$

$$\frac{1}{2}(z - z^2)\,dx = \frac{1}{2}\,x(1 + z)\,dz,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 + z}{z - z^2}\,dz$$

oder

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1 - z) + 2z}{z(1 - z)}\,dz,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} + \frac{2\,dz}{1 - z}.$$

Dies gibt integriert:

$$lx - lC = lz - 2l(1 - z),$$

$$l\frac{x}{C} = l\frac{z}{(1 - z)^2},$$

$$\frac{x}{C} = \frac{z}{(1 - z)^2}.$$

Führt man wieder für z den Wert $\frac{y}{x}$ ein, so findet man:

$$\frac{x}{C} = \frac{\frac{y}{x}}{\left(1 - \frac{y}{x}\right)^2},$$

$$\frac{x}{C} = \frac{yx}{(x-y)^2},$$

also

$$(x-y)^2 - Cy = 0$$

als das allgemeine Integral der Differentialgleichung.

Die gesuchte Curve ist somit irgend eine aus der Schar der Parabeln, welche die x-Axe im Ursprunge berühren und deren Axenrichtungen mit den Coordinatenaxen den Winkel $\frac{\pi}{4}$ einschließen:

Fragt man speciell nach jener Parabel dieser Schar, welche durch den Punkt $P_1$ (2, 1) geht, so erhält man durch Einsetzen der Coordinaten dieses Punktes in die Integralgleichung den entsprechenden Wert der Constanten:

$$(1-2)^2 - C = 0; \quad C = 1.$$

Die Gleichung dieser Parabel ist somit:

$$(y-x)^2 - y = 0.$$

4. Welche Curve hat die Eigenschaft, dass der Neigungswinkel ihrer Tangente gegen die Abscissenaxe doppelt so groß ist, als der Neigungswinkel des aus dem Ursprung zum Berührungspunkt geführten Strahles gegen dieselbe Axe? (Fig. 138.)

Die Bedingung:

$$\vartheta = 2t,$$

$$\operatorname{tang}\vartheta = \operatorname{tang} 2t = \frac{2\operatorname{tang} t}{1 - \operatorname{tang}^2 t}$$

gibt die Differentialgleichung dieser Curve, wenn man berücksichtigt, dass

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{dy}{dx} \quad \operatorname{tang} t = \frac{y}{x}.$$

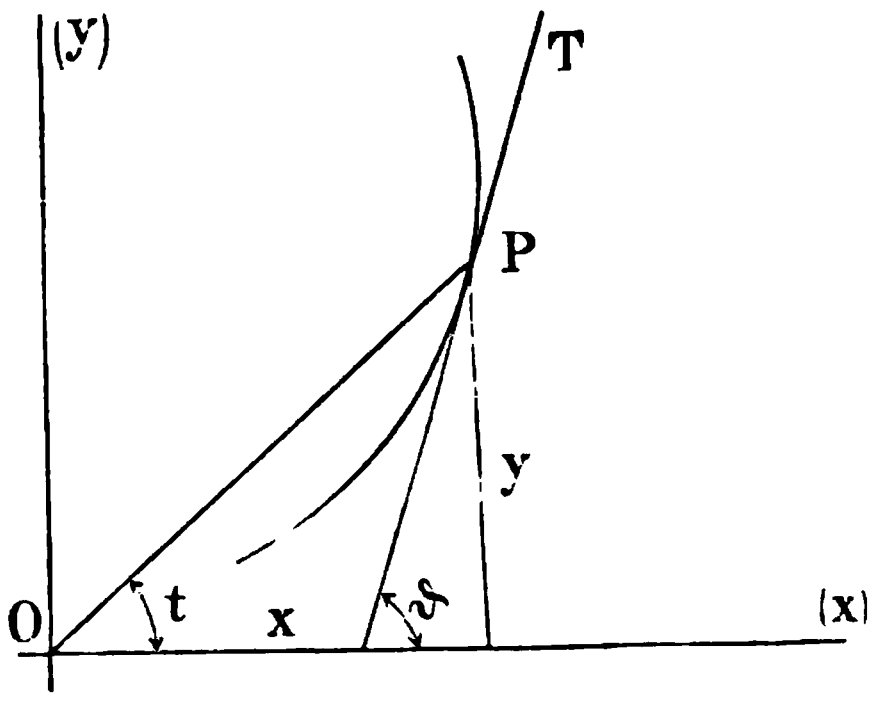
Diese Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}}$$

ist homogen, kann sõmit durch die Substitution

$$\frac{y}{x} = z,$$

Fig. 138.



also

$$d\,y = x\,d\,z + z\,d\,x$$

integriert werden.

Man erhält zunächst:

$$\frac{z\,d\,x + x\,d\,z}{d\,x} = \frac{2\,z}{1 - z^2},$$

$$x\,\frac{d\,z}{d\,x} = -\,z + \frac{2\,z}{1 - z^2},$$

$$x\,\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{z^3 + z}{1 - z^2},$$

$$\frac{d\,x}{x} = \frac{(1 - z^2)\,d\,z}{z\,(1 + z^2)}$$

oder

$$\frac{d\,x}{x} = \frac{(1 + z^2) - 2\,z^2}{z\,(1 + z^2)}\,d\,z,$$

$$\frac{d\,x}{x} = \frac{d\,z}{z} - \frac{2\,z}{1 + z^2}\,d\,z.$$

Dies gibt integriert:

$$l\,x = l\,z - l\,(1 + z^2) + l\,C,$$

also

$$x = \frac{C\,z}{1 + z^2}.$$

Setzt man wieder $\frac{y}{x}$ für z, so erhält man schließlich die Gleichung

$$x = \frac{C\,\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

oder

$$x^2 + y^2 = C\,y.$$

Die gesuchte Curve ist demnach irgend ein Kreis aus der Schar von Kreisen, welche die Abscissenaxe im Ursprunge berühren.

Sollte speciell die Gleichung jenes dieser Kreise aufgestellt werden, welcher durch den Punkt $P_0$ (2, 2) geht, so hätte man, um den Wert der Constanten für diesen speciellen Fall zu bestimmen, die Coordinaten des Punktes $P_0$ in die Integralgleichung zu setzen.

$$4 + 4 = 2\,C; \quad C = 4.$$

Die Gleichung dieses Kreises würde dann sein:

$$x^2 + y^2 = 4\,y.$$

## § 76. Integration der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Eine Differentialgleichung von der Form:

$$p \cdot \frac{dy}{dx} + qy + r = 0,$$

worin p, q und r Functionen von x allein bedeuten, wird, weil sie bezüglich y und $\frac{dy}{dx}$ linear ist, eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung genannt.

Man kann dieser Gleichung stets die bequemere Form

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

geben, wenn man sie durch p dividiert und P statt $\frac{q}{p}$, ferner Q statt $-\frac{r}{p}$ schreibt.

Selbstverständlich stellen auch in der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

P und Q Functionen von x allein vor.

Die Integration einer derartigen Differentialgleichung wird durch die Substitution

$$y = uv,$$

wobei u und v Functionen von x sind, immer ermöglicht. Die beiden Functionen u und v müssen der Aufgabe gemäß bestimmt werden.

Aus der Gleichung

$$y = uv$$

folgt durch Differentiation:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Setzt man diese Werte für y und $\frac{dy}{dx}$ in die Differentialgleichung ein, so geht sie in

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + Puv = Q$$

oder

$$u\frac{dv}{dx}+v\left[\frac{du}{dx}+Pu\right]=Q$$

über. Da für y das Product u . v zweier Functionen von x eingeführt wurde, so kann eine derselben einer beliebigen Bedingung unterworfen werden.

Zweckmäßig ist es nun, u derart anzunehmen, dass der Klammerausdruck in der letzen Gleichung verschwindet.

Aus der Bedingungsgleichung

$$\frac{du}{dx}+Pu=0$$

folgt:

$$\frac{du}{u}=-P\,dx,$$

also

$$lu=-\int P\,dx,$$

$$u=e^{-\int P\,dx}.$$

Das Integral $\int P\,dx$ enthält, weil P eine Function von x allein ist, keine andere Variable.

Zufolge dieser Bedingungsgleichung reduciert sich aber die Differentialgleichung auf

$$u\frac{dv}{dx}=Q$$

oder

$$dv=\frac{Q}{u}\,dx.$$

Sie ist in dieser Form direct integrabel, weil Q und u Functionen von x sind, und gibt:

$$v=\int\frac{Q}{u}\,dx+C.$$

Da nun

$$u=e^{-\int P\,dx},$$

also

$$v=\int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx+C.$$

so ist

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[C + \int Q\, e^{\int P\,dx}\,dx\right]$$

die gesuchte Integralgleichung.

Dieser Ausdruck für das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung erster Ordnung wurde bereits mit Hilfe des integrierenden Factors gefunden.

**Beispiele:**

1. Es soll die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$$

integriert werden.

Sie ist linear, demnach führt die Substitution

$$y = u\,v, \qquad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

zum Ziele. Durch dieselbe geht die Gleichung in

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + uv = e^{-x}$$

oder

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + u\right) = e^{-x}$$

über. Nach dem angegebenen Verfahren ist nun der Klammerausdruck Null zu setzen, wodurch folgende zwei Gleichungen erhalten werden:

$$\frac{du}{dx} + u = 0,$$

$$u\frac{dv}{dx} = e^{-x}.$$

Bringt man die erste auf die Form:

$$\frac{du}{u} = -\,dx,$$

so gibt sie durch Integration:

$$l\,u = -\,x$$

oder

$$u = e^{-x}.$$

Setzt man diesen Wert von u in die zweite, so geht sie in

$$dv = dx$$

über, woraus

$$v = x + C$$

folgt. Mithin ist das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung

$$y = e^{-x}(x + C).$$

**Anmerkung: Dasselbe Resultat hätte man auch durch Anwendung der Formel**

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[C + \int Q\, e^{\int P\,dx}\,dx\right]$$

**erhalten. In dieser wäre nur $P = 1$ und $Q = e^{-x}$ zu setzen gewesen.**

2. Es ist die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{ay}{x} = b\,x^n$$

zu integrieren.

Diese geht durch die Substitution

$$y = uv; \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

in

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + \frac{a}{x}\,uv = b\,x^n$$

oder

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + a\frac{u}{x}\right) = b\,x^n$$

über. Daraus erhält man durch Nullsetzen des Klammerausdruckes:

$$\frac{du}{dx} + a\frac{u}{x} = 0,$$

$$u\frac{dv}{dx} = b\,x^n.$$

Bringt man die erste der beiden Gleichungen auf die Form:

$$\frac{du}{u} = -a\frac{dx}{x},$$

so erhält man nach Integration:

$$l\,u = -a\,l\,x,$$

also

$$u = x^{-a}.$$

Setzt man diesen Wert in die zweite dieser Gleichungen und bringt sie auf die Form:

$$d\,v = b\,x^{n+a}\,d\,x,$$

so gibt diese:

$$v = b\,\frac{x^{n+a+1}}{n+a+1} + C.$$

Mithin ist das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$y = x^{-a}\left[\frac{b\,x^{n+a+1}}{n+a+1} + C\right]$$

oder

$$y = \frac{C}{x^a} + \frac{b}{n+a+1}\,x^{n+1}.$$

**3. Es ist das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung**

$$\frac{d\,y}{d\,x} + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2\,x$$

**zu bestimmen.**

**Setzt man:**

$$y = u\,v; \quad \frac{d\,y}{d\,x} = v\,\frac{d\,u}{d\,x} + u\,\frac{d\,v}{d\,x},$$

**so folgt:**

$$v\,\frac{d\,u}{d\,x} + u\,\frac{d\,v}{d\,x} + u\,v\cos x = \frac{1}{2}\sin 2\,x$$

**oder**

$$u\,\frac{d\,v}{d\,x} + v\left[\frac{d\,u}{d\,x} + u\cos x\right] = \frac{1}{2}\sin 2\,x.$$

**In der angegebenen Weise erhält man nun:**

$$\frac{d\,u}{d\,x} + u\cos x = 0,$$

$$u\,\frac{d\,v}{d\,x} = \frac{1}{2}\sin 2\,x,$$

**also**

$$\frac{d\,u}{u} = -\cos x\,d\,x,$$

$$l\,u = -\sin x,$$

$$u = e^{-\sin x},$$

**ferner**

$$e^{-\sin x}\,\frac{d\,v}{d\,x} = \frac{1}{2}\sin 2\,x,$$

$$dv = e^{\sin x}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx,$$

$$dv = e^{\sin x}\sin x\,.\cos x\,dx,$$

$$v = \int e^{\sin x}\sin x\cos x\,dx + C.$$

Durch theilweise Integration ($\sin x = u$, $e^{\sin x}\cos x\,dx = dv$) ergibt sich

$$v = \sin x\,e^{\sin x} - e^{\sin x} + C.$$

Das allgemeine Integral ist somit:

$$y = e^{-\sin x}[C + (\sin x - 1)e^{\sin x}]$$

oder

$$y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

4. Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

kann leicht auf eine lineare Differentialgleichung zurückgeführt werden. Dividiert man sie nämlich durch $y^n$, so nimmt sie die Form an

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q.$$

Setzt man nun:

$$y^{1-n} = z,$$

also

$$(1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx},$$

so folgt die Gleichung

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + Pz = Q,$$

welche bereits die Form der linearen Differentialgleichung hat.

Sie kann auch in der Form geschrieben werden:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)\,Pz = (1-n)\,Q$$

und hat mithin als allgemeines Integral zufolge der gefundenen Formel:

$$z = e^{(n-1)\int P\,dx}\left[C + (1-n)\int Qe^{(1-n)\int P\,dx}\,dx\right].$$

Führt man wieder durch die Rücksubstitution die Variable y ein, so erhält man das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$y^{1-n} = e^{(n-1)\int P\,dx}\,[C + (1-n)\int Q\,e^{(n-1)\int P\,dx}\,dx].$$

So geht beispielsweise die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + y = x\,y^2$$

oder

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + y^{-1} = x$$

durch die Substitution $y^{-1} = z$ über in die lineare Differentialgleichung:

$$\frac{dz}{dx} - z = -x,$$

deren Integral, wie man sich leicht überzeugen kann,

$$z = x + Ce^x + 1$$

ist. Wegen $z = y^{-1}$, d. h. $y = \frac{1}{z}$ folgt nun

$$y = \frac{1}{x + Ce^x + 1}$$

als Integral der gegebenen Differentialgleichung.

## § 77. Differentialgleichungen erster Ordnung höheren Grades.

Tritt in einer Differentialgleichung nur der erste Differentialquotient auf, aber in höheren Potenzen, von welchen die $n^{te}$ die höchste ist, so nennt man diese Gleichung eine Differentialgleichung erster Ordnung, $n^{ten}$ Grades.

Sie kann immer in der Form dargestellt werden:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + P_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n = 0.$$

wobei $P_1, P_2, \ldots P_n$ Functionen von x und y bedeuten. (Einzelne der P können selbstverständlich auch constant oder Null sein.)

Löst man diese Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$ auf, so erhält man im allgemeinen n Wurzeln $p_1, p_2, \ldots p_n$ derselben, welche wieder Functionen von x und y sind.

Das Gleichungspolynom kann dann ersetzt werden durch das Product der Wurzelfactoren, wodurch die Gleichung in

$$\left(\frac{dy}{dx} - p_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - p_2\right)\left(\frac{dy}{dx} - p_3\right)\ldots\left(\frac{dy}{dx} - p_n\right) = 0$$

übergeht.

Diese Gleichung wird durch das Verschwinden jedes der Factoren befriedigt. Setzt man irgend einen derselben gleich Null, so erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung ersten Grades, und ihr Integral ist ein Integral der gegebenen Gleichung, weil es dieselbe befriedigt.

Nachdem dies für jeden der Factoren gilt, so führt eine Differentialgleichung erster Ordnung $n^{ten}$ Grades zu n Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades, deren Integrale auch ihre Integrale sind.

Wären nun die Functionen

$$\varphi_1(x, y, C) = 0, \quad \varphi_2(x, y, C) = 0 \ldots \quad \varphi_n(x, y, C) = 0$$

diese n Integrale, so ist, weil alle, Lösungen der Differentialgleichung $n^{ten}$ Grades sind, die allgemeinste Lösung derselben das Product derselben.

$$\varphi_1(x, y, C), \varphi_2(x, y, C) \ldots \quad \varphi_n(x, y, C) = 0.$$

Geometrisch stellt eine Differentialgleichung erster Ordnung $n^{ten}$ Grades n Curvensysteme vor, weil ihr allgemeines Integral ein Product von n Factoren ist, von welchen jeder ein Curvensystem vorstellt. In manchen Fällen stellen die Factoren $\varphi(x, y, C)$ nur Systeme von Curvenästen vor, und dann gibt die Differentialgleichung weniger wie n Curvensysteme.

**Beispiele:**

1. Es ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3xy\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 0$$

zu bestimmen.

Die Auflösung der Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$ gibt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3xy \pm \sqrt{9x^2y^2 - 8x^2y^2}}{2x^2} = \frac{-3xy \pm xy}{2x^2}.$$

Demnach die zwei Differentialgleichungen ersten Grades:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}.$$

Aus diesen folgt:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0,$$

$$lx + ly = lC,$$

$$xy = C,$$

$$xy - C = 0$$

und

$$\frac{dy}{y} + 2\frac{dx}{x} = 0,$$

$$ly + 2lx = lC,$$

$$x^2y - C = 0.$$

Demnach ist das allgemeine Integral

$$(xy - C)(x^2y - C) = 0.$$

Die Gleichung stellt somit zwei Curvensysteme vor: Eine Schar gleichseitiger Hyperbeln, welche concentrisch sind und die Coordinatenaxen zu Asymptoten haben, sowie ein System von Curven dritter Ordnung mit denselben Asymptoten.

2. Welche geometrische Bedeutung hat die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{a}{x} = 0?$$

Die Gleichung ist zweiten Grades, woraus geschlossen werden könnte, dass sie zwei Curvensysteme vorstellt.

Löst man sie behufs Integration nach $\frac{dy}{dx}$ auf, so erhält man zwei Gleichungen ersten Grades:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x}},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{a}{x}},$$

aus welchen durch Integration

$$y + C = 2\sqrt{a\,x},$$

$$y + C = -\sqrt{a\,x},$$

folgt. Mithin ist das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$(y + C - 2\sqrt{a\,x})\,(y + C + 2\sqrt{a\,x}) = 0$$

oder

$$(y + C)^2 = 4\,a\,x.$$

Die Gleichung stellt somit nur ein System von Curven vor, nämlich eine Schar von Parabeln von gleichem Parameter, parallelen Axen und gemeinschaftlicher Scheiteltangente.

Die Erklärung liegt darin, dass die einzelnen Lösungen

$$y + C = 2\sqrt{a\,x},$$

$$y + C = -2\sqrt{a\,x}$$

nur Curvenäste vorstellen, und zwar die erste die oberen, die zweite die unteren Äste dieser Parabeln.

## § 78. Singuläre Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung.

Das wesentliche Merkmal des allgemeinen Integrals ist die in demselben auftretende willkürliche Constante.

Durch Specialisierung der Constanten erhält man particuläre Integrale, welche, geometrisch gedeutet, bestimmte, dem Werte der Constanten entsprechende Curven der durch das allgemeine Integral dargestellten Curvenschar vorstellen.

Das allgemeine Integral ist somit der Inbegriff aller particulären Integrale.

Häufig hat aber eine Differentialgleichung außer dem allgemeinen ein besonderes, singuläres Integral, welches in dem allgemeinen nicht enthalten ist, also aus demselben durch Specialisierung der Constanten nicht abgeleitet werden kann.

Wenn auch ein derartiges singuläres Integral aus dem allgemeinen nicht direct hergeleitet werden kann, so besteht doch ein gewisser Zusammenhang zwischen beiden, auf welchen im folgenden hingewiesen werden soll.

Ist beispielsweise

$$f(x, y, y') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

die gegebene Differentialgleichung und

$$F(x, y, C) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2$$

ihr bekanntes allgemeines Integral, so kann die eventuell vorhandene singuläre Lösung dieser Differentialgleichung stets im allgemeinen Integral enthalten gedacht werden, wenn an Stelle eines constanten Zahlenwertes für C eine entsprechende Function von x und y gesetzt wird.

Diese Function kann auf Grund folgender Überlegung gefunden werden.

Differenziert man das Integral 2 in Bezug auf x und eliminiert C aus dem Resultat dieser Differentiation und der Gleichung 2, so muss man wieder die Differentialgleichung 1 erhalten.

Dies muss zutreffen nicht nur in dem Falle, dass C eine willkürliche Constante ist, sondern auch dann, wenn C eine solche Function von x und y ist, die $F(x, y, C) = 0$ zum singulären Integral macht.

Differenziert man 2 thatsächlich in beiden Fällen, so erhält man im ersten:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

und im zweiten:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dC}\frac{dC}{dx} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4$$

Soll nun das Eliminationsresultat des C aus 2 und 3 dasselbe sein, wie jenes aus 2 und 4, so müssen die Gleichungen 3 und 4 vollkommen übereinstimmen, was nur möglich ist, wenn die Beziehung besteht:

$$\frac{dF}{dC}\frac{dC}{dx} = 0.$$

Diese Bedingungsgleichung kann auf zwei Arten erfüllt werden, und zwar durch

$$\frac{dC}{dx} = 0,$$

d. h. dadurch, dass C constant ist, was auf das allgemeine Integral zurückführt, oder durch

$$\frac{dF}{dC} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Die Gleichung 5 enthält im allgemeinen x, y und C, gibt als C als Function von x und y, welche für C in das allgemeine Integral 2 eingeführt, eventuell eine singuläre Lösung der Differentialgleichung geben kann.

Das allgemeine Integral

$$F(x, y, C) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

stellt geometrisch eine Curvenschar vor, und jedem bestimmten Werte des C entsprechen bestimmte Curven derselben.

Das Resultat der Elimination des C aus dem Gleichungssysteme

$$F(x, y, C) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

$$\frac{dF}{dC} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5$$

gibt, was bereits aus der Theorie der Umhüllungslinien bekannt ist, den geometrischen Ort der Schnittpunkte unmittelbar benachbarter Curven der Schar, also von Curven, deren Parameter C sich unendlich wenig oder gar nicht voneinander unterscheiden.

Demzufolge kann dieses Eliminationsresultat entweder den geometrischen Ort aller Knotenpunkte oder aller Spitzen der Curven der Schar vorstellen, weil durch diese zwei Äste derselben Curve durchgehen, welche demselben Parameterwerte C entsprechen. Oder aber stellt das Eliminationsresultat die Umhüllungslinie der Schar vor, als geometrischen Ort der Schnittpunkte benachbarter Curven.

Nur im letzten dieser drei Fälle ist dieses Eliminationsresultat eine singuläre Lösung, in den beiden anderen aber nicht, weil nur im genannten Falle die Differentialgleichung von demselben befriedigt werden kann.

Haben nämlich alle Curven der Schar Knotenpunkte oder Spitzen, so kann das in Rede stehende Eliminationsresultat diejenige Curve K (Fig. 139) vorstellen, welche alle Knotenpunkte, beziehungsweise Spitzen verbindet. Sind nun x, y die Coordinaten eines Punktes P dieser Curve, so gibt für diese die Differentialgleichung der Curvenschar

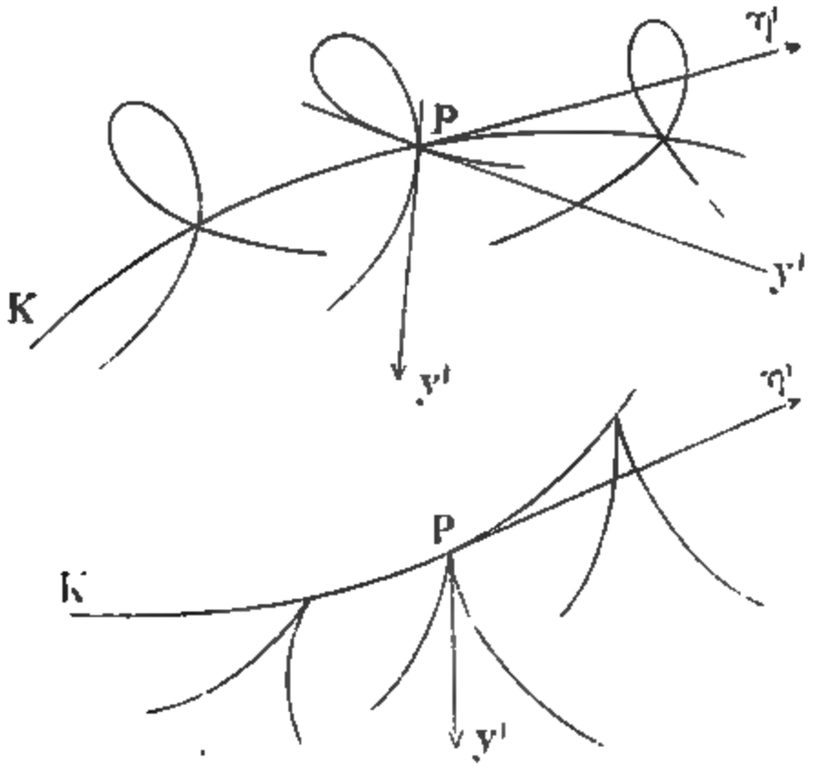
$$f(x, y, y') = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$$

zwei Werte, beziehungsweise einen Wert von y', nämlich die Richtung der Tangenten an die Curve der Schar in diesem Punkte.

Die durch Elimination des C aus 2 und 6 gebildete Gleichung gibt für dasselbe Wertesystem x und y auch einen Wert (eventuell

mehrere Werte) von $\frac{dy}{dx}$, beispielsweise $\eta'$, welcher die Richtung der Tangente an die Ortscurve K im Punkte P bestimmt.

Fig 139.




Da nun die Richtung dieser Tangente mit jenen der Tangenten an die Curve der Schar nicht übereinstimmt, sind die Werte $y'$ von $\eta'$ verschieden, die Differentialgleichung wird durch das aus dem Eliminationsresultat K erhaltene Wertesystem x, y und $\eta'$ nicht befriedigt, das Eliminationsresultat ist somit keine singuläre Lösung.

Anders steht die Sache im Falle der Umhüllungslinie. Diese hat nämlich mit jeder der Curven der Schar eine Tangente gemeinschaftlich, mithin wird der aus dem Eliminationsresultat folgende Wert von $\frac{dy}{dx}$, $\eta'$ gleich sein einem aus der Differentialgleichung sich ergebenden Werte von $y'$.

Die Differentialgleichung wird durch das Wertesystem x, y, $\eta'$ befriedigt, das Eliminationsresultat ist somit eine singuläre Lösung der Differentialgleichung.

**Beispiel:**

Hat die Differentialgleichung, deren bekanntes allgemeines Integral

$$x^2 + y^2 - 2C(x + y) + C^2 = 0$$

ist, eine singuläre Lösung?

Durch Differentiation des Integrals nach C erhält man

$$-(x+y)+C=0,$$
$$C=x+y.$$

Demzufolge kann

$$x^2+y^2-2(x+y)(x+y)+(x+y)^2=0$$

oder

$$xy=0$$

eine singuläre Lösung sein.

Diese zerfällt in zwei Lösungen, und zwar:

$$x=0 \quad \text{und} \quad y=0,$$

welche vorläufig nur den Schluss gestatten, dass die Coordinatenaxen in der durch die Gleichung dargestellten Curvenschar eine ausgezeichnete Rolle haben.

Um sich zu überzeugen, ob $xy=0$ thatsächlich eine singuläre Lösung der Differentialgleichung ist, muss man untersuchen, ob das aus der Gleichung

$$xy=0$$

sich ergebende Wertesystem von x, y und y' der Differentialgleichung genügt.

Durch Differentiation des Integrals nach x erhält man:

$$x+y\,.\,y'-C(1+y')=0,$$

und wenn man $C=x+y$ setzt, welcher Fall hier nur in Betracht zu ziehen ist:

$$x+y\,y`-(x+y)(1+y`)=0$$

oder

$$x\,y'+y=0$$

als die entsprechende Differentialgleichung.

Aus dieser folgt, dass für

$$x=0;\quad y`=\infty,$$
$$y=0;\quad y`=0$$

ist.

Aus den im allgemeinen Integral nicht enthaltenen Lösungen $x=0$ und $y=0$ ergeben sich dieselben Werte von y`, denn $x=0$ stellt die y-Axe vor, deren Richtung als die ihrer Tangente durch $y`=\infty$ bestimmt ist; $y=0$ ist die x-Axe und hat demnach als eigene Tangente die Richtung, welche $y`=0$ entspricht.

Die gefundene Lösung

$$x\,y = 0$$

ist somit ein singuläres Integral der Differentialgleichung.

Die gegebene Gleichung stellt eine Schar von Kreisen vor, welche beide Coordinatenaxen berühren. Die gefundene singuläre Lösung gibt die Einhüllende aller Kreise des ersten und dritten Quadranten.

## § 79. Anwendung der Differentialgleichungen erster Ordnung auf das Problem der Trajectorien und Evolventen.

Schneidet eine Curve alle Curven einer Schar nach einem bestimmten Gesetz, so nennt man sie eine Trajectorie dieser Curvenschar.

Zumeist besteht das Gesetz darin, dass die Trajectorie alle Curven der Schar unter demselben Winkel schneidet. Ist dieser Winkel speciell ein rechter, so nennt man die Trajectorie eine orthogonale Trajectorie, und dieser nur soll hier einige Aufmerksamkeit zugewendet werden.

Zwei Curven schneiden sich unter einem rechten Winkel, wenn die Tangenten der Curven im Schnittpunkte zu einander senkrecht stehen.

Ist die Gleichung der Curvenschar gegeben durch

$$F(x, y, \lambda) = 0,$$

worin $\lambda$ ein willkürlicher Parameter ist, so hat die Normale einer Curve dieser Schar im Punkte P (x, y) das Richtungsverhältnis

$$\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy}.$$

Die Tangente der orthogonalen Trajectorie im Punkte P (Fig. 140) fällt mit der Normalen der Curve aus der Schar zusammen und hat das Richtungsverhältnis

$$dx : dy.$$

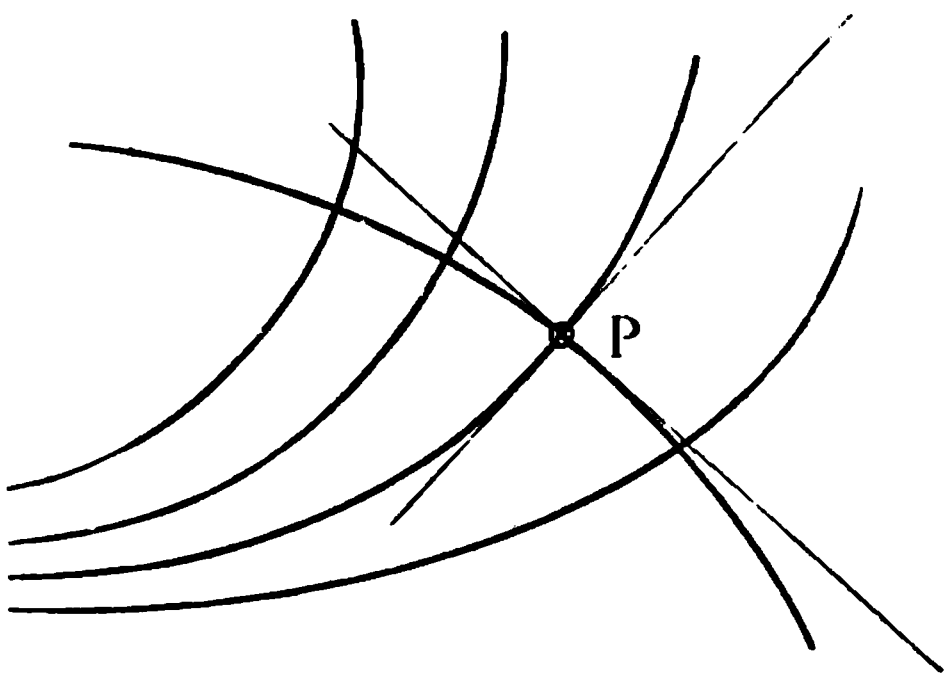
Daher besteht für die Punkte der Trajectorie die Beziehung

$$dx : dy = \frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy},$$

. aus welcher die Gleichung

$$\frac{dF}{dy}\,dx - \frac{dF}{dx}\,dy = 0$$

Fig. 140.




folgt. Diese Gleichung enthält noch den Parameter $\lambda$.

Eliminiert man denselben mit Zuhilfenahme der Gleichung der Schar

$$F(x, y, \lambda) = 0,$$

so erhält man die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorie.

Da die Integralgleichung dieser Differentialgleichung eine willkürliche Constante enthält, so entspricht der Curvenschar eine Schar von Trajectorien.

**Beispiel:**

Es ist die Schar der orthogonalen Trajectorien einer Schar von Parabeln zu bestimmen, welche die Abscissenaxe zur Hauptaxe und den Ursprung zum Scheitel haben.

Die Gleichung der Parabelschar ist:

$$y^2 - 2\,p\,x = 0.$$

Aus dieser folgt:

$$\frac{dF}{dx} = -2\,p, \quad \frac{dF}{dy} = 2\,y.$$

Mithin besteht für die Punkte der Trajectorie die Beziehung:

$$2\,y\,dx + 2\,p\,dy = 0,$$

welche nach Einführung des aus der Gleichung der Schar resultierenden Wertes von

$$p = \frac{y^2}{2\,x}$$

in die Differentialgleichung der Trajectorie übergeht

$$2\,y\,dx + \frac{y^2}{x}\,dy = 0,$$

$$2\,x\,dx + y\,dy = 0.$$

Die Integration gibt:

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = a^2,$$

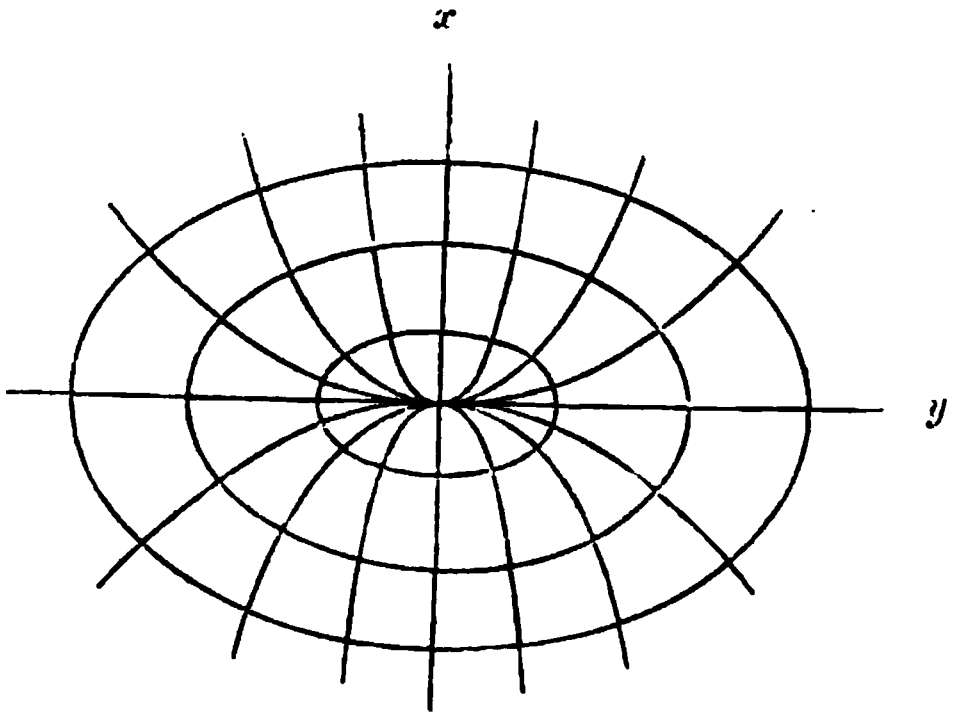
wo mit $a^2$ die willkürliche Constante bezeichnet ist.

Diese Gleichung, welcher auch die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2\,a^2} - 1 = 0$$

gegeben werden kann, ist die Gleichung der gesuchten Schar der Trajectorien (Fig. 141) und lässt erkennen, dass dieselbe aus ähnlichen Ellipsen besteht, deren Hauptdurchmesser mit den Coordinatenaxen zusammenfallen und deren Halbaxen das Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ haben.

Fig. 141.




Soll speciell diejenige Ellipse dieser Schar bestimmt werden, welche durch den Punkt P (1, 2) geht, so ergibt die Einsetzung der Coordinaten dieses Punktes in die Gleichung ihrer Schar:

$$1 + \frac{4}{2} = a^2,$$

also

$$a^2 = 3.$$

Die Gleichung dieser speciellen Ellipse ist dann

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} - 1 = 0.$$

Das Problem der Evolventen ist in jenem der orthogonalen Trajectorien enthalten, indem die Evolventen einer Curve die orthogonalen Trajectorien aller Tangenten dieser Curve sind.

## 2. Abschnitt.

## Integration der Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung enthält auch den zweiten Differentialquotienten und hat demnach im allgemeinen die Form:

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

oder, wenn sie nach $y''$ aufgelöst ist:

$$y'' = \varphi(x, y, y').$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist eine Gleichung zwischen x und y, welche, wie bereits in der Einleitung gezeigt wurde, zwei willkürliche Constante enthält.

Zunächst soll die Integration der einfachsten Fälle der Differentialgleichung zweiter Ordnung gezeigt werden, welche dadurch gekennzeichnet sind, dass mehrere der Größen x, y, y' in der Differentialgleichung explicit nicht vorkommen.

### § 80. Integration der einfachen Formen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

1. Die Differentialgleichung enthält weder y noch y', hat also die Form:

$$y'' = f(x).$$

Weil

$$y'' = \frac{dy'}{dx},$$

so kann diese Differentialgleichung in der Form:

$$dy' = f(x)\,dx$$

geschrieben werden und ist nun direct integrabel.

Das Ergebnis der Integration ist:

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1,$$

welches, da

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

als direct integrable Differentialgleichung erster Ordnung in der Form geschrieben werden kann:

$$d\,y = [\int f(x)\,d\,x + C_1]\,d\,x.$$

Aus dieser folgt das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung:

$$y = \int [\int f(x)\,d\,x + C_1]\,d\,x + C_2$$

oder

$$y = \int d\,x \int f(x)\,d\,x + C_1\,x + C_2.$$

**Beispiel**:

$$y'' = \cos x,$$

$$d\,y' = \cos x\,d\,x,$$

$$y' = \int \cos x\,d\,x + C_1 = \sin x + C_1,$$

$$d\,y = (\sin x + C_1)\,d\,x,$$

$$y = \int (\sin x + C_1)\,d\,x + C_2,$$

also

$$y = -\cos x + C_1\,x + C_2.$$

2. Die Differentialgleichung enthält kein x und kein y', hat also die Form:

$$y'' = f(y).$$

Da

$$y'' = \frac{d\,y'}{d\,x} = \frac{d\,y'}{d\,y} \cdot \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y'}{d\,y} \cdot y',$$

so hat man im vorliegenden Falle:

$$y' \frac{d\,y'}{d\,y} = f(y),$$

eine Differentialgleichung, welche bezüglich y und y' von der ersten Ordnung ist.

In dieser kann die Trennung der Variablen direct bewirkt werden und gibt:

$$y'\,d\,y' = f(y)\,d\,y.$$

Durch Integration folgt hieraus:

$$y'^2 = 2\int f(y)\,d\,y + C_1$$

oder

$$y' = \sqrt{2 \int f(y)\,d\,y + C_1}.$$

Setzt man jetzt:

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

so erhält man nach entsprechender Umformung:

$$\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C_1}} = dx,$$

und durch Integration das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C_1}} = x + C_2.$$

**Beispiele:**

1. Die gegebene Differentialgleichung sei:

$$y'' = \lambda^2 y.$$

Setzt man:

$$y'' = y'\frac{dy}{dy},$$

so geht sie in

$$y'\frac{dy'}{dy} = \lambda^2 y$$

oder

$$y'\,dy' = \lambda^2 y\,dy$$

über. Die Integration derselben gibt:

$$\frac{y'^2}{2} = \lambda^2\frac{y^2}{2} + \frac{C_1^2}{2} \quad (C_1^2 \text{ willkürliche Constante})$$

also

$$y' = \sqrt{C_1^2 + \lambda^2 y^2}.$$

Setzt man nun:

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1^2 + \lambda^2 y^2}$$

oder

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 + \lambda^2 y^2}} = x + C_2,$$

mithin nach der Integration:

$$\frac{1}{\lambda} l\,(\lambda y + \sqrt{C_1^2 + \lambda^2 y^2}) = x + C_2,$$

was bereits das allgemeine Integral repräsentiert.

Dieses Integral pflegt man gewöhnlich durch Umformung auf eine andere Form zu bringen.

Aus demselben folgt nämlich:

$$l\,(\lambda y + \sqrt{C_1^2 + \lambda^2 y^2}) = \lambda\,(x + C_2),$$

$$\lambda y + \sqrt{C_1^2 + \lambda^2 y^2} = e^{\lambda(x+C_2)},$$

$$\sqrt{C_1 + \lambda^2 y^2} = e^{\lambda(x+C_2)} - \lambda y$$

und nach Quadrierung:

$$C_1 + \lambda^2 y^2 = e^{2\lambda(x+C_2)} - 2\lambda y\, e^{\lambda(x+C_2)} + \lambda^2 y^2$$

oder

$$2\lambda y\, e^{\lambda(x+C_2)} = e^{2\lambda(x+C_2)} - C_1.$$

Dividiert man nun durch

$$2\lambda\, e^{\lambda(x+C_2)},$$

so hat man

$$y = \frac{1}{2\lambda}\,[e^{\lambda(x+C_2)} - C_1\, e^{-\lambda(x+C_2)}].$$

Da nun

$$\frac{1}{2\lambda}\, e^{\lambda C_2}$$

und

$$-\frac{C_1}{2\lambda}\, e^{-\lambda C_2}$$

ebenso willkürliche Constante sind wie $C_1$ und $C_2$, so kann man sie einfach mit einem Buchstaben bezeichnen, beispielsweise mit A und B. und erhält das allgemeine Integral in der üblichen Form:

$$y = A\, e^{\lambda x} + B\, e^{-\lambda x}.$$

2. Die gegebene Differentialgleichung sei:

$$y'' = -\lambda^2 y.$$

Setzt man wieder wie früher:

$$y'' = y'\frac{dy}{dy}.$$

so geht sie in

$$y' \frac{dy'}{dy} = -\lambda^2 y$$

über und kann in der Form

$$y' dy' = -\lambda^2 y\, dy$$

direct integriert werden. Die Integration gibt:

$$\frac{y'^2}{2} = -\lambda^2 \frac{y^2}{2} + \frac{C_1^2}{2}$$

oder

$$y' = \sqrt{C_1^2 - \lambda^2 y^2}.$$

Daraus folgt, weil

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - \lambda^2 y^2}} = dx,$$

also

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - \lambda^2 y^2}} = x + C_2,$$

d. h.

$$\frac{1}{\lambda} \text{ arc sin} \left(\frac{\lambda}{C_1} y\right) = x + C_2$$

oder

$$\text{arc sin} \left(\frac{\lambda}{C_1} y\right) = \lambda (x + C_2),$$

$$\frac{\lambda}{C_1} y = \sin \lambda (x + C_2),$$

$$y = \frac{C_1}{\lambda} \sin (\lambda x + \lambda C_2).$$

Entwickelt man nun den Sinus der Summe zweier Winkel, findet man:

$$y = \frac{C_1}{\lambda} [\sin \lambda x \cos \lambda C_2 + \cos \lambda x \sin \lambda C_2].$$

Nun sind aber die Größen

$$\frac{C_1}{\lambda} \cos \lambda C_2 \quad \text{und} \quad \frac{C_1}{\lambda} \sin \lambda C_2$$

ebenso willkürliche Constante wie $C_1$ und $C_2$ selbst, man kann sie daher mit je einem Buchstaben A, beziehungsweise B bezeichnen. und es

lt das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung in der üblichen
)rm:

$$y = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x.$$

3. Die Gleichung enthält weder x noch y, hat also die Form:

$$y'' = f(y').$$

Setzt man hier:

$$y'' = \frac{dy'}{dx},$$

geht die Gleichung in

$$\frac{dy'}{dx} = f(y'),$$

er, wird also bezüglich x und y' von der ersten Ordnung. Die
ennung der Variablen ist direct möglich:

$$\frac{dy'}{f(y')} = dx.$$

Die Integration gibt:

$$\int \frac{dy'}{f(y')} = x + c_1.$$

Das Integral ist eine Function von y' und soll durch $\varphi(y')$ dar-
stellt werden, so dass nach Berechnung des Integrals die Gleichung

$$\varphi(y') = x + c_1$$

ıalten wird.

Kann diese Gleichung nach y' aufgelöst werden, so stellt die
ıflösung y' als Function von x und $c_1$ dar, also etwa durch

$$y' = \psi(x + c_1).$$

Dann ist

$$dy = \psi(x + c_1)\,dx$$

d

$$y = \int \psi(x + c_1)\,dx + c_2$$

s allgemeine Integral der Gleichung.

Ist die Auflösung des ersten Integrals

$$\varphi(y') = x + c_1$$

ch y' nicht möglich, so muss bei der Integration der Differential
ichung anders vorgegangen werden.

Man setze dann:

$$y'' = y' \frac{dy'}{dy};$$

wodurch die Differentialgleichung in eine der ersten Ordnung zwischen y und y' übergeht, nämlich in

$$y' \frac{dy'}{dy} = f(y')$$

oder

$$\frac{y' dy'}{f(y')} = dy.$$

Aus dieser folgt:

$$\int \frac{y' dy'}{f(y')} = y + c_2,$$

und nach ausgeführter Integration:

$$\varphi_1(y') = y + c_2.$$

Kann nun diese Gleichung nach y' aufgelöst werden und gibt beispielsweise

$$y' = \psi_1(y + c_2),$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = \psi_1(y + c_2),$$

$$\frac{dy}{\psi_1(y + c_2)} = dx,$$

also

$$x + c_1 = \int \frac{dy}{\psi_1(y + c_2)}$$

das allgemeine Integral.

Man kann aber auch, durch Elimination des y' aus den beiden ersten Integralen

$$\varphi(y') = x + c_1,$$

$$\varphi_1(y') = y + c_2$$

das allgemeine Integral ableiten.

**Beispiel:**

Es ist die Differentialgleichung

$$y'' = m\,y'$$

gegeben und soll das allgemeine Integral derselben ermittelt werden.

Diese Aufgabe kann nach allen drei angegebenen Arten gelöst werden:

α) Setzt man:

$$y'' = \frac{dy'}{dx},$$

so erhält man:

$$\frac{dy'}{dx} = m\,y',$$

$$\frac{dy'}{y'} = m\,dx,$$

also

$$l\,y' = m\,x + c_0,$$

oder

$$y' = e^{m\,x + c_0} = e^{c_0} \cdot e^{m\,x},$$

und wenn man statt der willkürlichen Größe $e^{c_0}$ einfach $c_1$ schreibt

$$y' = c_1\,e^{m\,x}.$$

Ersetzt man nun in diesem ersten Integral, welches nach y' bereits aufgelöst ist, y' durch $\frac{dy}{dx}$, so folgt:

$$dy = c_1\,e^{m\,x}\,dx,$$

also

$$y = \frac{c_1}{m}\,e^{m\,x} + c_2$$

das allgemeines Integral der Differentialgleichung. In demselben kann statt $\frac{c_1}{m}$ einfach $c_1$ als ebenso willkürlich gesetzt werden, wodurch dasselbe die Form annimmt:

$$y = c_1\,e^{m\,x} + c_2.$$

β) Setzt man in der gegebenen Differentialgleichung

$$y'' = y' \frac{dy'}{dy},$$

so geht sie in

$$y' \frac{dy'}{dy} = m y',$$

$$dy' = m\,dy$$

über. Daraus folgt als erstes Integral:

$$y' = m y + k.$$

Ersetzt man in diesem y' durch $\frac{dy}{dx}$ und trennt die Variablen, so erhält man:

$$\frac{dy}{my + k} = dx,$$

und nach bewirkter Integration

$$\frac{1}{m} l(my + k) = x + k_2$$

oder

$$my + k = e^{mx + mk_2} = e^{mk_2} e^{mx}$$

als allgemeines Integral.

Löst man dasselbe nach y auf:

$$y = \frac{e^{mk_2}}{m} e^{mx} - \frac{k}{m}$$

und ersetzt die ganz willkürlichen Constanten $\frac{e^{mk_2}}{m}$ und $-\frac{k}{m}$ durch $c_1$, beziehungsweise $c_2$, so nimmt es dieselbe Form an, welche bereits gefunden wurde:

$$y = c_1 e^{mx} + c_2.$$

γ) Schließlich kann das allgemeine Integral aus den beiden ersten Integralen

$$y' = c_1 e^{mx},$$

$$y' = my + k$$

abgeleitet werden, wenn man aus denselben y' eliminiert.

Man findet auf diese Weise

$$c_1 e^{mx} = my + k,$$

lso

$$y = \frac{c_1}{m} e^{mx} - \frac{k}{m},$$

orin man einfach statt $\frac{c_1}{m}$ und $-\frac{k}{m}$ wieder $c_1$ und $c_2$ schreiben ann, so dass auch auf diesem Wege dieselbe Integralgleichung

$$y = c_1 e^{mx} + c_2$$

esultiert.

4. Die Differentialgleichung enthält kein y, hat also die Form:

$$y'' = f(x, y').$$

Setzt man hier:

$$y'' = \frac{dy'}{dx},$$

o geht die gegebene Gleichung über in eine Differentialgleichung erster rdnung bezüglich x und y':

$$\frac{dy'}{dx} = f(x, y'),$$

nd kann nach den Regeln für solche behandelt werden.

Hat man das Integral derselben gefunden:

$$y' = \varphi(x, c_1);$$

o setzt man hierin $\frac{dy}{dx}$ statt y', trennt die Variablen und kann dann ochmals integrieren, wodurch das allgemeine Integral gewonnen wird.

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, c_1),$$

$$dy = \varphi(x, c_1)\, dx,$$

$$y = \int \varphi(x, c_1)\, dx + c_2.$$

**Beispiel:**

Es ist das Integral der Gleichung

$$y'' = -\frac{1 + y'^2}{1 + x^2}$$

nzugeben.

Setzt man

$$y'' = \frac{dy'}{dx},$$

so findet man aus

$$\frac{dy'}{dx} = -\frac{1+y'^2}{1+x^2},$$

$$\frac{dy'}{1+y'^2} = -\frac{dx}{1+x^2},$$

also durch Integration:

$$\text{arc tang } y' = -\text{arc tang } x - \text{arc tang } \frac{1}{c_1},$$

wobei $-\text{arc tang } \frac{1}{c_1}$ die willkürliche Constante ist, welche in dieser Form wegen der leichteren Umformung dieses ersten Integrals angesetzt wurde.

Ist nämlich

$$\begin{matrix} \text{tang } \alpha = a, \\ \text{tang } \beta = b, \end{matrix} \quad \text{also} \quad \begin{matrix} \alpha = \text{arc tang } a, \\ \beta = \text{arc tang } b, \end{matrix}$$

so ist

$$\text{tang } (\alpha+\beta) = \frac{\text{tang } \alpha + \text{tang } \beta}{1 - \text{tang } \alpha \text{ tang } \beta} = \frac{a+b}{1-ab},$$

also

$$\alpha + \beta = \text{arc tang } a + \text{arc tang } b = \text{arc tang } \frac{a+b}{1-ab}.$$

Demnach ist

$$\text{arc tang } x + \text{arc tang } \frac{1}{c_1} = \text{arc tang } \frac{x+\frac{1}{c_1}}{1-\frac{x}{c_1}} = \text{arc tang } \frac{c_1 x + 1}{c_1 - x}$$

und mit Rücksicht hierauf kann das gefundene erste Integral auch in der Form geschrieben werden:

$$\text{arc tang } y' = -\text{arc tang } \frac{c_1 x + 1}{c_1 - x},$$

aus welcher unmittelbar

$$y' = \frac{c_1 x + 1}{x - c_1}$$

folgt.

Setzt man nun $y' = \frac{dy}{dx}$, so kann man nach Trennung der Variablen nochmals integrieren:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1 x + 1}{x - c_1},$$

$$dy = \frac{c_1 x + 1}{x - c_1} dx.$$

$$y = \int \frac{c_1 x + 1}{x - c_1} dx + c_2.$$

Die angezeigte Integration kann mittelst der Substitution

$$x - c_1 = u$$

ausgeführt werden.

Aus der Substitutionsgleichung folgt:

$$dx = du, \quad x = u + c_1$$

und man hat:

$$y = \int \frac{c_1 (u + c_1) + 1}{u} du + c_2,$$

$$y = \int \frac{c_1 u + c_1^2 + 1}{u} du + c_2,$$

$$y = c_1 \int du + (c_1^2 + 1) \int \frac{du}{u} + c_2,$$

also

$$y = c_1 u + (c_1^2 + 1) \, l\, u + c_2.$$

Hieraus erhält man durch Rücksubstitution:

$$y = c_1 (x - c_1) + (c_1^2 + 1) \, l(x - c_1) + c_2$$

oder

$$y = c_1 x + (c_1^2 + 1) \, l(x - c_1) + c_2 - c_1^2$$

als die gesuchte Integralgleichung.

5. Die Differentialgleichung enthält kein $x$, hat also die Form:

$$y'' = f(y, y').$$

Durch die Substitution

$$y'' = y' \frac{dy'}{dy}$$

geht dieselbe in eine Differentialgleichung erster Ordnung in Bezug auf $y$ und $y'$ über, kann also nach den Regeln für Differentialgleichungen erster Ordnung integriert werden und liefert

$$y' = v$$

Aus diesem ersten Integral folgt nach Einführung von $\frac{dy}{dx}$ für $y'$:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, c_1),$$

$$\frac{dy}{\varphi(y, c_1)} = dx$$

und hieraus durch Integration das allgemeine Integral

$$x + c_2 = \int \frac{dy}{\varphi(y, c_1)}.$$

**Beispiel:**

Welche Curve hat die Eigenschaft, dass der Krümmungsradius und das Normalstück ein constantes Verhältnis haben?

Bekanntlich ist der Krümmungsradius

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

und das Normalstück

$$n = y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Demnach gibt die Bedingung

$$\frac{\rho}{n} = \lambda \quad (\lambda \text{ ist das constante Verhältnis}$$

oder

$$\rho = \lambda n$$

die Differentialgleichung der Curve:

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \lambda y (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$y'' = \frac{1 + y'^2}{\lambda y}.$$

Um die Gleichung der Curve zu finden, muss man diese Differentialgleichung integrieren.

Setzt man hierin:

$$y'' = y' \frac{dy'}{dy},$$

so geht sie in

$$y' \frac{dy'}{dy} = \frac{1}{\lambda} \frac{1+y'^2}{y}$$

oder

$$\frac{y' dy'}{1+y'^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{dy}{y}$$

über. Die Integration derselben gibt:

$$\frac{1}{2} l(1+y'^2) = \frac{1}{\lambda} l y - \frac{1}{\lambda} l c_1$$

oder

$$l(1+y'^2) = \frac{2}{\lambda} l\left(\frac{y}{c_1}\right) = l\left(\frac{y}{c_1}\right)^{\frac{2}{\lambda}},$$

d. h.

$$1+y'^2 = \left(\frac{y}{c_1}\right)^{\frac{2}{\lambda}},$$

daher

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^{\frac{2}{\lambda}} - 1} = \frac{1}{\sqrt{c_1^{\frac{2}{\lambda}}}} \sqrt{y^{\frac{2}{\lambda}} - c_1^{\frac{2}{\lambda}}}.$$

Nachdem nun $c_1^{\frac{2}{\lambda}}$ ebenso willkürlich wie $c_1$ selbst, so kann man auch schreiben:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \sqrt{y^{\frac{2}{\lambda}} - c_1}.$$

Ersetzt man nun $y'$ durch $\frac{dy}{dx}$, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \sqrt{y^{\frac{2}{\lambda}} - c_1},$$

$$\sqrt{c_1} \frac{dy}{\sqrt{y^{\frac{2}{\lambda}} - c_1}} = dx,$$

also nach Integration:

$$\sqrt{c_1} \int \frac{dy}{\sqrt{y^{\frac{2}{\lambda}} - c_1}} = x + c_2.$$

Um die angezeigte Integration durchführen zu können, mu für $\lambda$ einen bestimmten Wert festsetzen. Denn den versc

Werten von $\lambda$ entsprechen Curven von ganz verschiedenem Charakter in unendlicher Mannigfaltigkeit.

So ist beispielsweise für den Kreis $\lambda = -1$, für die Kettenlinie $\lambda = +1$, für die auf die Axe und Leitlinie bezogene Parabel $\lambda = +2$, für die Cykloide $\lambda = -2$ etc., wovon man sich durch Vergleich der für den Krümmungsradius und für das Normalstück bei Untersuchung der Curven gefundenen Werte überzeugen kann.

Nimmt man also $\lambda = 2$ an, so muss sich als Integralgleichung die Gleichung der Parabel ergeben.

In der That geht das eben gefundene Integral für $\lambda = 2$ über in

$$\sqrt{c_1} \int \frac{dy}{\sqrt{y - c_1}} = x + c_2,$$

also

$$2\sqrt{c_1}\sqrt{y - c_1} = x + c_2$$

oder

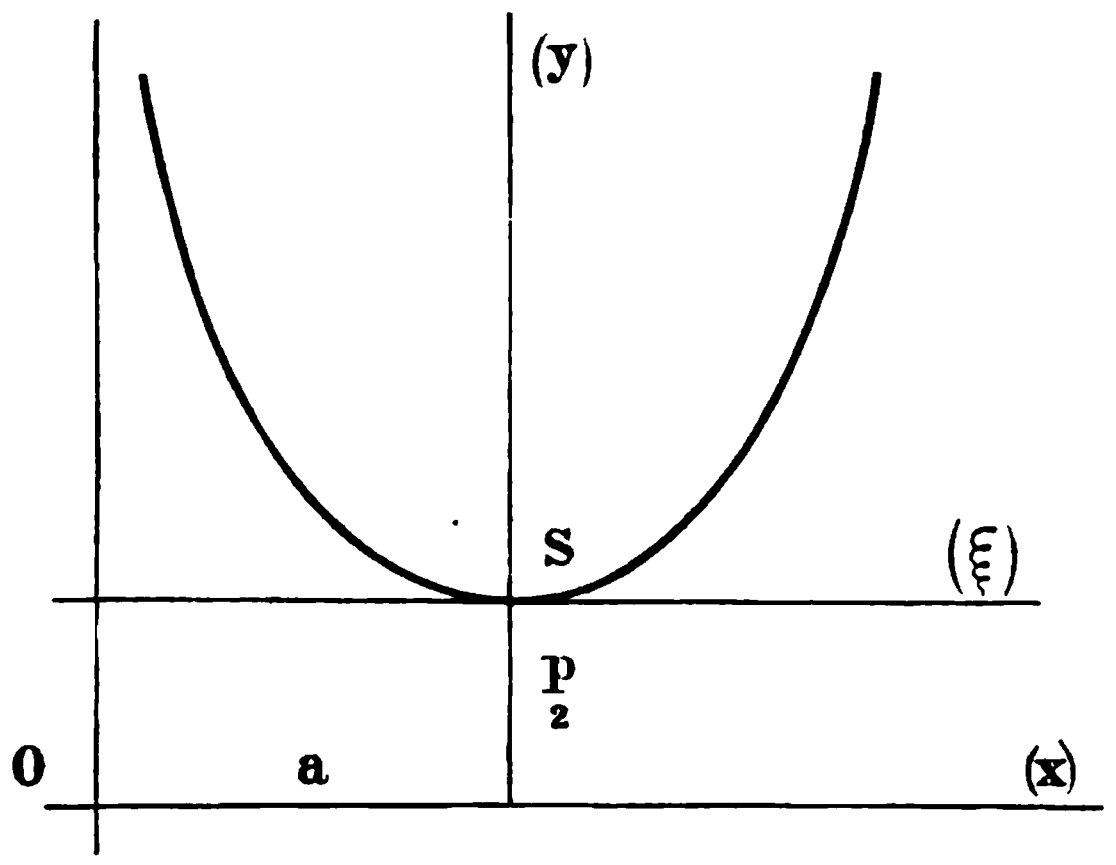
$$4 c_1 (y - c_1) = (x + c_2)^2.$$

Setzt man darin $c_1 = \frac{p}{2}$, $c_2 = a$, so nimmt diese Integralgleichung die Form an:

$$(x - a)^2 = 2p\left(y - \frac{p}{2}\right),$$

welche erkennen lässt, dass die durch sie dargestellte Curvenschar eine Schar von Parabeln ist.

Fig. 142.




Um die Lage der Parabeln zu erkennen, hat man nur die Gleichung auf ein paralleles Coordinatensystem zu transformieren, dessen Ursprung (Fig. 142) die Coordinaten a und $\frac{p}{2}$ hat. Bezeichnet man die neuen Coordinaten mit $\xi$ und $\eta$, so sind die Transformationsgleichungen:

$$x = a + \xi; \quad y = \frac{p}{2} + \eta.$$

Zufolge dieser geht die Gleichung über in

$$\xi^2 = 2\,p\,\eta,$$

stellt somit eine Parabel vor, welche die ξ-Axe im Scheitel berührt und deren Leitlinie mit der x-Axe zusammenfällt.

Da die Coordinaten a und $\frac{p}{2}$ des Scheitelpunktes ganz willkürlich sind, so stellt die Integralgleichung

$$(x - a)^2 = 2\,p\left(y - \frac{p}{2}\right)$$

die Schar aller Parabeln vor, welche die x-Axe zur Leitlinie haben.

Demzufolge erfüllt jede Parabel, deren Leitlinie mit der Abscissenaxe zusammenfällt, die in der Aufgabe gestellte Bedingung.

## § 81. Integration linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Eine Differentialgleichung von der Form:

$$p\frac{d^2y}{dx^2} + q\frac{dy}{dx} + r\,y + s = 0,$$

worin p, q, r und s Functionen von x allein sind, wird eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung genannt, weil sie bezüglich y und der beiden Differentialquotienten y' und y'' linear ist.

Man kann derselben stets durch eine leicht einzusehende Operation die einfachere Form geben:

$$y'' + P\,y' + Q\,y = R,$$

in welcher wieder P, Q und R Functionen von x allein bedeuten.

Ist speciell $R = 0$, so geht diese Differentialgleichung in

$$y'' + P\,y' + Q\,y = 0$$

über und wird eine reducierte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung genannt, während die nicht reducierte

$$y'' + P\,y' + Q\,y = R,$$

in welcher R von Null verschieden ist, als complete lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung bezeichnet wird.

Das Integral der letzteren kann aus dem Integral der ersteren abgeleitet werden, und aus diesem Grunde sollen beide Formen nacheinander untersucht werden.

1. Sind $y = \varphi(x)$ und $y = \psi(x)$ zwei particuläre Integrale der reducierten Differentialgleichung, nämlich solche Functionen von x welche der gegebenen reducierten Differentialgleichung

$$y'' + P y' + Q y = 0$$

genügen, so ist

$$y = c_1 \varphi(x) + c_2 \psi(x),$$

worin $c_1$ und $c_2$ willkürliche Constante sind, das allgemeine Integral der Differentialgleichung.

Denn setzt man diesen Wert von y und ebenso auch für y' und y'' die diesem Werte entsprechenden Differentialquotienten

$$y' = c_1 \varphi'(x) + c_2 \psi'(x),$$
$$y'' = c_1 \varphi''(x) + c_2 \psi''(x),$$

in die Differentialgleichung, so erhält man:

$$c_1 \varphi''(x) + c_2 \psi''(x) + P[c_1 \varphi'(x) + c_2 \psi'(x)] + Q[c_1 \varphi(x) + c_2 \psi(x)] = 0$$

oder

$$c_1[\varphi''(x) + P\varphi'(x) + Q\varphi(x)] + c_2[\psi''(x) + P\psi'(x) + Q\psi(x)] = 0.$$

Da nun $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ particuläre Integrale sind, müssen die Klammerausdrücke verschwinden, der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen ist Null, also wird die Gleichung befriedigt.

Da die Gleichung

$$y = c_1 \varphi(x) + c_2 \psi(x)$$

die Differentialgleichung befriedigt und überdies zwei willkürliche Constante enthält, so ist sie das allgemeine Integral derselben.

2. Kennt man ein particuläres Integral der reducierten Gleichung, so kann man ein zweites, mithin auch das allgemeine Integral derselben finden.

Hiezu ist folgender Vorgang einzuhalten.

Es sei

$$y = \varphi(x)$$

das bekannte particuläre Integral. Man setzt:

$$y = u\varphi(x)$$

und bestimmt u, welches wieder eine Function von x ist, derart, dass $= u\varphi(x)$ auch ein particuläres Integral der Differentialgleichung wird.

Das allgemeine Integral ist dann zufolge des in 1. ausgesprochenen Satzes

$$y = c_1 \varphi(x) + c_2 u \varphi(x).$$

Soll

$$y = u \varphi(x)$$

ein particuläres Integral der Differentialgleichung sein, so muss die Differentialgleichung durch die aus demselben abgeleiteten Werte:

$$y = u \varphi(x),$$
$$y' = u' \varphi(x) + u \varphi'(x),$$
$$y'' = u'' \varphi(x) + 2 u' \varphi'(x) + u \varphi''(x)$$

befriedigt werden.

Setzt man also diese Werte in die gegebene Gleichung, so erhält man:

$$u'' \varphi(x) + 2 u' \varphi'(x) + u \varphi''(x) + P[u' \varphi(x) + u \varphi'(x)] + Q \varphi(x) = 0$$

oder

$$u[\varphi''(x) + P \varphi'(x) + Q \varphi(x)] + u'[2 \varphi'(x) + P \varphi(x)] + u'' \varphi(x) = 0.$$

Zufolge der Voraussetzung, dass $\varphi(x)$ ein particuläres Integral ist, verschwindet der Factor von u, und es bleibt nur die Gleichung

$$u'[2 \varphi'(x) + P \varphi(x)] + \varphi(x) u'' = 0$$

oder

$$u'' = - \frac{u'}{\varphi(x)} [2 \varphi'(x) + P \varphi(x)].$$

Nun ist $\varphi(x)$ eine bekannte Function von x, mithin ist durch diese Gleichung u'' als Function von x und u' gegeben.

Sie hat die Form:

$$u'' = \psi(x, u')$$

und kann nach der im § 80, Pkt. 4 angegebenen Methode integriert werden, wodurch u als Function von x erhalten wird.

Ist u bekannt, dann ist auch das zweite particuläre Integral $y = u \varphi(x)$ bestimmt.

**Beispiele:**

1. Es soll die reducierte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten integriert werden.

Diese Gleichung ist

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0.$$

Die particulären Integrale derselben kann man sich durch den Versuch verschaffen.

Zu diesem Zwecke soll untersucht werden, ob

$$y = e^{\lambda x}$$

ein particuläres Integral dieser Gleichung ist.

Bildet man:

$$y' = \lambda\, e^{\lambda x}$$

und

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

so müssen, wenn $y = e^{\lambda x}$ ein Integral sein soll, die drei zusammengehörigen Werte von y, y' und y'' die gegebene Gleichung befriedigen.

Durch Einführen dieser Werte in die Gleichung erhält man:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\,\lambda\, e^{\lambda x} + b\, e^{\lambda x} = 0$$

oder

$$\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0.$$

Daraus ist zu ersehen, dass $y = e^{\lambda x}$ nicht für jeden beliebigen Wert von $\lambda$ ein Integral der Gleichung ist, sondern nur für solche Werte von $\lambda$, welche aus der Gleichung

$$\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0$$

resultieren.

Ist also

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\,b}}{2}$$

so ist

$$y = e^{\lambda x}$$

ein particuläres Integral.

Nun sind aber drei Fälle möglich, und zwar:

*a*) $a^2 > 4\,b$.

Beide Wurzeln $\lambda_1$ und $\lambda_2$ sind real, demnach sind

$$y = e^{\lambda_1 x} \quad \text{und} \quad y = e^{\lambda_2 x}$$

particuläre Integrale; und

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$\left| \lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \right|$$

das allgemeine Integral.

*b*) $a^2 > 4b$.

Beide Wurzeln $\lambda_1$ und $\lambda_2$ sind imaginär und können kurz gesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + \beta i \\ \lambda_2 &= \alpha - \beta i \end{aligned}\right| \alpha = -\frac{a}{2}; \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}.$$

Das allgemeine Integral ist dann:

$$y = c_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2 e^{(\alpha-\beta i)x},$$

kann jedoch durch Umformung von den imaginären Bestandtheilen befreit werden.

Zunächst kann man nämlich rechts vom Gleichheitszeichen $e^{\alpha x}$ zum Factor herausheben und erhält:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}).$$

Nun ist aber zufolge Eulers Formel:

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \sin\beta x,$$

$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i \sin\beta x,$$

mithin auch:

$$y = e^{\alpha x}[c_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)],$$

$$y = e^{\alpha x}[(c_1 + c_2)\cos\beta x + i(c_1 - c_2)\sin\beta x].$$

Setzt man statt der ganz willkürlichen Größen $c_1 + c_2$ und $i(c_1 - c_2)$ die ebenso willkürlichen $k_1$, beziehungsweise $k_2$, so erhält man schließlich das allgemeine Integral in der üblichen Form:

$$y = e^{\alpha x}(k_1 \cos\beta x + k_2 \sin\beta x).$$

*c*) $a^2 = 4b$.

In diesem Falle sind beide Wurzeln $\lambda_1$ und $\lambda_2$ gleich, nämlich $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2}$, weshalb nur ein particuläres Integral

$$y = e^{-\frac{ax}{2}}$$

bestimmt ist.

Das zweite particuläre Integral kann nun nach der im Pkt. 2 angegebenen Regel gefunden werden.

Setzt man in die Differentialgleichung

$$y = u\,e^{-\frac{ax}{2}},$$

also

$$y' = -\frac{a}{2}u\,e^{-\frac{ax}{2}} + e^{-\frac{ax}{2}}u',$$

$$y'' = \frac{a^2}{4}e^{-\frac{ax}{2}}u - a\,e^{-\frac{ax}{2}}u' + e^{-\frac{ax}{2}}u'',$$

so erhält man nach Weglassen des in allen Gliedern vorkommenden Factors $e^{-\frac{ax}{2}}$:

$$\left(\frac{a^2}{4}u - a\,u' + u''\right) + a\left(-\frac{a}{2}u + u'\right) + b\,u = 0$$

oder

$$u\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b\right) + u'(a - a) + u'' = 0,$$

$$u\left(b - \frac{a^2}{4}\right) + u'' = 0,$$

$$\frac{1}{4}u(4\,b - a^2) + u'' = 0,$$

und weil

$$4\,b - a^2 = 0,$$

schließlich:

$$u'' = 0.$$

Daraus folgt

$$u' = \frac{d\,u}{d\,x} = c,$$

also

$$u = c\,x + c_1.$$

Wählt man, da es sich nur um ein particuläres Integral handelt, $c = 1$ und $c_1 = 0$, so findet man:

$$u = x.$$

Demnach ist das zweite particuläre Integral

$$y = x e^{-\frac{ax}{2}}.$$

Das allgemeine Integral ergibt sich jetzt zufolge Pkt. 1

$$y = c_1 e^{-\frac{ax}{2}} + c_2 x e^{-\frac{ax}{2}}$$

oder

$$y = e^{-\frac{ax}{2}} (c_1 + c_2 x).$$

2. Es ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$x y'' + 2 y' + \lambda^2 x y = 0$$

anzugeben.

Wäre ein particuläres Integral dieser Gleichung bekannt, so könnte auch das allgemeine auf die in Pkt. 2 angegebene Weise gefunden werden.

An diesem Beispiele soll nun gezeigt werden, dass es manchmal gelingt, ein particuläres Integral durch Anwendung der Reihe von Maclaurin zu bekommen.

Die Reihe von Maclaurin ist bekanntlich:

$$y = f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

oder, wenn man $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)\dots$ mit $y_0$, $y'_0$, $y''_0$ bezeichnet,

$$y = y_0 + x y'_0 + \frac{x^2}{2!} y''_0 + \frac{x^3}{3!} y'''_0 + \dots$$

Durch Differentiation der gegebenen Gleichung erhält man:

$$x y''' + y'' + 2 y'' + \lambda^2 x y' + \lambda^2 y = 0$$

oder

$$x y''' + 3 y'' + \lambda^2 x y' + \lambda^2 y = 0.$$

Eine zweite Differentiation gibt:

$$x y^{IV} + y''' + 3 y''' + \lambda^2 x y'' + \lambda^2 y' + \lambda^2 y' = 0$$

oder

$$x y^{IV} + 4 y''' + \lambda^2 x y'' + 2 \lambda^2 y' = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt wieder:

$$x\,y^{V} + 5\,y^{IV} + \lambda^2 x\,y''' + 3\lambda^2 y'' = 0$$

u. s. w.

In dieser Weise gelangt man also zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
x\,y'' + 2\,y' + \lambda^2 x\,y &= 0,\\
x\,y''' + 3\,y'' + \lambda^2 x\,y' + \lambda^2 y &= 0,\\
x\,y^{IV} + 4\,y''' + \lambda^2 x\,y'' + 2\lambda^2 y' &= 0,\\
x\,y^{V} + 5\,y^{IV} + \lambda^2 x\,y''' + 3\lambda^2 y'' &= 0,\\
x\,y^{VI} + 6\,y^{V} + \lambda^2 x\,y^{IV} + 4\lambda^2 y''' &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Setzt man in diesem Gleichungssystem $x = 0$, so gehen $y,\ y',\ y'',\ldots$ über in $y_0,\ y'_0,\ y''_0\ldots$ und man erhält:

$$\begin{aligned}
2\,y'_0 &= 0,\\
3\,y''_0 + \lambda^2 y_0 &= 0,\\
4\,y'''_0 + 2\lambda^2 y'_0 &= 0,\\
5\,y^{IV}{}_0 + 3\lambda^2 y''_0 &= 0,\\
6\,y^{V}{}_0 + 4\lambda^2 y'''_0 &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

woraus direct zu erkennen ist, dass

$$y'_0 = y'''_0 = y^{V}{}_0 = \ldots = 0,$$

ferner

$$\begin{aligned}
y_0'' &= -\frac{\lambda^2 y_0}{3},\\
y^{IV}{}_0 &= -\frac{3\lambda^2}{5}\,y''_0 = \left(-\frac{3\lambda^2}{5}\right)\left(-\frac{\lambda^2 y_0}{3}\right) = \frac{\lambda^4 y_0}{5},\\
y^{VI}{}_0 &= -\frac{5\lambda^2}{7}\,y^{IV}{}_0 = \left(-\frac{5\lambda^2}{7}\right)\frac{\lambda^4 y_0}{5} = -\frac{\lambda^6 y_0}{7},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Da nun $y_0$ irgend einen constanten Wert haben kann (es ist nämlich ganz willkürlich, siehe Einleitung) und es sich nur um ein particuläres Integral handelt, so kann man $y_0 = \lambda$ annehmen und hat dann:

$$y_0 = \lambda, \quad y''_0 = -\frac{\lambda^3}{3}, \quad y^{IV}{}_0 = \frac{\lambda^5}{5}, \quad y^{VI}{}_0 = -\frac{\lambda^7}{7}, \ldots$$

Nachdem jetzt die Werte von y und aller Differentialquotienten dieser Function für den Wert des $x = 0$ bekannt sind, kann sie durch Maclaurins Reihe dargestellt werden:

$$y = \lambda - \frac{x^2}{2!}\frac{\lambda^3}{3} + \frac{x^4}{4!}\frac{\lambda^5}{5} - \frac{x^6}{6!}\frac{\lambda^7}{7} + \ldots$$

$$y = \frac{1}{x}\left[\lambda x - \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \frac{(\lambda x)^5}{5!} - \frac{(\lambda x)^7}{7!} + \ldots\right].$$

Die Summe der Reihe in der Klammer ist aber $\sin \lambda x$, mithin ist

$$y = \frac{\sin \lambda x}{x}$$

ein particuläres Integral der Gleichung.

Das zweite particuläre Integral könnte wieder nach *b)* durch die Substitution $y = u\frac{\sin \lambda x}{x}$ gefunden werden. Man kann sich aber leicht überzeugen, dass auch

$$y = \frac{\cos \lambda x}{x}$$

ein particuläres Integral ist.

Demzufolge hat man als allgemeines Integral der gegebenen Gleichung

$$y = \frac{1}{x}(c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x).$$

3. Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei particuläre Integrale der reducierten Gleichung

$$y'' + P y' + Q y = 0,$$

so ist

$$y = u\varphi(x) + v\psi(x),$$

worin u und v noch zu bestimmende Functionen von x bedeuten, von welchen jede eine willkürliche Constante enthält, das allgemeine Integral der completen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' + Py' + Qy = R.$$

Die beiden Functionen u und v können auf folgende Weise ermittelt werden.

Differenziert man die Integralgleichung

$$y = u\varphi(x) + v\psi(x),$$

so erhält man:

$$y' = u'\varphi(x) + v'\psi(x) + u\varphi'(x) + v\psi'(x),$$

und kann nun den willkürlichen Functionen u und v die Bedingung auferlegen:

$$u'\varphi(x) + v'\psi(x) = 0,$$

welche

$$y' = u\varphi'(x) + v\psi'(x)$$

zur Folge hat. (Es ist dies der verbleibende Theil der Gleichung.)

Durch nochmalige Differentiation erhält man aus der letzten Gleichung:

$$y'' = u\varphi''(x) + v\psi''(x) + u'\varphi'(x) + v'\psi'(x).$$

Legt man nun den beiden Functionen u und v die zweite Bedingung auf:

$$u'\varphi'(x) + v'\psi'(x) = R,$$

so sind diese vollkommen bestimmt, und zwar derart, dass der Ausdruck

$$y = u\varphi(x) + v\psi(x)$$

das allgemeine Integral der completen Gleichung ist.

Denn die zweite Bedingungsgleichung hat zur Folge:

$$y'' = u\varphi''(x) + v\psi''(x) + R.$$

Setzt man also die Werte y, y' und y'' des Integrals in die complete Differentialgleichung, so erhält man auf der linken Seite derselben:

$$[u\varphi''(x) + v\psi''(x) + R] + P[u\varphi'(x) + v\psi'(x)] + Q[u\varphi(x) + v\psi(x)] = R$$

oder

$$u[\varphi''(x) + P\varphi'(x) + Q\varphi(x)] + v[\psi''(x) + P\psi'(x) + Q\psi(x)] + R = R.$$

Hierin verschwinden die Ausdrücke in den Klammern, denn sie sind Resultate der Substitution von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in die reducierte Gleichung, deren particuläre Integrale sie repräsentieren. Die linke Seite der Differentialgleichung wird zu R, also gleich der rechten Seite, d. h. die Differentialgleichung wird befriedigt, wodurch die ausgesprochene Behauptung erwiesen erscheint.

Aus den beiden Bedingungsgleichungen

$$u'\varphi(x) + v'\psi(x) = 0,$$

$$u'\varphi'(x) + v'\psi'(x) - R = 0$$

erhält man:

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} \psi(x) & 0 \\ \psi'(x) & -R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix}} = -\frac{R\psi(x)}{\varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x)},$$

$$v' = -\frac{\begin{vmatrix} \varphi(x) & 0 \\ \varphi'(x) & -R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix}} = +\frac{R\varphi(x)}{\varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x)},$$

wodurch u' und v' als Functionen von x dargestellt erscheinen.

Durch Integrationen dieser Gleichungen findet man u und v, und mithin auch die Lösung der Aufgabe.

**Beispiele:**

1. Es ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$y'' + \beta^2 y = e^{\alpha x}$$

anzugeben.

Dieser Gleichung entspricht die reducierte Gleichung

$$y'' + \beta^2 y = 0$$

oder

$$y'' = -\beta^2 y.$$

Diese hat (Beispiel 2, ad 2 des § 80) das allgemeine Integral

$$y = c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x,$$

aus welchem durch Specialisierung der Constanten die particulären Integrale abgeleitet werden können.

Setzt man einmal $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, das anderemal $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. so erhält man die beiden particulären Integrale

$$\varphi(x) = \sin \beta x; \qquad \psi(x) = \cos \beta x.$$

Das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung wird somit sein:

$$y = u \sin \beta x + v \cos \beta x.$$

Aus den Gleichungen

$$\varphi(x) = \sin \beta x; \qquad \psi(x) = \cos \beta x$$

folgt:

$$\varphi'(x) = \beta \cos \beta x; \qquad \psi'(x) = -\beta \sin \beta x,$$

so dass für die Functionen u und v die Bedingungsgleichungen bestehen:

$$u' \sin \beta x + v' \cos \beta x = 0$$

$$u' \cos \beta x - v' \sin \beta x - \frac{e^{\alpha x}}{\beta} = 0.$$

Die Auflösungen dieser Gleichungen sind:

$$u' = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{\beta},$$

$$v' = \frac{-e^{\alpha x} \sin \beta x}{\beta},$$

aus welchen durch Integration

$$u = \frac{1}{\beta}\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\beta} \frac{\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} + c_1,$$

$$v = -\frac{1}{\beta}\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\beta} \frac{\beta \cos \beta x - \alpha \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} + c_2$$

folgt. (Formel 102.)

Das allgemeine Integral der Gleichung ist somit:

$$y = \left(\frac{e^{\alpha x}}{\beta} \frac{\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} + c_1\right) \sin \beta x +$$

$$+ \left(\frac{e^{\alpha x}}{\beta} \frac{\beta \cos \beta x - \alpha \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} + c_2\right) \cos \beta x.$$

oder

$$y = c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

2. Es soll das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$y'' - \lambda^2 y = x$$

ermittelt werden.

Die entsprechende reducierte Gleichung ist:

$$y'' - \lambda^2 y = 0 \quad \text{oder} \quad y'' = \lambda^2 y$$

und hat (siehe Beispiel 1 zu § 80, 2) das allgemeine Integral

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x},$$

mithin die particulären Integrale

$$\varphi(x) = e^{\lambda x}; \quad \psi(x) = e^{-\lambda x}.$$

Das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung wird somit sein:

$$y = u e^{\lambda x} + v e^{\lambda x}.$$

Differenziert man:

$$\varphi(x) = e^{\lambda x} \text{ und } \psi(x) = e^{-\lambda x},$$

so erhält man:

$$\varphi'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad \psi'(x) = -\lambda e^{-\lambda x}.$$

Mithin bestehen zur Bestimmung der Functionen u und v die Gleichungen

$$u' e^{\lambda x} + v' e^{-\lambda x} = 0,$$

$$\lambda u' e^{\lambda x} - \lambda v' e^{-\lambda x} - x = 0,$$

aus welchen

$$u' = + \frac{x e^{-\lambda x}}{2\lambda},$$

$$v' = - \frac{x e^{\lambda x}}{2\lambda}$$

erhalten wird.

Durch Integration der letzten Gleichungen findet man:

$$u = \int \frac{x e^{-\lambda x}}{2\lambda} dx = - \frac{x}{2\lambda^2} e^{-\lambda x} - \frac{1}{2\lambda^3} e^{-\lambda x} + c_1;$$

$$v = -\int \frac{x\, e^{\lambda x}}{2\lambda}\, dx = -\frac{x}{2\lambda^2}\, e^{\lambda x} + \frac{1}{2\lambda^3}\, e^{\lambda x} + c_2.$$

Das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung ist demnach:

$$y = e^{\lambda x}\left[c_1 - e^{-\lambda x}\left(\frac{x}{2\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda^3}\right)\right] + e^{-\lambda x}\left[c_2 - e^{\lambda x}\left(\frac{x}{2\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda^3}\right)\right]$$

oder

$$y = c_1\, e^{\lambda x} + c_2\, e^{-\lambda x} - \frac{x}{\lambda^2}.$$

---

## 3. Abschnitt.

### § 82. Einige einfache Fälle der Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung.

1. Eine Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung von der Form:

$$y^{(n)} = f(x),$$

in welcher der $n^{te}$ Differentialquotient als Function von $x$ allein gegeben erscheint, ist theoretisch immer integrierbar.

Setzt man nämlich:

$$y^{(n)} = \frac{d\, y^{(n-1)}}{dx},$$

so geht sie in:

$$d\, y^{(n-1)} = f(x)\, dx$$

über und kann direct integriert werden.

Die Integration gibt eine Differentialgleichung von $(n-1)^{ter}$ Ordnung:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\, dx + c_1.$$

Wird diese analog wie die frühere behandelt, so folgt aus ihr:

$$y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)\, dx + c_1\right] dx + c_2.$$

Durch fortgesetzte Wiederholung des Verfahrens wird schließlich y als Function von x, welche n willkürliche Constante enthält, also das allgemeine Integral der Gleichung erhalten.

**Beispiel:**

Die gegebene Differentialgleichung sei:

$$y^{IV} = x \cos x.$$

Dann ist:

$$d\,y''' = x \cos x \, d\,x,$$

$$y''' = \int x \cos x \, d\,x = x \sin x + \cos x + c_1,$$

also

$$d\,y'' = [x \sin x + \cos x + c_1]\, d\,x,$$

$$y'' = \int x \sin x \, d\,x + \int \cos x \, d\,x + c_1\, x + c_2,$$

$$y'' = - x \cos x + \sin x + \sin x + c_1\, x + c_2 =$$

$$= - x \cos x + 2 \sin x + c_1\, x + c_2,$$

mithin

$$d\,y' = [- x \cos x + 2 \sin x + c_1\, x + c_2]\, d\,x,$$

$$y' = - \int x \cos x \, d\,x + 2 \int \sin x + c_1 \int x \, d\,x + c_2\, x + c_3,$$

$$y' = - x \sin x - \cos x - 2 \cos x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2\, x + c_3 =$$

$$= - x \sin x - 3 \cos x + \frac{c_1}{2} x^2 + c_2\, x + c_3$$

und schließlich:

$$d\,y = [- x \sin x - 3 \cos x + \frac{c_1}{2} x^2 + c_2\, x + c_3]\, d\,x,$$

$$y = - \int x \sin x \, d\,x - 3 \int \cos x \, d\,x + \frac{c_1}{2} \int x^2 \, d\,x + c_2 \int x \, d\,x + c_3\, x + c_4,$$

$$y = x \cos x - \sin x - 3 \sin x + \frac{c_1}{2} \frac{x^3}{3} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3\, x + c_4.$$

Das allgemeine Integral der Gleichung ist somit:

$$y = x \cos x - 4 \sin x + a\, x^3 + b\, x^2 + c\, x + d,$$

wobei a, b, c und d willkürliche Constante bedeuten.

**Anmerkung: Die Differentialgleichung**

$$y^{(n)} = f(y),$$

**in welcher der $n^{te}$ Differentialquotient als Function der zu bestimmenden Function y dargestellt ist, kann nur in den bereits behandelten zwei Fällen, nämlich für $n = 1$ und $n = 2$, durch einfache Integrale integriert werden.**

2. Die Differentialgleichung enthalte nur zwei um eine Einheit in ihrer Ordnung verschiedene Differentialquotienten und außer diesen keine anderen Variablen.

Eine derartige Differentialgleichung kann immer auf die Form gebracht werden:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$$

und kann in sehr einfacher Weise integriert werden.

Setzt man nämlich:

$$y^{(n-1)} = z,$$

also

$$y^{(n)} = \frac{dz}{dx} = z',$$

so erhält man:

$$z' = f(z)$$

oder

$$dx = \frac{dz}{f(z)},$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integral

$$x + c = \int \frac{dz}{f(z)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (z$$

ermittelt werden kann.

Ist dieses Integral nach z auflösbar, so erhält man:

$$z = \varphi(x, C),$$

also

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, C),$$

eine Differentialgleichung $(n-1)^{ter}$ Ordnung von der sub 1) behandelten Form, welche integriert werden kann.

Sollte die Auflösung nach z nicht möglich sein, dann führt folgendes Verfahren zum Ziele.

Man setzt wieder wie früher:

$$y^{(n-1)} = z$$

und erhält aus

$$y^{(n)} = f(z),$$

$$y^{(n)}\,dx = f(z)\,dx,$$

weil $y^{(n)}\,dx = dy^{(n-1)}$ und zufolge der gefundenen Gleichung ($\alpha$

$$x + c = \int \frac{dz}{f(z)},$$

$$dx = \frac{dz}{f(z)}$$

ist, findet man:

$$y^{(n-1)}\,dx = z\,dx,$$

$$dy^{(n-2)} = z\frac{dz}{f(z)},$$

$$y^{(n-2)} = \int z\frac{dz}{f(z)}$$

und nach nochmaliger Multiplication mit $dx$:

$$y^{(n-2)}\,dx = dx\int z\frac{dz}{f(z)},$$

$$dy^{(n-3)} = \frac{dz}{f(z)}\int z\frac{dz}{f(z)},$$

mithin

$$y^{(n-3)} = \int\frac{dz}{f(z)}\int z\frac{dz}{f(z)}.$$

Auf diese Art erhält man schließlich y als Function von z, und nachdem x bereits als Function von z durch

$$x + C = \varphi(z) = \int\frac{dz}{f(z)}$$

dargestellt ist, auch y als Function von x, somit das allgemeine Integral, wenn man aus den bezüglichen Gleichungen z eliminiert.

**Beispiel:**

Die gegebene Differentialgleichung sei:

$$y''' = \sqrt{1 - y''^2}.$$

Setzt man $y'' = z$, also $y''' = \frac{dz}{dx}$, so erhält man:

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 - z^2},$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = dx,$$

$$\arcsin z = x + c_1.$$

Diese Gleichung ist nach z auflösbar und gibt:

$$z = \sin(x + c_1).$$

Nun ist aber $z = y'' = \frac{dy'}{dx}$, es ist also weiters:

$$\frac{dy'}{dx} = \sin(x + c_1),$$

$$dy' = \sin(x + c_1)\, dx,$$

$$y' = -\cos(x + c_1) + c_2,$$

und weil $y' = \frac{dy}{dx}$,

$$dy = [-\cos(x + c_1) + c_2]\, dx,$$

mithin schließlich:

$$y = -\int \cos(x + c_1)\, dx + \int c_2\, dx + c_3,$$

$$y = -\sin(x + c_1) + c_2 x + c_3,$$

das allgemeine Integral der Gleichung.

3. Die Differentialgleichung enthalte, außer zwei um zwei Einheiten in der Ordnung verschiedene Differentialquotienten, keine andere Variable.

Eine derartige Gleichung kann auf die Form gebracht

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$$

und auf folgende Art integriert werden:

Man setzt:

$$y^{(n-2)} = z,$$

also

$$y^{(n)} = z'',$$

dadurch geht sie in:

$$z'' = f(z)$$

über.

Diese Gleichung wurde bereits bei Besprechung der einfachen Fälle der Differentialgleichungen zweiter Ordnung integriert und hat das allgemeine Integral

$$x + c_1 = \int \frac{dz}{\sqrt{c_2 + 2\int f(z)\,dz}}.$$

Kann nun diese Integralgleichung nach Ausführung der angezeigten Integration bezüglich z aufgelöst werden, so gibt sie z als Function der Variablen x

$$z = \varphi(x),$$

also

$$y^{(n-2)} = \varphi(x),$$

und diese Gleichung kann, weil sie die sub 1) behandelte Form hat, bereits integriert werden.

Sollte die Integralgleichung

$$x + c_1 = \int \frac{dz}{\sqrt{c_2 + 2\int f(z)\,dz}} \quad \ldots\ldots (\alpha$$

nach z nicht auflösbar sein, dann ist folgender Vorgang einzuschlagen.

Man multipliciert die Substitutionsgleichung

$$y^{(n-2)} = z$$

mit dx und erhält aus

$$y^{(n-2)}\,dx = dy^{(n-3)} = z\,dx$$

wegen der Gleichung ($\alpha$:

$$dy^{(n-3)} = \frac{z\,dz}{\sqrt{c_2 + 2\int f(z)\,dz}},$$

mithin:

$$y^{(n-3)} = \int \frac{z\,dz}{\sqrt{c_2 + 2\int f(z)\,dz}}.$$

Aus dieser folgt:

$$y^{(n-3)}\,dx = d\,y^{(n-4)} = dx\int\frac{z\,dz}{\sqrt{c_2 + 2\int f(z)\,dz}},$$

$$d\,y^{(n-4)} = \frac{z\,dz}{\sqrt{c_2 + 2\int f(z)\,dz}}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{c_2 + 2\int f(z)\,dz}},$$

also

$$y^{(n-4)} = \int\frac{z\,dz}{\sqrt{c_2 + 2\int f(z)\,dz}}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{c_2 + 2\int f(z)\,dz}}$$

u. s. w.

Auf diese Weise erhält man schließlich y als Function von z, und weil x bereits als Function von z durch (α ausgedrückt ist, auch y als Function von x, wenn man z aus beiden Gleichungen eliminiert.

**Beispiel:**

Die gegebene Differentialgleichung sei:

$$a^2\,y^{IV} = y''.$$

Setzt man:

$$y'' = z, \text{ also } y^{IV} = z'',$$

so erhält man:

$$z'' = \frac{z}{a^2}.$$

Diese Gleichung gibt integriert:

$$x + c_1 = \int\frac{dz}{\sqrt{c_2 + \frac{z^2}{a^2}}},$$

also

$$\frac{x + c_1}{a} = l\left[\frac{z}{a} + \sqrt{c + \left(\frac{z}{a}\right)^2}\right]$$

oder nach Umformung (siehe Beispiel 1 zu 2 Integration der einfachen Differentialgleichungen zweiter Ordnung):

$$z = C_1\,e^{\frac{x}{a}} + C_2\,e^{-\frac{x}{a}}.$$

Die Gleichung ist bereits nach z aufgelöst und gibt, weil $z = y''$, $y''$ als Function von x.

$$y'' = C_1\,e^{\frac{x}{a}} + C_2\,e^{-\frac{x}{a}}.$$

Hieraus folgt:

$$d\,y' = [C_1\, e^{\frac{x}{a}} + C_2\, e^{-\frac{x}{a}}]\, d\,x,$$

$$y' = a\, C_1\, e^{\frac{x}{a}} + a\, C_2\, e^{-\frac{x}{a}} + C_3,$$

ferner

$$d\,y = [a\, C_1\, e^{\frac{x}{a}} + a\, C_2\, e^{-\frac{x}{a}} + C_3]\, d\,x,$$

und schließlich

$$y = a^2\, C_1\, e^{\frac{x}{a}} + a^2\, C_2\, e^{-\frac{x}{a}} + C_3\, x + C_4$$

als allgemeines Integral der gegebenen Differentialgleichung.

ML

OCT 4 1937